This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

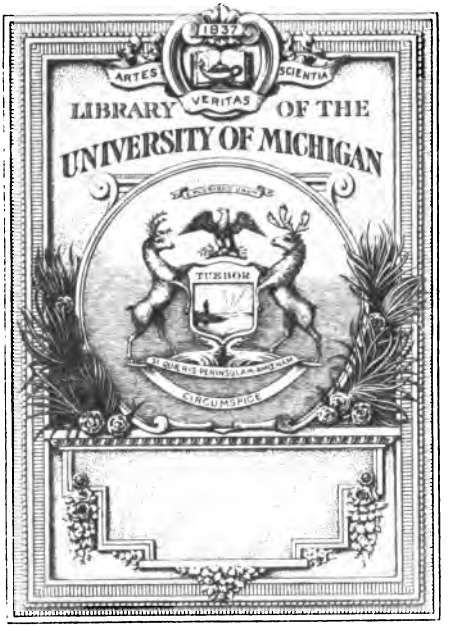
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

KINEMATICS
QA
453
.A555g

NDRÉ & E. LORMEAU

OMÉTRIE

GÉOMÉTRIE

ANDRÉ

de C-D. — *Première* problèmes, plus 200 amens du *Baccalau-* s A, par PH. ANDRÉ ..... 5 »
ogramme officiel à des candidats aux ..... 6 »
gramme officiel, à ..... 5 »

Éléments de Géométrie, théorique et pratique, contenant plus de 1000 problèmes résolus et à résoudre, trois traités très complets : *Levé des plans, Arpentage et Nivellement*, etc. 1 vol. in-12, cartonné..... 3 »

Nouveau Cours de Géométrie, à l'usage de tous les *Établissements d'Instruction*, contenant plus de 1000 problèmes résolus et à résoudre, trois traités très complets : *Levé des plans, Arpentage et Nivellement*. In-12, c. 4 »

Exercices de Géométrie (Problèmes et Théorèmes), énoncés et solutions développées des **964** questions proposées dans le *Traité*, le *Précis*, le *Nouveau Cours*, les *Éléments de géométrie* par PH. ANDRÉ et la *Géométrie* PH. ANDRÉ et E. LORMEAU. 1 vol. in-8, broché..... 6 »

Solutions développées (et énoncés) de **200 Problèmes de géométrie** donnés aux examens du *Baccalauréat Latin-Sciences — Sciences-Langues*) et *Mathématiques* A (énoncés dans la Géométrie PH. ANDRÉ et E. LORMEAU, par E. LORMEAU et P. MERLET. 1 vol. in-8 écu, broché..... *sous presse.*

Énoncés des Exercices de Géométrie 1 vol. in-12, cart..... » 60

Arithmétique à l'usage des Classes élémentaires. in-12, cart. » 80

Solutions des Exercices proposés dans l'Arithmétique, à l'usage des Classes élémentaires. 1 vol. in-12, broché..... » 60

Éléments d'Arithmétique (N° 3). 1 v. in-8°, broché..... 3 »

Nouveau Cours d'Arithmétique (N° 4). 1 vol. in-8°, broché..... 4 »

Exercices d'Arithmétique (*Problèmes et Théorèmes*), ou énoncés et solutions développées des questions proposées dans le *Nouveau Cours d'Arithmétique* (n° 4) et dans les *Éléments* (n° 3). 1 beau vol. in-8°, br..... 5 »

Énoncés des Exercices d'Arithmétique (*Problèmes et Théorèmes*) contenus dans les Arithmétiques (n° 4) et (n° 3). 1 vol. in-8°, br..... 1 »

Algèbre élémentaire, à l'usage des Ecoles professionnelles, des Pensionnats et des Ecoles normales. 1 vol. in-12, cart..... 1 60

Nouveau Cours d'Exercices et de Problèmes d'Algèbre, ou énoncés et solutions développées des questions proposées dans l'*Algèbre élémentaire*. 1 vol. in-12, broché..... 1 60

Petit Cours d'Algèbre. 1 vol. in-12, cartonné..... 1 »

Solutions du Petit Cours d'Algèbre. In-12, cart..... 1 »

Éléments d'Algèbre (N° 3), à l'usage des aspirants au Baccalauréat et de tous les *Etablissements d'instruction*. in-8°, broché..... 3 »

Nouveau Cours complet d'Algèbre élémentaire (N° 4), conforme au programme de l'Enseignement classique, à l'usage des *Établissements d'instruction*, des aspirants au Baccalauréat et aux diverses Ecoles du gouvernement. 1 vol. In-8°, broché..... 4 »

Cours d'Algèbre de l'Enseignement spécial, à l'usage des *Établissements d'Instruction*. 1 vol. in-8°, broché..... 4 »

Exercices d'Algèbre (*Problèmes et Théorèmes*), énoncés et solutions développées des questions proposées dans les *Algèbres* (n° 4) et (n° 3), ainsi que dans le *Cours de l'Enseignement spécial*. 1 vol. in-8°, br..... 6 »

Nouveau Cours de Trigonométrie. 1 vol. in-8°, br..... 2 »

Exercices de Trigonométrie. 1 vol. in-8°, br..... 2 »

Résumé d'un Cours de Trigonométrie. Br. in-8°..... » 40

Nouvelles Tables de Logarithmes à 7 décimales pour les nombres de 1 à 10 000. 1 vol. in-12, cartonné..... 1 »

Nouvelles Tables de Logarithmes à 7 décimales de 1 à 10 000. Sinus et tangentes. 1 vol. in-12, cartonné..... 2 »

Paris. — Imp. E. CAPIOMONT et Cie, rue de Seine, 57. (N° 26).

PH. ANDRÉ & E. LORMEAU

GÉOMÉTRIE

PROGRAMME OFFICIEL DU 27 JUILLET 1905

Seconde C-D. — Première C-D.

Mathématiques A

A-G

PARIS

LIBRAIRIE CLASSIQUE E. ANDRÉ FILS

6, rue Casimir-Delavigne (près l'Odéon)

1908

PRÉFACE

Cette **Géométrie** *a l'avantage de comprendre en un seul volume tout le développement des matières du* **programme du 27 Juillet 1905** *concernant les Classes de Seconde C-D, Première C-D et Mathématiques A.*

Nous avons divisé ce traité en huit livres.

Les sept premiers sont une préparation au premier examen du Baccalauréat, séries C et D.

Le huitième livre traitant des sections coniques, et les compléments relatifs à la théorie des axes et plans radicaux, des pôles et polaires, de l'inversion, des vecteurs et des projections centrales, sont rejetés à la fin du volume et regardent seulement les élèves de Mathématiques A.

Chaque livre est subdivisé en chapitres et ceux-ci en paragraphes. Les textes des chapitres et des paragraphes reproduisent **les questions du programme**, *afin que les élèves trouvent dans cet ouvrage un guide facile pour la préparation de leurs examens.*

Deux cents problèmes (Latin-Sciences, Sciences-Langues, Mathématiques A), donnés aux épreuves du Baccalauréat pendant ces dernières années, ont été ajoutés à la fin de la géométrie plane et de la géométrie dans l'espace.

Avant tout, nous avons cherché à être simples, clairs et précis, tout en nous tenant au courant des progrès de la Géométrie moderne.

Programme officiel du 27 juillet 1905.

Les nombres qui suivent chacune des questions du programme indiquent les numéros du volume où cette question est abordée.

Figures planes. — SECONDE C et D.

Ligne droite et plan. — Angles, sens d'un angle, 32. Droites perpendiculaires, 35.

Triangles, 54. Triangle isocèle, 55. Cas d'égalité des triangles, 60.

Perpendiculaire et obliques, 71. Triangles rectangles, 80. Cas d'égalité, 80.

Définition d'un lieu géométrique, 83. Lieu géométrique des points équidistants de deux points ou de deux droites, 83.

Droites parallèles, 93.

Somme des angles d'un triangle, 108; d'un polygone convexe, 114.

Parallélogrammes, 119.

Figures symétriques par rapport à un point, 142, ou à une droite, 143. Deux figures planes symétriques sont égales, 145.

Translation d'une figure plane de forme invariable, 149.

Cercle. — Intersection d'une droite et d'un cercle, 163.

Tangente au cercle, 173, les deux définitions de la tangente, 179.

Arcs et cordes, 182.

Positions relatives de deux cercles, 205.

Mesure des angles, 216.

Mouvement de rotation autour d'un point, 237. Tout déplacement

d'une figure plane de forme invariable dans son plan se ramène à une rotation ou à une translation, 240.

Longueurs proportionnelles. — Points partageant un segment dans un rapport donné, 271. Définition de la division harmonique, 422.

Triangles semblables, 282.

Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle divise les deux autres côtés en parties proportionnelles, 273. Réciproque, 277. Définition d'un faisceau harmonique, 428.

Propriétés des bissectrices d'un triangle, 278, 354, 423. Lieu géométrique des points dont le rapport des distances à deux points fixes est constant, 280.

Notions simples sur l'homothétie, 292. Polygones semblables, 311. Sinus, cosinus, tangente et cotangente des angles compris entre 0 et 2 droits, 430. Relations métriques dans un triangle rectangle et dans un triangle quelconque, 327. Lignes proportionnelles dans le cercle, 353. Quatrième proportionnelle, 372; moyenne proportionnelle, 374.

Polygones réguliers, 388. Inscription dans le cercle du carré, 397; de l'hexagone, 399; du triangle équilatéral, 399; du décagone, 402; du pentédécagone, 404. Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables, 396. Rapport de leurs périmètres, 396. Longueur d'un arc de cercle, 405. Rapport de la circonférence au diamètre, 409. Calcul de π (on se bornera à la méthode des périmètres), 415.

Aire des polygones, 438; aire du cercle, 481. Mesure de l'aire du rectangle, 445; du parallélogramme, 447; du triangle, 450; du trapèze, 458; d'un polygone quelconque, 460.

Rapport des aires de deux polygones semblables, 467.

Aire d'un polygone régulier convexe, 479. Aire d'un cercle, 481; d'un secteur, 484 et d'un segment de cercle, 486. Rapport des aires de deux cercles, 490.

Notions d'arpentage. Usage de la chaîne et de l'équerre d'arpenteur (à la fin du volume).

PREMIÈRE C et D.

Plan et ligne droite, 495.

Détermination d'un plan, 498.

Parallélisme des droites et des plans, 520.

Droite et plan perpendiculaires, 502.

Propriétés de la perpendiculaire et des obliques menées d'un même point à un plan, 513.

Angle dièdre, 539. Sens, 540. Angle plan correspondant à un angle dièdre, 553.

Plans perpendiculaires entre eux, 563.

Projection d'une aire plane, 577.

Translation, 700; Rotation autour d'un axe, 704. Symétrie par rapport à une droite, 655. Symétrie par rapport à un point, 654. Symétrie par rapport à un plan, 656. Ce second mode de symétrie se ramène au premier, 661.

Angles trièdres. — Disposition des éléments, 591. Trièdres symétriques, 591. Chaque face d'un tièdre est moindre que la somme des deux autres, 583. Limites de la somme des faces d'un angle polyèdre convexe, 585.

Trièdres supplémentaires, 586. Applications, 589.

Cas d'égalité des trièdres, 598.

Homothétie. — Sections planes parallèles d'angles polyèdres, 676. — Aires, 676.

Polyèdres. — Polyèdres homothétiques, 681; polyèdres semblables, 689. Prisme, 604. Pyramide, 634.

Notions sommaires sur les symétries du cube et de l'octaèdre régulier, 672.

Volumes des parallélipipèdes, 623 et des prismes, 632. Volume de la pyramide, 640.

Volume du tronc de pyramide à bases parallèles, 647. Volume du tronc de prisme triangulaire, 650.

Rapport des volumes de deux polyèdres semblables, 699.

Deux polyèdres symétriques sont équivalents, 671.

Cylindre à base circulaire, 716. Plan tangent, 714.

Cône à base circulaire, 726. Plan tangent, 715. Sections parallèles à la base, 727.

Surfaces de révolution simples : cylindre, cône, 713.

Sphères, 743. Sections planes, 744. Pôles, 749. Plan tangent, 764. Cône et cylindre circonscrits, 772 et 806.

Surface latérale du cylindre, 719 et du cône de révolution, 731.

Volume du cylindre, 722, et du cône à base circulaire, 739.

Aire de la zone, 785. Aire de la sphère, 788. Volume de la sphère, 798.

MATHÉMATIQUES A.

Droite, 22. Angles, 32. Parallélisme, 93. Polygones, 105. Cercle, 163.

Plan, 495; droites et plans, 502. Angles dièdres, 539; angles polyèdres, 581.

Translation, 149, 700. Rotation, 237, 704. Symétries, 143 et 656.

Homothétie, 292, 673, et similitude, 311, 689 et 776. Relations métriques, 327. Polygones réguliers, 388.

Prisme, 632; pyramide, 634; cylindre, 716; cône, 726; sphère, 743. Aires, 785 et volumes, 798.

Puissance d'un point par rapport à un cercle, 364 et par rapport à une sphère, 809. Axes radicaux, 365. Plans radicaux, 810.

Polaire d'un point par rapport à un cercle, 819; plan polaire d'un point par rapport à une sphère, 826.

Inversion, 960. Applications, 980. Appareil de Peaucellier, 984. Projection stéréographique, 985.

Vecteurs. — 986. Projection d'un vecteur sur un axe, 998; moment linéaire par rapport à un point, 1011; moment par rapport à un axe, 1017.

Somme géométrique d'un système de vecteurs, 993, 1015; moment résultant par rapport à un point, 1014; somme de moments par rapport à un axe, 1021.

Application à un couple de vecteurs, 1027.

Projections centrales. — Plan du tableau, 1036. Perspective d'un point, 1037; d'une droite, 1038; d'une ligne, 1045. Point de fuite d'une droite, 1039. Perspective de deux droites parallèles, 1041. Ligne de fuite d'un plan, 1042. Conception de la droite à l'infini d'un plan, 1044.

Coniques. — Ellipse, 830. Tracé, 832; tangente, 846; problèmes simples sur les tangentes, 855. Équation de l'ellipse rapportée à ses axes, 866. Ellipse considérée comme projection du cercle, 860; problèmes simples sur les tangentes, 863; intersection de l'ellipse et d'une droite, 844 et 864.

Hyperbole, 868. Tracé, 869; tangente, 883; asymptotes, 888; problèmes simples sur les tangentes, 891. Équation de l'hyperbole rapportée à ses axes, 895.

Parabole, 896. Tracé, 897; tangente, 903; problèmes simples sur les tangentes, 908. Équation de la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet, 918.

Définition commune de ces courbes au moyen d'un foyer et d'une directrice, 919.

Sections planes d'un cône ou d'un cylindre de révolution, 931.

GÉOMÉTRIE

Mathematics
LeDault
11-26-23
9217

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

1. Corps. — On appelle *corps* tout ce qui occupe une certaine portion de l'espace [1]. Exemples : un livre, une règle, une pierre, etc.

Les corps présentent en général *trois dimensions : longueur*, *largeur* et *épaisseur*. Cette dernière s'appelle encore *hauteur* et *profondeur*. Ces dimensions sont bien visibles dans une règle, un livre, un mur, etc. ; mais elles sont confuses dans une boule, une pierre non taillée, etc.

2. Volume. — On nomme *volume* d'un corps la portion de l'espace qu'il occupe.

3. Surface. — On appelle *surface* d'un corps ce qui le limite, ce qui le sépare de l'espace environnant, ou encore la partie du corps que les yeux peuvent voir, que les mains peuvent toucher.

4. Ligne. Une *ligne* est le lieu où deux surfaces se rencontrent.

5. Point. — On appelle *point* le lieu où deux ou plusieurs lignes se coupent. On nomme encore *point* l'extrémité d'une ligne.

6 Remarque. — Nous devons les notions de volume, de surface, de ligne et de point à la considération des corps qui frappent nos yeux. En géométrie, on conçoit les volumes, les surfaces, les lignes et les points, indépendamment des corps qui en

1. On appelle espace cette immensité au milieu de laquelle sont tous les astres et le globe que nous habitons.

ont donné l'idée. C'est pour ce motif qu'on peut regarder *la ligne* comme engendrée par un point qui se déplace, *la surface* par une ligne qui se déplace, *le volume* par une surface qui se déplace.

7. Figures. — En géométrie, on appelle *figure* toute représentation de lignes, de surfaces ou de volumes.

8. Figures égales. — Deux *figures sont égales* quand, appliquées l'une sur l'autre ou l'une dans l'autre, elles coïncident dans toute leur étendue.

9. Figures équivalentes. — On appelle *figures équivalentes* celles qui ont la même étendue sans avoir la même forme. Ainsi, dans le cas où la surface d'un triangle a la même étendue que celle d'un carré, on dit que ces deux figures sont équivalentes.

10. Figures semblables. — On désigne par *figures semblables* les figures qui ont la même forme sans avoir la même étendue. Un petit cercle et un grand sont des figures semblables.

11. Axiome. — On nomme *axiome* une vérité évidente par elle-même.

Voici des axiomes d'un fréquent usage :

1° *Le tout est plus grand que sa partie ;*

2° *Le tout est égal à la somme de ses parties ;*

3° *Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles.*

12. Postulatum ou Postulat. — On appelle *postulatum* ou *postulat*, une proposition que l'on admet comme évidente, mais que l'on ne peut démontrer ; par exemple, ce *postulatum* d'Euclide : *Par un point pris hors d'une droite, on ne peut mener qu'une parallèle à cette droite.*

13. Théorème. — On appelle *théorème* une vérité qui, pour être comprise, demande un raisonnement appelé *démonstration*. *Les trois angles d'un triangle valent deux angles droits :* voilà une vérité ; mais comme on ne peut la comprendre sans démonstration, on l'appelle théorème.

14. Corollaire. — Un *corollaire* est une conséquence qui découle d'un théorème.

15. Problème. — Un *problème* est une question à résoudre.

16. Solution. — Une *solution* est un raisonnement qui conduit à la réponse du problème.

17. Proposition. — Le nom commun de *proposition* est donné indifféremment aux théorèmes, corollaires, etc.

18. Lemme. — Un *lemme* est une proposition préliminaire destinée à faciliter la démonstration d'un théorème.

L'énoncé de toute proposition comprend deux parties : l'*hypothèse* et la *conclusion*.

L'hypothèse se compose d'une ou plusieurs suppositions ; la conclusion est la conséquence tirée de l'hypothèse, au moyen d'un raisonnement établi sur des vérités déjà connues.

19. Réciproque. — La *réciproque* d'une proposition est une autre proposition liée à la première, de telle sorte qu'elle a pour hypothèse et pour conclusion la conclusion et l'hypothèse de la première, qui prend dans ce cas le nom de *proposition directe*.

Voici une proposition directe : *Si* A *est égal à* B, C *est égal à* D. Sa réciproque est : *Si* C *est égal à* D, A *est égal à* B. Il est évident que la première proposition peut être aussi une proposition réciproque de la seconde qui devient alors une proposition directe.

20. Objet de la géométrie. — La *géométrie* est une *science* qui a pour objet *l'étude des propriétés des figures* et la *mesure* de leur étendue.

21. Division de la géométrie. — La géométrie se divise en deux parties : 1° la *géométrie plane*, qui traite de toutes les figures situées dans un même plan ; 2° la *géométrie dans l'espace*, qui traite de toutes les figures qui ne sont pas situées dans un même plan. S'occuper de théorèmes relatifs au cercle, c'est faire de la géométrie plane ; en traitant ceux qui sont relatifs à la sphère, on fait de la géométrie dans l'espace.

LIVRE I

LA LIGNE DROITE

CHAPITRE PREMIER

Ligne droite et plan. — Angles.

§ I — LIGNE DROITE ET PLAN

Définitions.

22. Ligne droite. — La *ligne droite* ne peut pas se définir; c'est la plus simple de toutes les lignes. Un fil fortement tendu offre l'image d'une ligne droite. Pour abréger, on dit souvent *droite* au lieu de *ligne droite*.

On considère, en général, la ligne droite comme étant indéfinie.

Demi-droite. — On appelle *demi-droite*, la partie d'une

FIG. 1.

FIG. 1 *bis*.

droite qui commence à un point O quelconque de cette droite et s'étend indéfiniment, d'un seul côté à partir de ce point (*fig.* 1).

Le sens de la *demi-droite* est celui du mouvement d'un mobile qui la parcourrait en s'éloignant de l'origine. Deux *demi-droites* OA, OB sont *opposées* lorsqu'elles ont une origine commune O et sont en prolongement l'une de l'autre.

23. — Un *point* se désigne ordinairement par une lettre, et une *ligne droite* par deux lettres, affectées à deux de ses points. Ainsi, on dit le point A et la droite AB (*fig.* 1 *bis*).

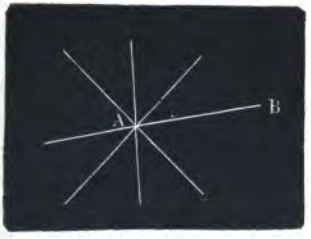


FIG. 2.

24. — *Il faut deux points pour déterminer une droite*, car, par un point A, on peut faire passer une infinité de droites venant de toutes les directions possibles ; mais, par deux points A et B, on n'en peut faire passer qu'une, parce que, de toutes celles qui partent du point A, une seule se dirige au point B. Alors on admet comme évident :

1° *Que par deux points on ne peut mener qu'une seule ligne*

droite ; 2° Que si deux droites ont deux points de communs, elles coïncident dans toute leur étendue.

25. Distance de deux points. — On appelle *distance de deux points* A *et* B (*fig.* 2) la portion ou le segment de droite terminé aux points A et B.

26. Remarque. — Les trois expressions suivantes : *distance* AB, *droite* AB (c'est-à-dire droite terminée aux points A et B) et *longueur* AB, s'emploient indifféremment.

27. Ligne brisée. — On appelle *ligne brisée*, ou *polygonale*, toute ligne composée de plusieurs droites (*fig.* 3).

FIG. 3.

28. Ligne courbe. — On nomme *ligne courbe* une ligne qui n'est ni droite, ni composée de lignes droites (*fig.* 4).

FIG. 4.

29. Plan ou surface plane. — Le *plan* est une surface telle qu'elle contient tout entière la droite qui joint deux de ses points *pris à volonté*. On dit aussi que le plan est une surface sur laquelle on peut appliquer en tous sens une règle bien droite. Une glace, une table de marbre bien polie, représentent des surfaces planes.

Chaque jour, on voit les ouvriers (menuisiers, marbriers, tailleurs de pierre et autres), la règle à la main, mettre en pratique la seconde définition du plan.

30. Surface brisée. — Une *surface brisée* est celle qui est composée de surfaces planes. Exemple : les feuillets d'un paravent.

31. Surface courbe. — On appelle *surface courbe* celle qui n'est ni plane, ni composée de surfaces planes. Exemple : la surface d'une sphère.

§ II. — ANGLES

Définitions.

32. Angle. — On appelle *angle* l'ouverture formée par deux droites qui partent *du même* point.

Les *côtés* de l'angle sont les droites AB, AC qui le forment. Le *sommet* est le point A d'où partent les côtés.

FIG. 5.

On désigne un angle par la lettre du sommet. Ainsi, on dit l'angle A.

Lorsque plusieurs angles ont le même sommet, pour éviter la confusion, on les désigne chacun par trois lettres, en plaçant celle du sommet au milieu. Ainsi, on dit les angles BAC, CAD. DAE (*fig.* 6).

Le plus souvent on se contente, pour simplifier, de désigner les angles par des chiffres : on dit les angles 1, 2, 3.

Il arrive aussi quelquefois que l'on désigne des angles par de petites lettres placées dans leur intérieur.

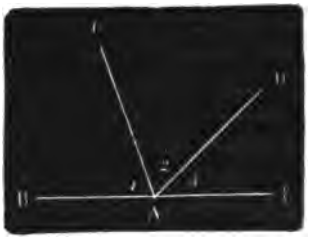


FIG. 6.

33. Génération d'un angle. Sens d'un angle. — On peut imaginer qu'un angle soit engendré par le mouvement d'une droite mobile AC, qui d'abord appliquée sur la droite fixe AB s'en écarte en tournant, dans le sens de la flèche, autour du point A. Il est clair que plus la droite mobile AC s'écartera de la droite fixe AB et plus l'angle CAB augmentera. De ce mode de génération, il résulte que la grandeur d'un angle dépend de l'écartement de ses côtés, et non de leur longueur, qui est supposée indéfinie.

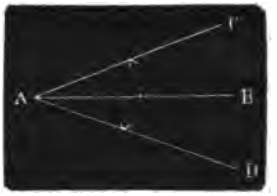


FIG. 7.

Un angle est *direct* ou *positif* quand AC coïncidant d'abord avec AB s'écarte de la droite vers la gauche par rapport à un observateur ayant les pieds en A et regardant le déplacement. Lorsque l'écartement a lieu de la gauche vers la droite, c'est-à-dire vers AD, l'angle est dit négatif ou rétrograde (*fig.* 7).

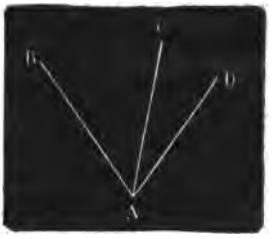


FIG. 8.

34. Angles adjacents. — On nomme *angles adjacents* deux angles qui ont le même sommet et un côté intermédiaire commun. Ainsi, les deux angles BAC, CAD ayant même sommet A et le même côté intermédiaire AC, sont adjacents.

35. Perpendiculaire. — On appelle *perpendiculaire* une droite qui en rencontre une autre en formant avec elle deux angles adjacents égaux entre eux. Ainsi, on dira (*fig.* 9) que la droite CD est perpendiculaire à la droite AB, si les angles adjacents ADC, CDB sont égaux entre eux; et, dans ce cas, chacun de ces angles s'appelle *angle droit*.

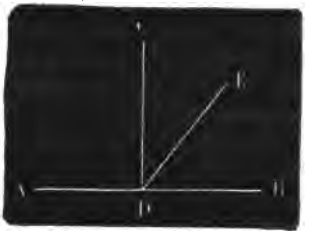


FIG. 9.

36. Angle droit. — On nomme donc *angle droit* un angle dont un des côtés est perpendiculaire à l'autre.

Pour abréger, on dit souvent un *droit*, *deux droits*, au lieu de un *angle droit*, deux *angles droits*.

37. Oblique. — L'*oblique* est une droite qui en rencontre

une autre en formant avec elle deux angles adjacents inégaux. Ainsi, DE (*fig.* 9), formant avec AB deux angles, EDA, EDB, inégaux entre eux, est oblique à AB. Le point D est le *pied* de la perpendiculaire ou de l'oblique.

38. Angle aigu, angle obtus. — Un angle est dit *aigu* ou *obtus*, selon qu'il est plus petit ou plus grand qu'un angle droit. L'angle EDB (*fig.* 9) est aigu, l'angle EDA est obtus.

39. Angles complémentaires, angles supplémentaires. — Deux angles sont dits *complémentaires* lorsque leur somme vaut un angle droit. On les appelle *supplémentaires*, si leur somme vaut deux angles droits. Ainsi (*fig.* 9), les angles CDE et EDB, dont la somme vaut l'angle droit CDB, sont *complémentaires*. Les angles ADE et EDB, dont la somme est égale à celle des deux droits ADC et CDB, sont *supplémentaires*.

40. Angles opposés par le sommet. — Deux angles sont *opposés par le sommet* lorsque les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre.

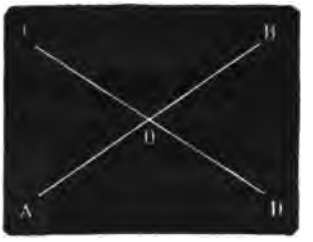


FIG. 10.

FIG. 10 *bis*.

Deux droites AB, CD qui se coupent forment quatre angles opposés, deux à deux, par le sommet. Les angles AOC et BOD sont opposés par le sommet ; il en est de même des angles COB et AOD.

41. Bissectrice d'un angle. — On appelle *bissectrice* d'un angle ABC la droite BD qui, menée par son sommet, divise cet angle en deux parties égales $1 = 1'$ (*fig.* 10 *bis*).

THÉORÈME

42. — *Par un point d'une droite passe une perpendiculaire à cette droite, et il n'en passe qu'une.*

Soit le point C de la droite AB. Considérons une droite mobile CD passant par le point C. Si nous supposons que la droite CD, d'abord appliquée sur CB, se relève, en tournant autour du point C, dans le sens de la flèche, il arrivera que l'angle DCB, d'abord nul, croîtra d'une manière continue, tandis que l'angle adjacent DCA décroîtra d'une manière continue. Il y aura donc une position EC, de la droite mobile, pour laquelle ces deux angles seront égaux, et alors EC sera perpendiculaire sur AB.

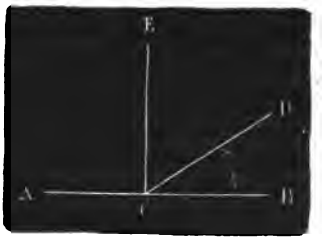


FIG. 11.

D'ailleurs, si EC s'écarte de cette position, les deux angles cessent d'être égaux, donc EC est la seule perpendiculaire au point C de la droite AB. Ce qu'il fallait démontrer.

43. Corollaire. — *Tous les angles droits sont égaux.*

Soient les deux angles droits A et A'.

Transportons, *par la pensée* [1], l'angle A' sur l'angle A, de manière que A'C' coïncide avec AC et que le point A' soit au point A. Alors la perpendiculaire A'B' coïncidera avec la perpendiculaire AB, puisque par un point d'une droite on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire à cette droite. Donc les deux angles droits A et A' coïncideront également : donc ils sont égaux. C. q. f. d.

FIG. 12.

44. Remarque. — L'angle droit étant une grandeur invariable a été adopté pour *unité d'angle.*

THÉORÈME

45. — *Les angles adjacents formés par deux droites concourantes sont supplémentaires.*

Soient les angles adjacents ACD, DCB formés par les deux droites AB, DC.

Si l'on élève au point C la perpendiculaire CE à la droite AB, on a

$$\text{ACD} = 1 \textit{ droit} + \text{ECD}$$
$$\text{DCB} = 1 \textit{ droit} - \text{ECD}$$

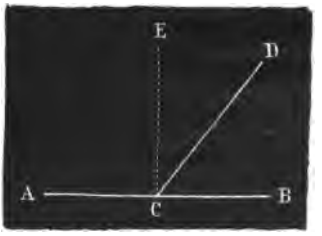


FIG. 13.

En ajoutant ces deux égalités, membre à membre, l'angle ECD disparaît, et il vient

$$\text{ACD} + \text{DCB} = 2 \textit{ droits}.$$ C. q. f. d.

46. Corollaire I. — *Si l'un des angles adjacents est droit, l'autre l'est aussi.*

47. Corollaire II. — *Si une droite est perpendiculaire à une autre droite, réciproquement, celle-ci est perpendiculaire à la première.*

Soit CD perpendiculaire à AB : l'angle AFC est droit, donc son adjacent AFD est droit aussi (46), et par suite AB est perpendiculaire à CD.

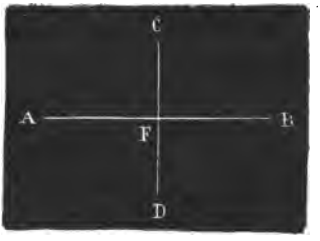


FIG. 14.

1. A l'avenir, nous sous-entendrons cette expression.

48. Corollaire III. — *La somme de tous les angles formés autour d'un point et du même côté d'une droite est égale à deux angles droits.*

Soient les angles 1, 2, 3, 4 formés autour du point C et du même côté de la droite AB.

Il est évident que la somme de tous ces angles est égale à la somme des deux angles adjacents ACD, DCB, c'est-à-dire à deux droits.

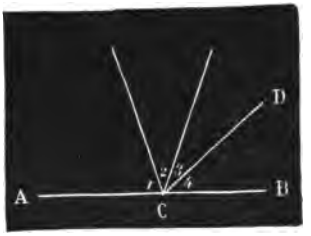


FIG. 15.

49. Corollaire IV. — *La somme de tous les angles formés autour d'un même point est égale à quatre angles droits.*

Soient le point O et différents angles formés autour de ce point. Si l'on prolonge AO, par exemple, la droite OF divise l'angle COD, mais la somme des angles reste la même. Or, la somme de tous les angles situés au-dessus de la droite AOF vaut deux angles droits, celle des angles situés au-dessous vaut également deux angles droits. Donc la somme des angles formés autour du point O est égale à quatre angles droits.

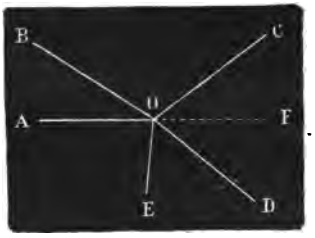


FIG. 16.

THÉORÈME (*réciproque*).

50. — *Deux angles adjacents supplémentaires ont leurs côtés extérieurs en ligne droite.*

Soient les angles adjacents supplémentaires ACD, DCB, dont les côtés extérieurs sont AC, CB.

Si l'on prolongeait AC, la droite ainsi obtenue formerait avec DC un angle qui serait le supplément de ACD, cet angle serait donc égal à DCB. Donc le prolongement de AC se confond avec CB, et ACB est une ligne droite. C. q. f. d.

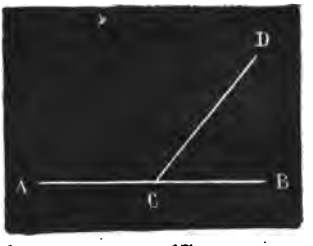


FIG. 17.

THÉORÈME

51. — *Les angles opposés au sommet sont égaux* (*fig.* 18).

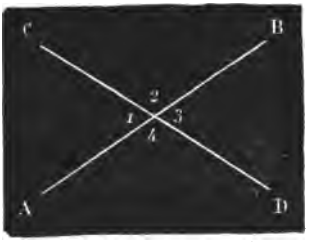


FIG. 18.

En effet, les deux angles 1 et 3 sont égaux, car l'un et l'autre sont

supplémentaires du même angle 2 : on prouverait de même l'égalité des angles 2 et 4.

THÉORÈME (*réciproque*).

52. — ***Lorsque deux droites font avec une troisième droite et de chaque côté de celle-ci des angles égaux entre eux, les deux premières droites sont le prolongement l'une de l'autre.***

Soient les droites AO, OB qui font de chaque côté de CD les angles égaux 1 et 3.

Montrons que OA et OB sont le prolongement l'une de l'autre.

En effet, le prolongement de AO fait avec OD un angle 3 égal à l'angle 1 (53) : donc le prolongement de AO se confond avec OB, et, par suite, AOB est une ligne droite.

FIG. 19.

53. Corollaire. — ***Les bissectrices des quatre angles formés par deux droites concourantes sont deux à deux en lignes droites, et ces deux droites sont perpendiculaires l'une à l'autre.***

Soient les droites OM, ON bissectrices des angles AOB, COD formés par les droites concourantes AD, BC.

Les angles 1 et 2 sont égaux comme moitié d'angles égaux ; par suite ON est le prolongement de OM (52). On voit de même que OF est le prolongement de OE. Enfin, l'angle EOM est droit puisqu'il est formé de la somme des moitiés des deux angles supplémentaires AOC, AOB.

FIG. 20.

CHAPITRE II

Triangles. — Triangle isocèle. Cas d'égalité des triangles.

§ I. — TRIANGLES

Définition et propriétés générales.

54. — On appelle *triangle* une portion de plan limitée par trois droites qui se coupent deux à deux.

Ces droites sont les *côtés* du triangle.

Les trois angles qu'elles déterminent en sont les *angles* et les sommets de ces angles sont les *sommets* du triangle.

Un triangle est *équilatéral*, s'il a ses trois côtés égaux (*fig.* 22);

il est *isocèle*, s'il a deux côtés égaux (*fig.* 21), et *scalène*, s'il a ses trois côtés inégaux (*fig.* 24).

Un triangle est dit *rectangle* quand il a un angle droit (*fig.* 23). Le côté BC, opposé à l'angle droit A, se nomme *hypoténuse*.

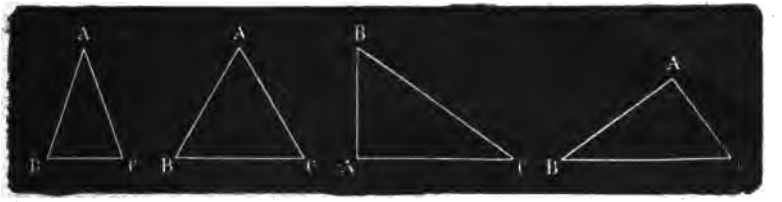


FIG. 21. FIG. 22. FIG. 23. FIG. 24.

La *hauteur* de tout triangle est la perpendiculaire menée d'un sommet sur le côté opposé, qui prend le nom de *base*.

Dans le triangle isocèle, on appelle généralement base le côté *inégal* aux deux autres.

On nomme *médiane* une droite qui joint un sommet du triangle au milieu du côté opposé.

§ II. — TRIANGLE ISOCÈLE

THÉORÈME

55. — *Dans un triangle isocèle les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.*

Soit le triangle isocèle ABC (*fig.* 25)

Si AB = AC, on a B = C.

Pour le prouver, menons la bissectrice AD qui tombe en un point D de BC, nous formons ainsi les deux triangles ADB, ADC; retournons le triangle ABD autour de AD comme charnière; à cause de l'égalité des angles 1 = 1′, le côté AB prend la direction AC, et comme il lui est égal, le point B tombe au point C. — Le point D n'ayant pas bougé, puisqu'il appartient à la charnière, DB s'applique sur DC et l'angle B coïncide avec l'angle C, donc B = C.

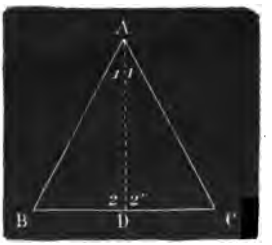


FIG. 25.

56. Corollaire I. — *Dans un triangle isocèle, la bissectrice* AD *jouit de trois propriétés : elle partage le triangle donné en deux triangles égaux ; elle est perpendiculaire à la base; elle est médiane* (*fig.* 25).

En effet, on vient de montrer que les triangles ABD et ADC, coïncidant dans toute leur étendue, sont égaux. D'autre part, à cause de l'égalité des angles adjacents 2 = 2′, la droite AD est perpendiculaire à BC; de plus elle est médiane, puisque BD = DC.

57. Corollaire II. — *Un triangle équilatéral est aussi équiangle.*

THÉORÈME (*réciproque*).

58. — *Si un triangle a deux angles égaux, les côtés opposés à ces angles sont égaux et le triangle est isocèle.*

Si dans le triangle ABC les angles B et C sont égaux, les côtés AB et AC sont aussi égaux (fig. 26).

Pour le démontrer, retournons le triangle ABC en A'C'B'; et faisons glisser A'C'B' sur le triangle ABC, de façon que le côté B'C' tombe sur le côté égal BC, C' en B et B' en C, et que les triangles soient placés du même côté commun BC.

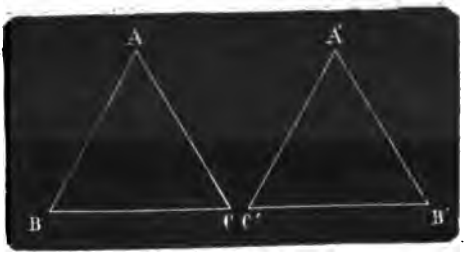


FIG. 26.

Comme l'angle C' qui coïncidait avec C est, par hypothèse, égal à B, le côté C'A' prendra la direction BA, de même l'angle B' qui d'abord coïncidait avec B, étant égal à C, le côté B'A' prendra la direction CA, et le point A' tombera à la fois sur CA et BA, c'est-à-dire au point A. Il s'ensuit que A'B' qui d'abord coïncidait avec AB, coïncide maintenant avec AC : Donc AB = AC. C. Q. F. D.

Remarque. — Cette démonstration met en évidence cette propriété du triangle isocèle, d'être *superposable* à lui-même par retournement.

59. Corollaire. — *Un triangle équiangle est aussi équilatéral.*

§ III. — CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES

Il y a *trois cas* principaux d'égalité des triangles.

THÉORÈME

60. 1er cas. — *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.*

Si dans les triangles ABC, A'B'C', on a

BC = B'C', B = B', C = C', ces deux triangles sont égaux.

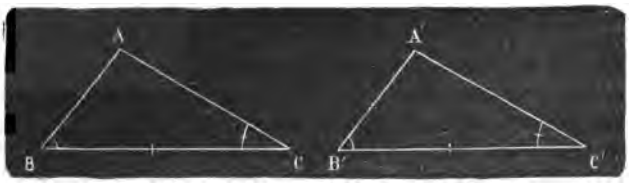


FIG. 27.

En effet, portons le triangle A'B'C' sur ABC, de manière que le côté B'C' soit sur son égal BC, le point B' au point B et le point C' au point C. L'angle B' étant égal à l'angle B, le côté B'A' prendra la direction de BA et le point A' tombera quelque part sur un des

points de BA ; de même l'angle C′ étant égal à l'angle C, le côté C′A′ prendra la direction CA et le point A′ tombera sur un des points de CA ; mais le même point A′ ne peut être à la fois sur BA et sur CA sans se trouver à l'intersection de ces deux droites : donc le point A′ se confondra avec le point A et les deux triangles coïncideront dans toutes leurs parties, ils seront par conséquent égaux.

THÉORÈME

61. 2e cas. — *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.*

Si dans les triangles ABC, A′B′C′, on a

$$A = A', \; AB = A'B', \; AC = A'C',$$

ces deux triangles sont égaux.

En effet, portons le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC, de manière que le côté A′B′ soit sur son égal AB, le point A′

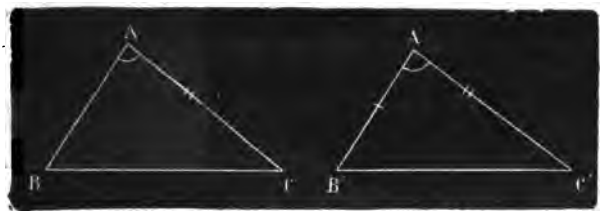


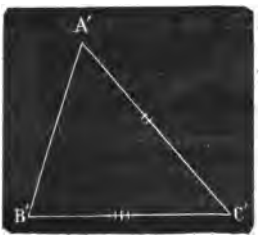
FIG. 28.

au point A, et le point B′ au point B. L'angle A′ étant égal à l'angle A, le côté A′C′ prendra la direction de AC, et comme ces deux côtés sont égaux, le point C′ tombera au point C : les deux côtés A′C′ et AC ayant mêmes extrémités, coïncideront, et par conséquent les deux triangles A′B′C′ et ABC coïncideront également et seront égaux.

THÉORÈME

62. 3e cas. — *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.*

Si dans les triangles ABC, A′B′C′, on a AB = A′B′, AC = A′C′, BC = B′C′, ces deux triangles sont égaux.



En effet, portons le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC de façon que B′C′ coïncide avec le côté égal BC, et par retournement, faisons en

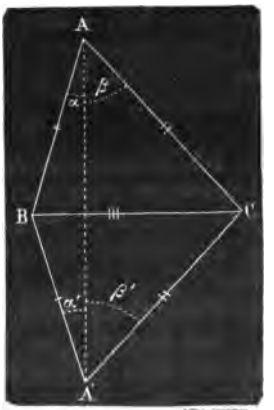


FIG. 29.

on pourrait ajouter ce cas d'égalité : "Si 2 angles sont égaux, ainsi que les côtés opposés à ces angles égaux, les triangles sont égaux." (Peut se démontrer après n° 64) à A′ et B′ par ex. : appliquer B′C′ sur BC ; B′A′ prend la direct. de BA ; C′A′ ne peut prendre la direct. de CA : autrement A′ différerait de A à cause du n° 66.

sorte que les deux angles BAC, BA″C soient de chaque côté de BC. Joignons AA″. On a deux triangles isocèles ABA″ et ACA″, car AB = A″B et AC = A″C. — Comme dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux, $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$; l'angle A = A″ comme somme d'angles égaux.

$A = \alpha + \beta = \alpha' + \beta' = A''$. On est ainsi ramené au 2e cas d'égalité, donc les deux triangles sont égaux.

Remarque. — D'après les théorèmes précédents, on voit que dans les triangles égaux les côtés égaux sont opposés aux angles égaux, et réciproquement : ainsi, BC égalant B′C′, on a A = A′, etc.

APPLICATION DES CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES

63. Définition. — On appelle angle extérieur d'un triangle tout angle formé par un côté CA de ce triangle et le prolongement d'un côté BC adjacent à ce côté CA.

Exemple. — L'angle ACD est un angle extérieur au triangle ABC. Il est supplémentaire de l'angle intérieur ACB (*fig.* 30).

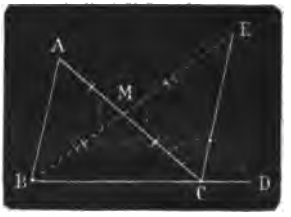


FIG. 30.

THÉORÈME

64. *Tout angle extérieur d'un triangle est plus grand que chacun des angles du triangle qui ne lui est pas adjacent.*

Nous voulons prouver que l'angle ACD est plus grand que A ou que B. — Menons la médiane BM, prolongeons-la en ME, faisant ME = BM, joignons CE. — Les deux triangles ABM, CEM sont égaux comme ayant les angles en M égaux compris entre côtés égaux chacun à chacun. L'angle C opposé à ME est égal à l'angle A opposé à BM. — Mais MCE est une partie de ACD, donc $\widehat{ACD} > A$.

Pour démontrer que ACD est plus grand que B on joindrait A au milieu de BC et l'on ferait une construction analogue à la précédente.

THÉORÈME

65. — *A deux côtés inégaux d'un triangle sont opposés des angles inégaux; au plus grand côté est opposé le plus grand angle.*

Soit dans le triangle ABC, AB > AC, on aura ACB > ABC.

Prenons AD = AC, et menons DC.

Les angles α et α' dans le triangle isocèle DAC sont égaux. L'angle ACB est plus grand que α et α'.

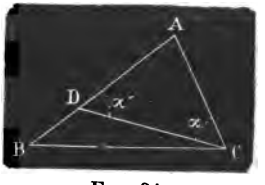


FIG. 31.

L'angle α' extérieur au triangle BDC est plus grand que B, *a fortiori* l'angle ACB > ABC.

66. Réciproquement. — *A deux angles inégaux d'un triangle sont opposés deux côtés inégaux; au plus grand angle est opposé le plus grand côté.*

Soit dans le triangle ABC, $C > B$; on aura $AB > AC$, car pour $AB < AC$ ou $AB = AC$, l'angle C serait plus petit ou égal à B, ce qui serait contre l'hypothèse.

THÉORÈME

67. — *Dans tout triangle, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence.*

FIG. 32.

Ainsi dans le triangle ABC, on a :

$1°\ BC < AB + AC;$

$2°\ AC > BC - AB.$

1° En effet, prolongeons BA d'une longueur $AD = AC$. — Joignons DC.

ADC est isocèle ; l'angle $D = \widehat{ACD}$ et est moindre que $\widehat{BCD}$.

Donc, dans le triangle total BCD, BC opposé à l'angle D est moindre que BD opposé à $\widehat{BCD}$,

mais $BD = BA + AC.$

Donc $BC < AB + AC.$

2° Si l'on retranche AB à chaque membre de cette inégalité, il vient

$$BC - AB < AC,$$

ou $$AC > BC - AB.$$ C. Q. F. D.

Corollaire. — La ligne droite BC est plus courte que la ligne brisée $BA + AC$ qui aboutit à ses extrémités.

THÉORÈME

68. — *Si l'on joint un point pris dans l'intérieur d'un triangle aux extrémités d'un côté, la somme des droites enveloppées est moindre que la somme des droites enveloppantes.*

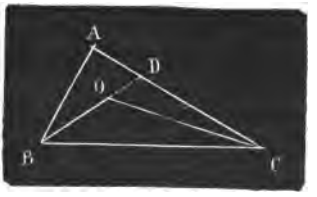


FIG. 33.

Ainsi dans le triangle ABC, on a

$$OB + OC < AB + AC.$$

En effet, si l'on prolonge BO jusqu'à la rencontre du côté AC, on a, dans les triangles ABD et OCD,

$$OB + OD < AB + AD$$

et $$OC < OD + DC.$$

Ajoutant ces inégalités membre à membre, il vient

$$OB + OD + OC < AB + AD + OD + DC.$$

Si l'on retranche OD de part et d'autre, on obtient

$$OB + OC < AB + AD + DC,$$

ou enfin

$$OB + OC < AB + AC,$$

car

$$AD + DC = AC.$$

69. Corollaire. — *Toute ligne brisée convexe est moindre qu'une ligne brisée qui l'enveloppe de toutes parts.*

Soient les lignes brisées EFGHI, ABCD.

Si l'on prolonge, dans le même sens, les côtés de la première jusqu'à leur rencontre avec ceux de la seconde, on a les inégalités suivantes :

$$EF + FK < EP + PA + AK$$
$$FG + GL < FK + KB + BL$$
$$GH + HM < GL + LC + CM$$
$$HI + IN < HM + MN$$
$$IE + EP < IN + ND + DP$$

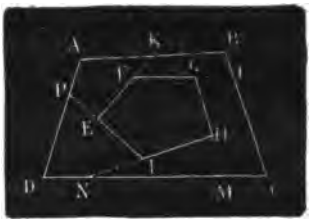


FIG. 33 *bis*.

Ajoutant ces inégalités membre à membre, et retranchant les termes communs de part et d'autre, il reste, après réduction faite,

$$EF + FG + GH + HI + IE < AB + BC + CD + DA$$

THÉORÈME

70. — *Si deux triangles ont un angle inégal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, les troisièmes côtés sont inégaux et le plus grand correspond au plus grand angle.*

Soient les deux triangles ABC, A'B'C', dans lesquels on a $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $BAC > A'$.

Il faut démontrer que l'on a aussi $BC > B'C'$ (*fig.* 34).

Pour le prouver, plaçons le triangle A'B'C' sur le triangle ABC, de manière que le côté A'B' coïncide avec son égal AB. L'angle A' étant plus petit que l'angle BAC, le côté A'C' prendra dans l'intérieur de l'angle BAC la position AC'', et le côté B'C' deviendra BC''. Il suffit donc maintenant de démontrer que BC est plus grand que BC''. Pour cela, menons la bissectrice AD de l'angle CAC''. Les deux triangles ADC, ADC'' ont, par construction et d'après nos hypothèses, un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun : ces deux triangles sont donc égaux et DC'' est égal à DC. Mais le triangle BDC'' donne

$$BD + DC'' > BC''.$$

Remplaçant DC'' par DC, sa valeur, il vient :

$$BD + DC \text{ ou } BC > BC''$$

et, par suite,

$$BC > B'C'.$$

Réciproquement. — *Si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun et les troisièmes côtés inégaux, les angles opposés à ces troisièmes côtés sont aussi inégaux et le plus grand de ces angles est opposé au plus grand côté* (*fig.* 34).

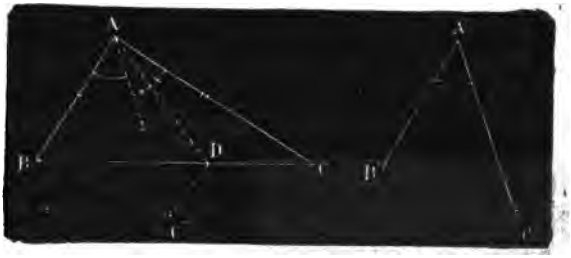


FIG. 34.

En effet, soit
AB = A′B′,
AC = A′C′,
mais BC > B′C′ :
l'angle A ne peut être égal à A′, car BC égalerait B′C′ (61) de même, l'angle A ne peut être plus petit que A′, car, d'après le théorème, BC serait moindre que B′C′, donc on a : A > A′.

CHAPITRE III

Perpendiculaires et obliques. — Cas d'égalité des triangles rectangles.

---

§ I. — PERPENDICULAIRES ET OBLIQUES

THÉORÈME

71. — *D'un point extérieur à une droite :*

1° *On peut mener une perpendiculaire à cette droite ;*

2° *On ne peut en mener qu'une.*

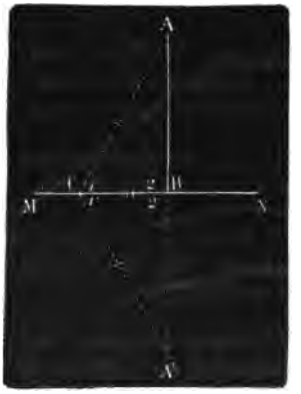


FIG. 35.

1° D'un point A, extérieur à la droite MN, on peut mener une perpendiculaire à cette ligne.

Faisons tourner la partie supérieure du plan AMN autour de MN comme charnière. Le point A occupera la position A′ quand la partie supérieure du plan viendra coïncider avec la partie inférieure. La droite AA′, qui joint les deux points, rencontre la droite MN au point B. Après la rotation, la demi-droite BA coïncide avec la

demi-droite BA', puisque ces demi-droites ont deux points communs. L'angle ABC coïncide avec l'angle A'BC. Ces angles étant égaux, BC est perpendiculaire à AA'. Réciproquement, AA' est perpendiculaire à BC.

2° AB est *la seule* perpendiculaire qu'on puisse mener du point A à la droite MN.

Une autre droite quelconque AC ne saurait être perpendiculaire à MN (*fig.* 36).

FIG. 36.

En effet, la rotation fait voir que les angles ACB et A'CB sont égaux. S'ils étaient droits, ils seraient supplémentaires et leurs côtés AC, A'C seraient en ligne droite, ce qui est contre l'hypothèse ; donc AA' est la seule perpendiculaire qu'on puisse abaisser de A sur MN.

72. Définition. — Deux points sont dits *symétriques* par rapport à une droite, lorsque cette droite est perpendiculaire au milieu de celle qui joint les deux points. Ainsi, les points A, A' sont symétriques par rapport à MN (*fig.* 36).

THÉORÈME

73. — *Si d'un point, pris hors d'une droite, on mène une perpendiculaire et différentes obliques :*

1° *La perpendiculaire est plus courte que toute oblique ;*

2° *Deux obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales ;*

3° *Deux obliques, qui s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, sont inégales et la plus longue est celle qui s'en écarte le plus.*

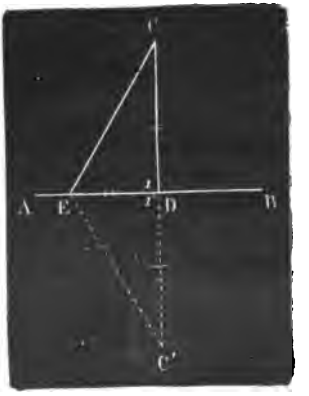


FIG. 37.

1° Si je mène du point C la perpendiculaire CD et l'oblique CE à la droite AB, j'aurai CD $<$ CE.

En effet, je prolonge CD d'une longueur DC′ = DC, et je joins C′E. Les deux triangles DCE, DC′E sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. Savoir : l'angle droit 1 égal à l'angle droit 1′, le côté DE commun et DC = DC′ par construction : donc CE = C′E.

Mais la ligne droite CC′ est plus courte que la ligne brisée CE + EC′ : donc CD, ou moitié de la ligne droite, sera moindre que CE, ou moitié de la ligne brisée.

2° Si je prends de chaque côté de la perpendiculaire CD des longueurs égales DE, DF, et que je mène les obliques CE, CF, j'aurai CE = CF.

FIG. 38.

En effet, les deux triangles DCE, DCF ont un angle droit compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, donc ils sont égaux, et, par suite, le côté CE, opposé à l'angle droit 1, est égal au côté CF, opposé à l'angle droit 1′.

3° Si je prends la distance DE plus grande que la distance DF et que je mène les obliques CE, CF, j'aurai CE > CF.

En effet, je fais DH = DF et je joins CH; puis je prolonge CD d'une longueur DC′ = DC, et enfin je tire C′H, C′E.

Les droites C′H, C′E sont respectivement égales aux droites CH, CE comme obliques s'écartant également du pied D de la perpendiculaire AD à CC′. Mais (57) CH + HC′ est moindre que CE + EC′ : donc CH, ou moitié de la première somme, est moindre que CE, ou moitié de la seconde somme; et (2°) puisque CF = CH, on a enfin CF < CE ou CE > CF. C. q. f. d.

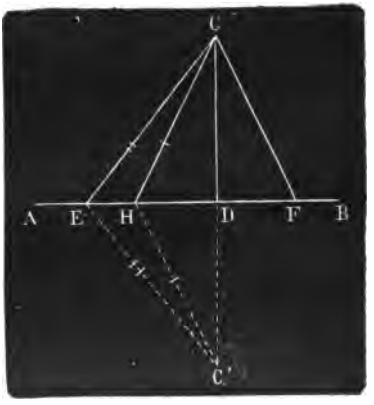


FIG. 39.

74. Corollaire I. — *La perpendiculaire abaissée d'un point sur une droite mesure la distance de ce point à la droite;* car elle est plus courte que toute oblique.

75. Corollaire II. — *D'un point pris hors d'une droite on ne peut mener à cette droite que deux obliques égales;* car une troisième droite partant du même point serait plus rapprochée ou plus éloignée

que les deux premières du pied de la perpendiculaire, et serait par conséquent inégale à ces deux premières.

76. Remarque. — Les reciproques des différentes parties du théorème sont vraies et faciles à démontrer. Par exemple : *Deux obliques égales s'écartent également du pied de la perpendiculaire.*

En effet, si elles ne s'écartaient pas également, elles seraient inégales, ce qui serait contre l'hypothèse.

THÉORÈME

77. — 1° *Tout point d'une perpendiculaire élevée au milieu de la droite qui joint deux points est à égale distance de ces deux points;*

2° *Tout point hors de la perpendiculaire en est à inégale distance.*

Soit la perpendiculaire DK élevée au milieu D de AB.

FIG. 40.

1° Le point C est sur la perpendiculaire. Si AD = DB, les deux obliques CA, CB, s'écartent également du pied de la perpendiculaire : donc elles sont égales.

2° Le point E est hors de la perpendiculaire : AE sera plus grand que EB.

Pour le démontrer, menons par le point F, où AE rencontre la perpendiculaire, la droite FB. Nous avons BF + FE > EB, mais BF = AF : donc on a AF + FE > EB, ou enfin AE > EB.

Remarque. — La perpendiculaire CD élevée sur le milieu de AB est la *médiatrice* de AB.

78. Corollaire. — *Les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle sont concourantes.*

Soit le triangle ABC. Menons sur les milieux de AB et de AC les perpendiculaires OD, OE : nous aurons OA = OB et OA = OC, d'où OB = OC; donc le point O se trouve sur la perpendiculaire élevée au milieu de BC. Donc enfin les trois perpendiculaires sont concourantes.

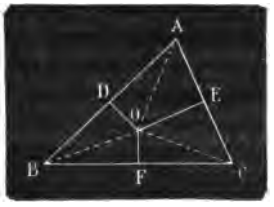


FIG. 41.

79. Remarque. — Les *réciproques* des deux parties du théorème sont vraies et faciles à démontrer. Par exemple : *Tout point qui est à égale distance des extrémités d'une droite est sur la perpendiculaire élevée au milieu de cette droite.* En effet, s'il n'était pas sur la perpendiculaire, il se trouverait à inégale distance des extrémités de la droite, ce qui serait contre l'hypothèse.

§ II. — CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES RECTANGLES

THÉORÈME

80. — *Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal.*

Soient les deux triangles ABC, A'B'C' rectangles en A, A' et dans lesquels BC = B'C' et C = C'.

Je dis que ces deux triangles sont égaux.

En effet, portons le triangle A'B'C' sur ABC, de manière que le côté B'C' soit sur son égal BC, le point B' au point B et le point C' au point C. L'angle C' étant égal à l'angle C, le côté C'A' prendra la direc-

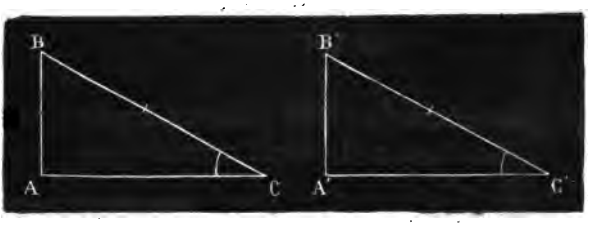


FIG. 42.

tion de CA. Mais alors, du même point B, on a BA et B'A' perpendiculaires sur CA : ces deux côtés coïncideront donc, sans quoi on pourrait abaisser d'un même point deux perpendiculaires distinctes à une même droite. Les trois côtés coïncidant, les deux triangles sont égaux

THEOREME

81. — *Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal.*

Soient les deux triangles ABC, A'B'C' rectangles en A, A' et dans lesquels

$$BC = B'C' \text{ et } AB = A'B'.$$

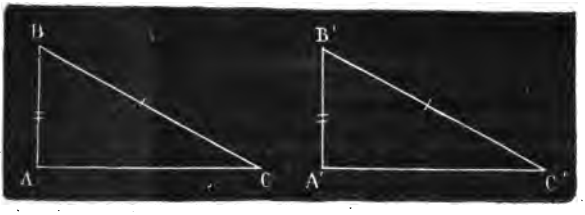


FIG. 43.

Je dis que ces deux triangles sont égaux.

En effet, portons le triangle A'B'C' sur ABC, de manière que le côté A'B' soit sur son égal AB, le point A' au point A et le point B' au point B. Les angles A et A' étant égaux comme droits, le côté A'C' prendra la direction du côté AC; mais le point B' étant au point B, les deux hypothénuses B'C' et BC deviennent alors deux obliques à AC; comme elles sont égales et qu'elles partent du même point B, elles s'écartent également du pied de la perpendiculaire AB, et par suite A'C' = AC. Donc, les deux triangles sont égaux, puisqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.

82. Corollaire. — *Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun.*

CHAPITRE IV

Lieu géométrique des points équidistants des deux droites courantes.

83. Définition. — On appelle *lieu géométrique* ou simplement *lieu* l'ensemble de tous les points jouissant d'une propriété commune à l'exclusion de tout autre point du plan.

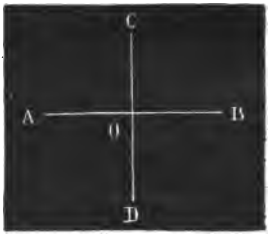


FIG. 44.

Ainsi, le lieu des points équidistants de deux points donnés A et B est la perpendiculaire CD élevée sur le milieu O de la droite AB qui joint ces deux points, car tout point de CD jouit, à l'exclusion de tout autre, de la propriété d'être également distant des points A et B

THÉORÈME

84. — *La bissectrice d'un angle est le lieu des points équidistants des côtés de cet angle.*

Soit la droite BD bissectrice de l'angle ABC.

1° Tout point O pris sur la bissectrice BD est équidistant des côtés AB et BC.

En effet, abaissons sur les côtés AB et BC les perpendiculaires OE, OF qui mesurent les distances du point O à ces côtés. Les deux triangles rectangles BOE, BOF ont l'hypothénuse OB commune et les angles aigus en B égaux, donc ils sont égaux et OE = OF.

FIG. 45.

2° Tout point P pris hors de la bissectrice est inégalement distant des côtés AB et BC.

En effet, abaissons sur les côtés AB, BC les perpendiculaires PH, PI, et du point G, où la perpendiculaire PH rencontre la bissectrice, menons à BC la perpendiculaire GL, puis joignons PL. Le triangle GPL donne PL $<$ PG $+$ GL, et en remplaçant GL par GH, sa valeur, il vient PL $<$ PG $+$ GH ou PL $<$ PH, ou enfin PI $<$ PH; car la penpendiculaire PI est plus courte que l'oblique PL.

85. Remarque I. — Lorsque l'angle ABC est obtus, il peut arriver dans le second cas qu'une des perpendiculaires aille rencontrer un des côtés hors de l'angle. On a encore PI $<$ PH; car la perpendiculaire PI étant plus courte que l'oblique PS, on a *a fortiori* PI $<$ PH.

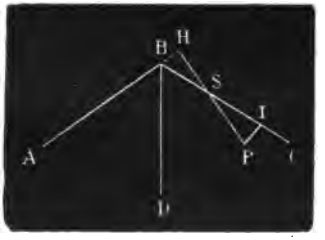


FIG. 46.

86. Remarque II. — Les réciproques des deux parties du théorème sont vraies et faciles à démontrer. Par exemple : *Tout point équidistant des deux côtés d'un angle est sur la bissectrice de cet angle.*

En effet, s'il n'était pas sur cette bissectrice, il serait inégalement distant des deux côtés de l'angle, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

THÉORÈME

87. — *Le lieu des points équidistants de deux droites concourantes se compose des bissectrices des angles formés par ces droites.*

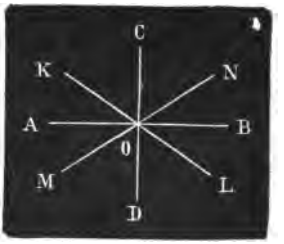


FIG. 47.

Soient, en effet, les deux droites KL, MN qui se coupent au point O. Dans l'intérieur de l'angle KOM, le lieu est la bissectrice OA de l'angle KOM. Il en est de même pour chacun des autres angles KON, NOL, LOM. Donc le lieu des points équidistants des droites KL, MN se compose des bissectrices des quatre angles formés par ces droites. Ces bissectrices sont d'ailleurs perpendiculaires l'une à l'autre (53).

THÉORÈME

88. — ***Les bissectrices des trois angles d'un triangle concourent au même point.***

Soit le triangle ABC. Je mène les bissectrices des angles A et B, et, du point de rencontre O, j'abaisse les perpendiculaires OD, OE, OF sur les trois côtés. Le point O étant sur les bissectrices des angles A et B, OE = OF = OD, donc le point O est aussi sur la bissectrice de l'angle C. Donc enfin les trois bissectrices concourent au même point.

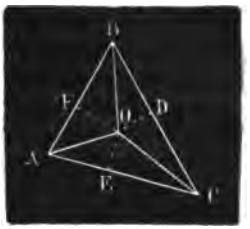


FIG. 48.

APPLICATION I. — PROBLÈME

89. — ***Une droite*** MN ***et deux points*** A ***et*** B ***étant donnés, trouver sur*** MN ***un point*** C ***situé à égale distance de*** A ***et de*** B.

Je joins A et B par une droite; au point O, milieu de AB, j'élève une perpendiculaire jusqu'à la rencontre en C de la droite MN.

La perpendiculaire OC est le lieu des points également distants de A et de B, le point C appartenant à ce lieu est donc à égale distance des points A et B.

FIG. 49.

APPLICATION II. — PROBLÈME

90. — ***Une droite*** MN ***et deux points*** A ***et*** B ***étant donnés, trouver sur*** MN ***un point*** C ***tel que la distance*** CA + CB ***soit*** **minimum** (c'est-à-dire le plus petit possible).

Il y a deux cas à considérer :

1er *cas.* Les points A et B sont de chaque côté de la droite MN.

Le point C d'intersection des droites MN et AB est le point cherché; car ABC étant une ligne droite, la somme AC + CB est *minimum*.

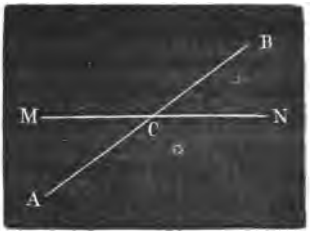


FIG. 0.

2e *cas.* Les points A et B sont situés du même côté de la droite MN.

Prenons le point A' symétrique de A par rapport à MN et joignons A'B par une droite.

Le point C, intersection des droites MN et A'B, est le point demandé.

En effet, d'après le premier cas, le *minimum* pour les points A' et B est A'C + CB; mais A'C et AC sont deux obliques égales, puisqu'elles s'écartent également du pied de la perpendiculaire MC, donc on peut remplacer A'C par AC et le *minimum* demandé pour les points A et B sera AC + CB.

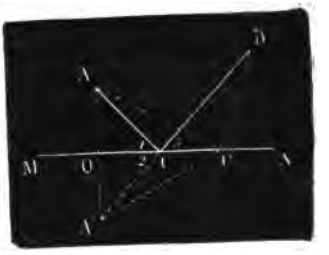


FIG. 51.

Il est du reste facile de voir que pour tout autre point C' la somme des distances aux points A et B est plus grande; car on a évidemment A'C' + C'B > A'C + CB, et, en remplaçant A'C' et A'C par leurs valeurs respectives AC' et AC, il vient AC' + C'B > AC + CB.

91. Remarque. — Les triangles OAC, OA'C sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun : les angles 1 et 2 sont donc égaux; mais l'angle 2 est égal à l'angle 3 comme lui étant opposé au sommet. Les angles 1 et 3 sont donc égaux : le premier de ces angles est appelé *angle d'incidence* et le second *angle de réflexion*.

APPLICATION III. — PROBLÈME

92. — *Une droite* MN *et deux points* A *et* B *étant donnés, trouver sur* MN *un point* C *tel que la différence* AC — BC *soit* **maximum** (c'est-à-dire la plus grande possible).

Il y a aussi deux cas à considérer :

1er *cas.* Les points A et B sont du même côté de MN.

Le point C demandé est l'intersection des droites AB et MN, car la différence des distances aux points A et B est AC — BC ou AB, tandis que pour tout point C' de MN la différence est AC' — BC', c'est-à-dire moindre que AB, puisque dans tout triangle la différence de deux côtés est moindre que le troisième (67).

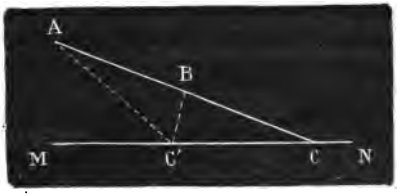


FIG. 52.

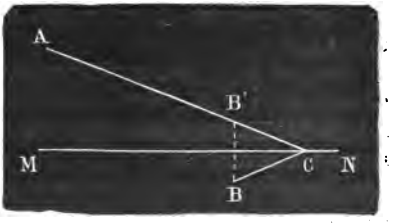


FIG. 53.

2e *cas.* Les points A et B sont de part et d'autre de MN.

Prenons le point B' symétrique de B par rapport à MN et prolon-

geons AB′ jusqu'à sa rencontre en C avec MN. Le point C est le point cherché.

En effet, d'après le premier cas, le *maximum* pour les points A et B′ est AC — B′C, mais B′C et BC sont deux obliques égales, on peut donc remplacer B′C par BC et le *maximum* demandé sera AC — BC.

CHAPITRE V

Droites parallèles

93. Définition. — On appelle *parallèles* des droites qui, situées dans un même plan, ne peuvent se rencontrer, à quelque distance qu'on les prolonge.

THEOREME

94. — *Deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles.*

Les droites AB, CD, perpendiculaires à EF, sont parallèles; car si elles n'étaient pas parallèles, suffisamment prolongées, elles se rencontreraient en un point quelconque O; mais alors de ce point on aurait deux perpendiculaires à la même droite EF, ce qui est impossible. Donc les droites AB, CD, perpendiculaires à la même droite EF, sont parallèles.

FIG. 54.

THÉORÈME

95. — *Par un point situé hors d'une droite passe une parallèle à cette droite.*

Soit le point A extérieur à la droite BC.

Du point A j'abaisse la perpendiculaire AD sur BC, et au même point A je mène AE perpendiculaire sur AD. Les deux droites BC et AE, étant perpendiculaires à une troisième AD, sont parallèles (94).

FIG. 55.

POSTULATUM D'EUCLIDE. — *On admet comme évident que du point A on ne peut mener qu'une seule parallèle à BC.*

96. Corollaire. — *Lorsque deux droites sont parallèles, toute autre droite qui rencontre l'une en un point rencontre aussi l'autre.*

Soient les parallèles AB, CD et la droite EF qui rencontre CD au point O, je dis qu'elle rencontrera aussi AB, car par le point O on ne peut mener que la seule parallèle CD à AB.

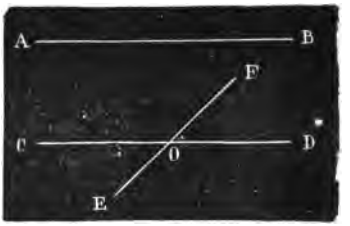


FIG. 56.

THÉORÈME

97. — *Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.*

Soient les droites AB, CD respectivement parallèles à une troisième MN. Je dis que les deux premières sont parallèles entre elles.

En effet, si elles n'étaient pas parallèles, suffisamment prolongées, elles se rencontreraient en un point quelconque O, mais alors de ce point on aurait deux parallèles à la même droite MN, ce qui est impossible (95).

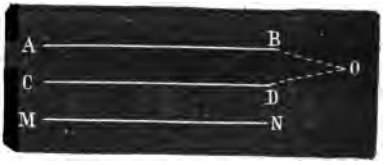


FIG. 57.

THÉORÈME

98. — *Lorsque deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre.*

Soient AB, CD deux droites parallèles et EF perpendiculaire à AB. Je dis que EF est aussi perpendiculaire à CD.

En effet, la droite EF rencontrera CD en un certain point F (96). De plus elle sera perpendiculaire à CD, car si par le point F on mène une perpendiculaire à EF, elle sera parallèle à AB (94), et, par conséquent, coïncidera avec CD (95) : donc CD est perpendiculaire à EF, et réciproquement EF l'est sur CD.

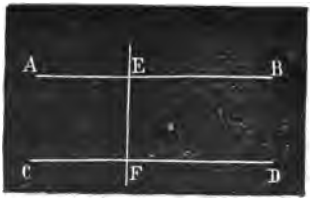


FIG. 58

99. Définitions. — Lorsque deux droites AB, CD sont coupées par une *sécante* EF, elles forment avec elle, huit angles qui ont reçu différents noms.

Les angles 1, 2, 1′, 2′, placés à l'intérieur des droites, sont dits *intérieurs* ou *internes*. Les angles 4, 3, 4′, 3′, placés à l'extérieur des droites, sont dits *extérieurs* ou *externes*.

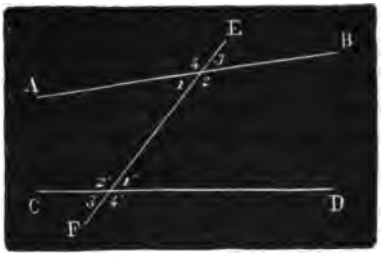


FIG. 59.

Les angles intérieurs placés de chaque côté de la sécante, mais *non adjacents*, sont appelés *alternes-internes* : les angles 1 et 1′, 2 et 2′, sont alternes-internes. Les angles extérieurs, placés de chaque côté de la sécante, mais *non adjacents*, sont appelés *alternes-externes* : les angles 4 et 4′, 3 et 3′ sont *alternes-externes*. Enfin les angles placés du même côté de la sécante, l'un à l'intérieur et l'autre à l'extérieur, mais *non adjacents*, sont dits *correspondants* : les angles 1 et 3′, 2 et 4′, 4 et 2′, 3 et 1′ sont correspondants.

THÉORÈME

100. — *Lorsque deux droites parallèles sont rencontrées par une sécante :*

1° *Les angles alternes-internes sont égaux ;*

2° *Les angles alternes-externes sont égaux ;*

3° *Les angles correspondants sont égaux ;*

4° *Les angles internes placés du même côté de la sécante sont supplémentaires ;*

5° *Les angles externes placés du même côté de la sécante sont supplémentaires.*

Les droites AB, CD sont parallèles, EF est une sécante.

1° Les angles alternes-internes 1 et 1′, 2 et 2′ sont égaux.

En effet, si par le point O, milieu de GH, nous menons KOI perpendiculaire à AB et par conséquent à CD (98), nous formerons deux triangles rectangles qui ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal, savoir : OG = OH par construction, les angles aigus en O égaux comme opposés par le sommet; donc ces deux triangles sont égaux, et par suite, l'angle 1, opposé au côté OK, est égal à l'angle 1′, opposé au côté OI.

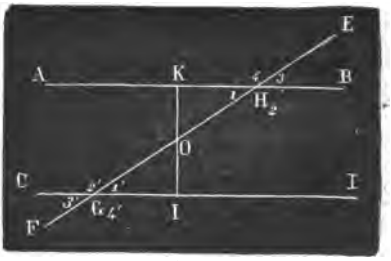


FIG. 60.

On a de même $2 = 2'$, car ces deux angles sont l'un et l'autre supplémentaires des deux angles égaux 1 et 1'.

2° Les angles alternes-externes, 3 et 3', 4 et 4' sont égaux.

En effet, 3 et 3' sont égaux, parce qu'ils sont l'un et l'autre supplémentaires des angles égaux 2 et 2' ; les angles 4 et 4', étant l'un et l'autre supplémentaires des angles égaux 1 et 1', sont aussi égaux.

3° Les angles correspondants 3 et 1' sont égaux.

Les angles 3 et 1' sont égaux, parce qu'ils sont l'un et l'autre égaux au même angle 1. On prouverait de même l'égalité des autres angles correspondants.

4° Les angles internes 1 et 2' du même côté de la sécante sont supplémentaires.

Car 1 et 2 sont supplémentaires et 2 est égal à 2'.

On prouverait de même que les angles 2 et 1' sont supplémentaires.

5° Les angles externes 3 et 4' placés du même côté de la sécante sont supplémentaires.

Car 3 et 2 sont supplémentaires et 2 est égal à 4'.

On prouverait de même que les angles 4 et 3' sont supplémentaires.

THÉORÈME (*réciproque*).

101. — *Deux droites coupées par une sécante sont parallèles lorsqu'elles forment avec la sécante :*

1° *Des angles alternes-internes égaux ;*

Ou, 2° *des angles alternes-externes égaux ;*

Ou, 3° *des angles correspondants égaux ;*

Ou, 4° *des angles internes du même côté de la sécante supplémentaires ;*

Ou, 5° *des angles externes du même côté de la sécante supplémentaires.*

Soient les droites AB, CD coupées par la sécante EF aux points G et H. Je dis que les droites AB, CD sont parallèles, si, par exemple, les angles alternes-internes 1 et 1' sont égaux.

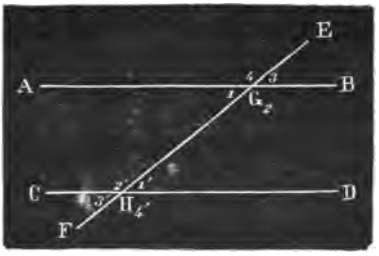


FIG. 61.

Pour le démontrer, menons par le point H une parallèle à AB. D'après la proposition directe, cette parallèle doit faire avec GH un angle égal à 1 et, par suite, égal à 1' : donc cette parallèle coïncidera avec HD et par conséquent avec CD. Donc enfin CD est parallèle à AB.

Le même raisonnement peut s'appliquer à un cas quelconque.

D'ailleurs, de l'égalité des angles 1 et 1', on déduit celle des angles 2 et 4', car l'un et l'autre sont les suppléments des deux angles égaux 1 et 1'. On déduirait de même l'égalité des angles 4 et 2', etc.

THÉORÈME

102. — *Les perpendiculaires élevées sur deux droites qui se coupent, sont concourantes.*

Soient les droites AB, CB qui se coupent en B. Je dis que les perpendiculaires, DE, FG, à ces droites sont concourantes.

En effet, si l'on tire la droite DF, on voit que les deux angles intérieurs EDF, GFD sont l'un et l'autre inférieurs à un droit : leur somme est donc moindre que deux droits, et, par suite, les perpendiculaires DE, FG sont concourantes (100).

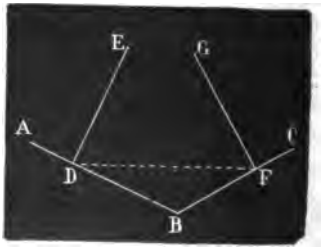


FIG. 62.

THÉORÈME

103. — *Deux angles à côtés respectivement parallèles sont égaux ou supplémentaires :*

1° *Égaux, si leurs côtés respectifs sont dirigés dans le même sens ou en sens contraire,*

2° *Supplémentaires, si deux côtés respectifs sont dirigés dans un sens et les deux autres en sens contraire.*

1° Soient les angles 1 et 3 dont les côtés OA et O'A', OB et O'B' sont respectivement parallèles et dirigés deux à deux dans le même sens : ces angles sont tous deux égaux à l'angle 2 (100), donc ils sont égaux entre eux.

Les angles 4 et 3, dont les côtés sont dirigés deux à deux en sens contraire, sont aussi égaux comme étant tous deux égaux à l'angle 1.

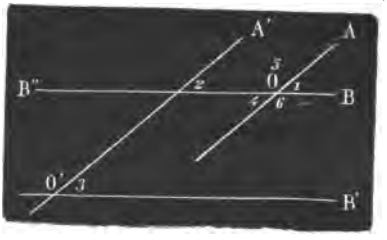


FIG. 63.

2° Les angles 5 et 3 qui ont leurs côtés respectivement parallèles, mais deux dans un sens et les deux autres en sens contraire, sont supplémentaires; car l'angle 1, supplémentaire de l'angle 5, est égal à l'angle 3. Les angles 3 et 6 sont également supplémentaires.

THÉORÈME

104. — *Deux angles à côtés respectivement perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires :*

1° *Égaux, s'ils sont l'un et l'autre aigus ou obtus,*

2° *Supplémentaires, si l'un est aigu et l'autre obtus.*

1° Soient 1 et 4 deux angles *aigus*, dont les côtés sont perpendiculaires chacun à chacun. Je dis que ces deux angles sont égaux.

En effet, si je mène, au point B, les droites BH, BK respectivement perpendiculaires sur les côtés BA, BC, ces droites seront parallèles aux côtés de l'angle 4 et comme elles sont dirigées dans le même sens, l'angle 3 sera égal à l'angle 4. Mais les angles 1 et 3 sont égaux comme étant l'un et l'autre complémentaires du même angle 2 : donc les angles 1 et 4 sont égaux.

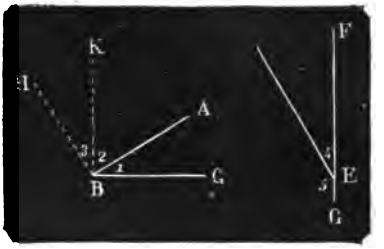


FIG. 64.

2° L'angle 5 est supplémentaire de l'angle 4, donc il est aussi supplémentaire de l'angle 1.

CHAPITRE VI

Des polygones. – Somme des angles d'un triangle et d'un polygone.

---

§ I. — DES POLYGONES.

Définitions.

105. — On appelle *polygone* une figure plane terminée de toutes parts par des droites.

Les droites AB, BC, CD..., sont les côtés du polygone; leur ensemble en constitue le contour ou *périmètre*.

Les points A, B, C..., où se rencontrent les côtés, sont les *sommets* du polygone.

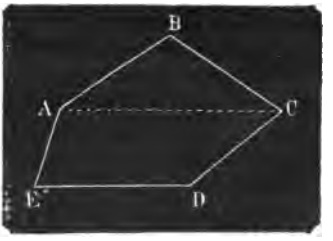


FIG. 65.

106. — On nomme *diagonale* une droite, telle que AC, qui joint deux sommets non consécutifs.

107. — Un polygone est *convexe*, quand l'un quelconque de ses côtés, prolongé indéfiniment, le laisse tout entier du même côté. Dans le cas contraire le polygone est dit *concave*. Ainsi, la figure 66 représente un polygone convexe, car un côté quelconque AB prolongé laisse bien, en effet, tout le polygone du même côté. Au contraire, la figure 67 est un polygone concave, car si l'on prolonge le côté AB, une partie de la figure se trouve d'un côté de AB et l'autre partie de l'autre côté.

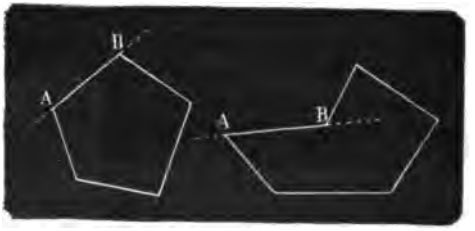


FIG. 66. FIG. 67.

Le triangle est le plus simple des polygones convexes.

On appelle *quadrilatère*, *pentagone*, *hexagone*, *heptagone*, *octogone*, *décagone*, *duodécagone*, etc., des polygones de 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, etc., côtés.

§ II. — SOMME DES ANGLES D'UN TRIANGLE ET D'UN POLYGONE

THÉORÈME

108. — *La somme des trois angles d'un triangle vaut deux angles droits.*

Soit le triangle ABC. Prolongeons BC et menons la parallèle CE à AB. Les angles 1 et 1′ sont égaux comme correspondants, les angles 2 et 2′ le sont aussi comme alternes-internes. Les trois angles du triangle sont donc égaux aux trois angles 1′, 2′ et 3; or, la somme de ces trois angles vaut deux droits, donc la somme des trois angles du triangle vaut aussi deux droits.

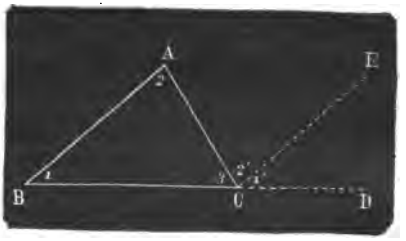


FIG. 68.

109. Corollaire I. — *Un triangle ne peut avoir qu'un seul angle droit, et à plus forte raison qu'un seul angle obtus.*

110. Corollaire II. — *Un angle d'un triangle est le supplément de la somme des deux autres.*

111. Corollaire III. — *Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.*

112. Corollaire IV. — *Lorsque deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun, le troisième angle de l'un est égal au troisième angle de l'autre.*

113. Corollaire V. — *L'angle* ACD, *extérieur au triangle, formé par le côté* AC *et le prolongement de* BC, *est égal à la somme des angles intérieurs* A *et* B, *qui ne lui sont pas adjacents* (fig. 68).

THÉORÈME

114. — *La somme des angles intérieurs d'un polygone convexe vaut autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux.*

Soit le polygone convexe ABCDEF.

Si nous joignons par des diagonales le sommet A aux sommets non adjacents, il est évident que nous décomposerons le polygone en autant de triangles qu'il a de côtés moins deux, car dans chaque triangle, ACD, il entre seulement un côté du polygone CD, excepté pour les deux triangles extérieurs ABC, AFE, qui en contiennent chacun deux. Or, la somme des angles des triangles est évidemment égale à la somme des angles du polygone, cette dernière somme est donc égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de triangles ou à autant de fois deux droits qu'il y a de côtés moins deux.

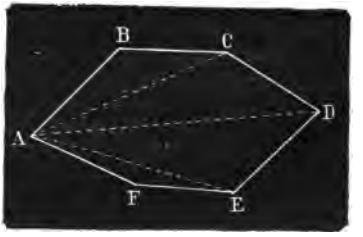


FIG. 69.

115. Corollaire I. — *La somme des angles intérieurs d'un polygone convexe de* n *côtés est* $(2n-4)$ *droits.*

En effet, un polygone convexe de n côtés se décompose en n-2 triangles, et, par suite, la somme de tous ses angles droits est égale à $2\ (n-2) = (2\,n-4)$ droits.

Si l'on joint un point intérieur O à tous les sommets du polygone, on arrive encore très facilement à la même formule; car le polygone se trouve ainsi décomposé en autant de triangles qu'il a de côtés; or, chaque triangle vaut deux droits; par suite, si leur nombre est n ils vaudront $2\ n^{dr}$; mais pour avoir la somme des

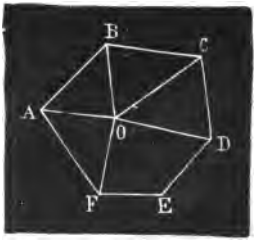


FIG. 70.

angles du polygone, il faut retrancher la somme des angles en O ou 4 droits. La somme des angles du polygone sera donc encore : $2\,n^{dr} - 4^{dr}$ ou $(2n\text{-}4)$ droits.

116. Corollaire II. — *La somme des angles intérieurs d'un quadrilatère vaut quatre droits.*

THÉORÈME

117. — *La somme des angles extérieurs formés en prolongeant dans le même sens les côtés d'un polygone convexe vaut quatre droits.*

Soit le polygone ABCDE.

Prenons un sommet quelconque A. La somme des angles intérieur et extérieur, 1 et 3, vaut deux droits. Si donc nous désignons par n le nombre des côtés du polygone, la somme de tous ses angles intérieurs et de tous ses angles extérieurs vaudra $2\,n$ droits ; mais comme celle des angles intérieurs est $2\,n$ droits moins quatre droits, celle des angles extérieurs vaudra quatre droits. C. q. f. d.

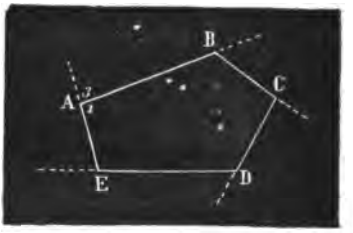


FIG. 71.

CHAPITRE VII

Quadrilatère.

Définitions.

118. — Le *quadrilatère* est un polygone de quatre côtés.

On distingue particulièrement *cinq* quadrilatères :

1° Le *parallélogramme*, qui a ses côtés parallèles deux à deux (*fig.* 72);

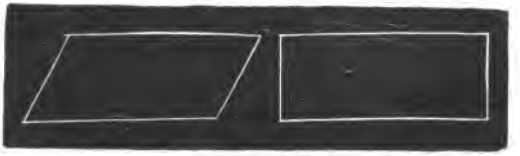


FIG. 72. FIG. 73.

2° Le *rectangle*, qui a ses quatre angles droits (*fig.* 73);

3° Le *carré*, qui a ses côtés égaux et ses angles droits (*fig.* 74);

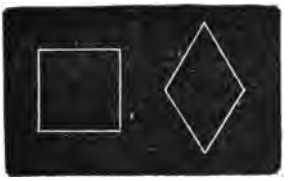


FIG. 74.

FIG. 75.

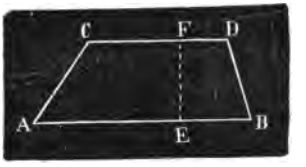


FIG. 76.

4° Le *losange*, qui a ses quatre côtés égaux et ses angles quelconques (*fig.* 75);

5° Le *trapèze*, qui a deux côtés parallèles (*fig.* 76). Les côtés parallèles AB, CD sont les *bases* du trapèze, leur distance EF en est la *hauteur*.

THÉORÈME

119. — *Dans un parallélogramme : 1° Les angles opposés sont égaux ; 2° Les côtés opposés sont égaux.*

Soit le parallélogramme ABCD.

1° Les angles opposés A et C sont égaux, car ils ont leurs côtés parallèles et dirigés en sens contraire. Il en est de même des angles B et D.

2° Les côtés AB et DC sont égaux. En effet, menons la diagonale AC. Les deux triangles ABC, ACD ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, savoir : AC commun, les angles 1 et 1′ égaux comme alternes-internes par rapport aux parallèles AB, CD et à la sécante AC ; les angles 2 et 2′ égaux aussi pour la même raison : donc ces deux triangles sont égaux; par suite,

AB = DC et AD = BC.

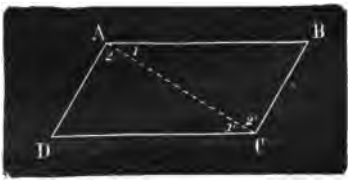


FIG. 77.

120. Corollaire I. — *Les segments AD, BC de deux parallèles compris entre deux autres parallèles AB, DC sont égaux* (fig. 77).

121. Corollaire II. — *Deux parallèles AB, CD sont partout également distantes.*

Car, si de deux points quelconques E et F de la droite CD, on élève deux perpendiculaires EG, FH à la droite AB, ces perpendiculaires mesureront les distances des points E et F à la droite AB (74) et seront égales comme parallèles comprises entre parallèles.

FIG. 78.

122. Corollaire III. — *Un parallélogramme est un rectangle, si l'un de ses angles est droit.*

THÉORÈME (*réciproque*).

123. — *Un quadrilatère est un parallélogramme :* 1° *Si ses angles opposés sont égaux;* 2° *Si ses côtés opposés sont égaux.*

Soit le quadrilatère ABCD.

1° Puisque, par hypothèse, les angles opposés A et C sont égaux, on peut représenter leur somme par 2 A. De même, on peut représenter par 2 B la somme des angles B et D. Mais la somme des angles du quadrilatère vaut quatre droits : on a donc 2 A + 2 B = 4 droits, d'où A + B = 2 droits.

FIG. 79.

Les angles A et B étant supplémentaires par rapport aux droites AD, BC et à la sécante AB, il en résulte que AD est parallèle à BC. On prouverait de même le parallélisme des côtés AB et DC. Le quadrilatère ABCD est donc un parallélogramme (118, 1°).

2° Les côtés AB et DC sont égaux, par hypothèse, de même que les côtés AD et BC. Il faut prouver que la figure est un parallélogramme.

Pour cela, menons la diagonale AC. Les triangles ABC, ACD sont égaux, parce qu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun, savoir : AC commun, AB = DC et AD = BC par hypothèse, donc les angles 1 et 1′ sont égaux, mais ces angles sont alternes-internes par rapport aux droites AB, DC et à la sécante AC, donc AB est parallèle à DC. Par suite de l'égalité des angles 2 et 2′, on déduit de même le parallélisme des droites AD, BC : la figure est donc un parallélogramme.

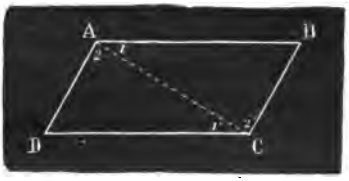


FIG. 80.

124. Corollaire I. — *Un losange est un parallélogramme,* car ses côtés sont égaux.

125. Corollaire II. — *Le rectangle et le carré sont des parallélogrammes,* car dans ces quadrilatères les angles opposés sont égaux comme droits.

126. Corollaire III. — *Deux parallélogrammes sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à*

chacun, car ils ont dès lors leurs angles et leurs côtés égaux chacun à chacun, et sont, par suite, superposables.

127. Corollaire IV. — *Deux rectangles qui ont deux côtés adjacents égaux chacun à chacun sont égaux.*

THÉORÈME

128. — *Lorsque dans un quadrilatère deux côtés sont égaux et parallèles, la figure est un parallélogramme.*

Soit le quadrilatère ABCD, dans lequel les côtés AB, CD sont égaux et parallèles.

Je dis que la figure est un parallélogramme.

En effet, menons la diagonale AC. Les deux triangles ABC et ACD ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun, savoir : les angles 1 et 1′ égaux comme alternes-internes par rapport aux parallèles AB, DC et à la sécante AC, le côté AB égale le côté DC, par hypothèse, et AC est commun, donc ces deux triangles sont égaux, et l'angle 2′ opposé au côté AB est égal à l'angle 2 opposé au côté DC; mais ces angles sont alternes-internes par rapport aux droites AD, BC et à la sécante AC : le côté AD est donc parallèle au côté BC. La figure ABCD ayant ses côtés opposés parallèles est un parallélogramme.

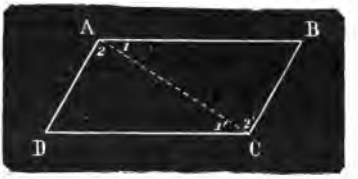


FIG. 81.

THÉORÈME

129. — *Les diagonales d'un parallélogramme se coupent mutuellement en deux parties égales.*

Soit le parallélogramme ABCD dont les diagonales AC, BD se coupent au point O. Il faut démontrer que OA = OC et OB = OD.

En effet, les deux triangles AOB, DOC ont le côté AB = DC, les angles 1 et 1′ égaux comme alternes-internes, les angles 2 et 2′ égaux aussi pour la même raison : donc ces deux triangles sont égaux; par suite, OA = OC et OB = OD.

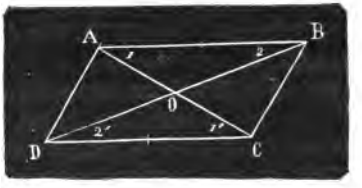


FIG. 82.

THÉORÈME (*réciproque*).

130. — *Lorsque les diagonales d'un quadrilatère se coupent en parties égales, la figure est un parallélogramme.*

Soit le quadrilatère ABCD, dans lequel OA = OC et OB = OD. Je dis que ce quadrilatère est un parallélogramme.

En effet, les deux triangles AOB, DOC ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir : les angles en O égaux comme opposés par le sommet et les côtés OA, OB du premier égaux, par hypothèse, aux côtés OC, OD du second : donc ces deux triangles sont égaux ; par suite, AB = DC et l'angle 1 est égal à l'angle 1'. Mais, ces angles étant alternes-internes par rapport aux droites AB, DC et à la sécante AC, il en résulte que AB et DC sont parallèles. Le quadrilatère ABCD ayant deux côtés, AB, CD, égaux et parallèles, est un parallélogramme.

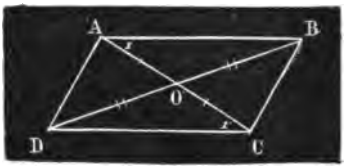


FIG. 83.

131. Corollaire. — *Le point O est le centre de figure du parallélogramme ABCD*, c'est-à-dire que le point O divise en deux parties égales toute droite MN qui, passant par ce point, se termine de part et d'autre aux côtés du parallélogramme ; car les triangles OAM, OCN ont les côtés OA et OC égaux, les angles en O égaux comme opposés par le sommet et les angles 1 et 2 égaux comme alternes-internes. Ces deux triangles sont donc égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun : d'où OM = ON.

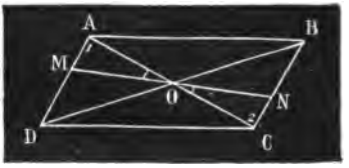


FIG. 84.

THÉORÈME

132. — *Les diagonales d'un rectangle sont égales.*

Soit le rectangle ABCD. Les diagonales AC, BD sont égales.

En effet, les deux triangles ADC, BCD ayant chacun un angle droit compris entre côtés égaux chacun à chacun (DC commun, AD = BC) sont égaux et les hypoténuses AC, BD sont égales.

FIG. 85.

THÉORÈME (*réciproque*).

133. — *Un parallélogramme est un rectangle, si ses diagonales sont égales.*

Soit le parallélogramme ABCD, dans lequel les diagonales AC, DB sont égales. Je dis qu'il est rectangle.

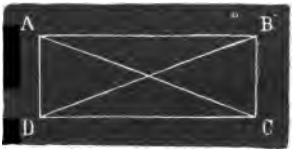


FIG. 86.

En effet, les deux triangles ADC, BCD ont les trois côtés égaux

chacun à chacun et, par suite, sont égaux. D'où résulte l'égalité des angles ADC, BCD. Or, à cause des parallèles AD, BC, ces angles sont supplémentaires : donc ils sont droits l'un et l'autre, et la figure est un rectangle.

134. Corollaire. — *Le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est à égale distance des trois sommets du triangle.*

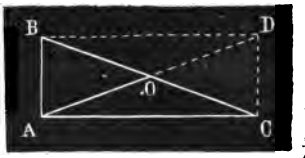


FIG. 87.

Cela est évident, car, le triangle rectangle étant la moitié du rectangle ABDC, le point O est le milieu de AD et de BC.

THÉORÈME

135. — *Les diagonales d'un losange sont rectangulaires.*

Soit le losange ABCD. Je dis que les diagonales AC, BD sont rectangulaires.

En effet, les points B et D sont équidistants des points A et C : donc la droite BD qui les joint est perpendiculaire sur le milieu de AC.

THÉORÈME (*réciproque*)

136. — *Un parallélogramme est un losange, si ses diagonales sont rectangulaires.*

Soit (fig. 88) le parallélogramme ABCD. Puisque, par hypothèse, BD est perpendiculaire sur le milieu de AC, il arrive que AB = BC = AD = DC : donc les quatre côtés sont égaux et la figure est un losange.

FIG. 88.

137. Corollaire. — *Les diagonales d'un carré sont égales et rectangulaires*, car un carré est à la fois un rectangle et un losange.

APPLICATION I. — THÉORÈME

138. — *La droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième et en vaut la moitié.*

Soit ED une droite qui joint les milieux des côtés AC, BC du triangle ACB : on aura ED parallèle à AB et égale à la moitié.

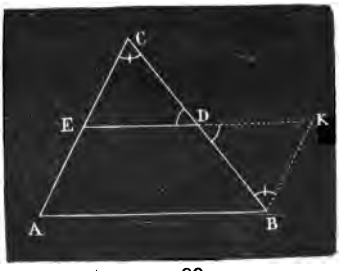


FIG. 88.

Pour le démontrer, je mène par le point B, BK parallèle à AC et je prolonge ED jusqu'en K. Les deux triangles DCE, BDK sont égaux

comme ayant un côté égal (CD = BD) adjacent à deux angles égaux, les angles en D comme opposés par le sommet et les deux autres angles comme alternes-internes; il en résulte l'égalité : BK = CE = AE.

Le quadrilatère ABKE ayant deux côtés opposés, AE, BK, égaux et parallèles, est un parallélogramme; par suite, les côtés opposés AB, EK sont égaux et parallèles. Or, ED = DK à cause de l'égalité des triangles CDE, BDK. Donc AB = 2DE. Ainsi, DE est parallèle à AB et égale à sa moitié.

APPLICATION II. — THÉORÈME

139. — *Les hauteurs d'un triangle sont concourantes.*

Soient le triangle ABC et ses trois hauteurs AC, BH, CI.

Par les sommets A, B, C du triangle donné, je mène des parallèles aux côtés opposés, j'obtiens ainsi un second triangle DEF. Or, puisque les parallèles comprises entre parallèles sont égales, j'ai AF = CB = AE, donc le point A est le milieu de EF.

Un raisonnement analogue prouve que les sommets B et C du triangle ABC se trouvent aussi sur les milieux des côtés DF, DE du triangle DEF. D'ailleurs, si AG, BH, CI sont perpendiculaires aux côtés BC, AC, AB, ils sont aussi perpendiculaires à leurs parallèles EF, DF, DE. Donc les hauteurs du premier triangle ABC peuvent être considérées comme des perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés du second, et sont par cela même concourantes (78).

FIG. 90.

Remarque. — Il résulte de ce qui précède que si par les sommets d'un triangle ABC on mène des parallèles aux côtés, le triangle DEF ainsi formé est quadruple du premier; car les triangles ABC, ABF sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun. Pour la même raison, les triangles AEC, BCD sont aussi égaux au triangle ABC : donc DEF est quadruple de ABC.

APPLICATION III. — THÉORÈME

140. — *Les médianes d'un triangle sont concourantes, et le point de concours est au tiers de chacune d'elles à partir du côté.*

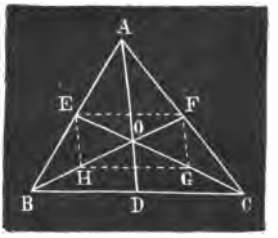


FIG. 91.

Soit le triangle ABC. Considérons les deux médianes BF, CE qui se coupent en un point O. Prenons les milieux H et G des portions de médianes BO, CO, et traçons EF, HG. Ces droites sont l'une et l'autre parallèles à BC et valent la moitié de BC (138). Donc EF,

HG sont égales et parallèles, et la figure EFGH est un parallélogramme; par suite, OH = OF = HB, puisque le point H est le milieu de BO : donc OF est le tiers de BF. On démontrerait de même que BF et AD se coupent en un point O′ situé au tiers de BF : donc ce point O′ n'est autre que le point O. Les trois médianes concourent donc bien au même point situé au tiers de chacune d'elles à partir du côté.

APPLICATION IV. — THÉORÈME

141. — *Si l'on joint par une droite les milieux des côtés non parallèles d'un trapèze*

1° *Cette droite est parallèle aux bases et passe par les milieux des diagonales;*

2° *Cette même droite vaut la demi-somme des bases, et sa portion comprise entre les diagonales en vaut la demi-différence.*

Soit le trapèze ABCD, dont les diagonales sont AC, BD.

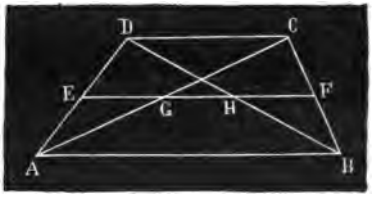


FIG. 91 *bis*.

1° Par le point E, milieu de AD, menons EF parallèle aux bases : elle passera par le milieu G de AC, puis par le milieu H de BD et enfin par le milieu F de BC; car nous appliquons dans les triangles ACD, ABD et BCD ce qui a été dit au n° 138. Il en résulte que la parallèle EF aux bases du trapèze n'est autre que la droite qui joint les milieux des côtés non parallèles.

2° D'après la même démonstration, on a :

$$EG = HF = \frac{DC}{2} \text{ et } EH = GF = \frac{AB}{2}.$$

Donc

$$EG + GF \text{ ou } EF = \frac{AB + DC}{2} \text{ et } EH - EG \text{ ou } GH = \frac{AB - DC}{2}.$$

CHAPITRE VIII

Figures symétriques par rapport à un point ou à une droite. Deux figures planes symétriques sont égales.

Définitions.

142. — Deux points A, A′ sont *symétriques* par rapport à un point O, appelé *centre*, lorsque ce point est le milieu de la droite AA′.

FIG. 92.

143. — Deux points A, A′ sont symétriques par rapport à une droite XY, appelée *axe*, lorsque cette droite est perpendiculaire sur le milieu de AA′.

144. — Deux figures F, F′ sont symétriques par rapport à un point ou à un axe lorsque les points de ces deux figures sont deux à deux symétriques par rapport à ce point ou à cet axe (*fig.* 96 et 98).

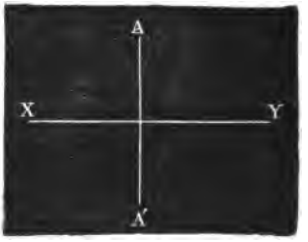


FIG. 93.

THÉORÈME

145. — 1° *La figure symétrique d'une droite* AB, *par rapport à un point* O, *est une autre droite* A′B′ *égale, parallèle et de sens contraire* (*fig.* 94).

2° *La figure symétrique d'un angle* ABC, *par rapport à un point* O *du plan de cet angle, est un autre angle égal* A′B′C′ *ayant les côtés respectivement parallèles et de sens contraires aux côtés de l'angle* ABC (*fig.* 95).

3° *La figure symétrique d'un polygone* ABCDE, *par rapport à un point* O *du plan de ce polygone, est un autre polygone égal* A′B′C′D′E′ (*fig.* 96).

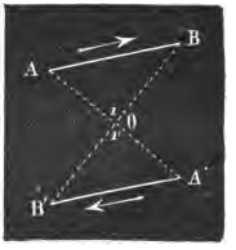


FIG. 94.

1° On a, par définition, OA = OA′ et OB = OB′; de plus, les angles en O, 1 et 1′, sont égaux : donc les triangles OAB et OA′B′ sont égaux. Il en résulte l'égalité des côtés AB, A′B′ et celle des angles A, A′; mais, comme ces angles sont alternes-internes par rapport aux droites AB, A′B′ et à la sécante AOA′, les droites AB, A′B′ sont parallèles et de sens contraires.

2° D'après ce qui vient d'être démontré (1°) les côtés BA et B′A′ sont parallèles et de sens contraires ; de même pour les côtés BC et B′C′ : les angles ABC et A′B′C′ ayant leurs côtés parallèles deux à deux et de sens contraires, sont égaux.

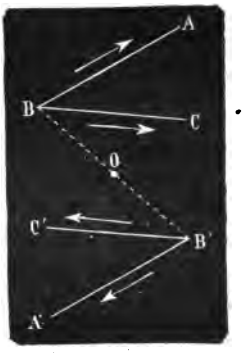


FIG. 95.

3° Les polygones ABCDE et A′B′C′D′E ont leurs angles et leurs côtés égaux deux à deux (1° et 2°) ; de plus, *la disposition des eléments égaux est la même* dans les deux polygones ; car si un observateur, ayant les pieds en A, regardait le sommet B, il verrait successivement sur sa droite les côtés AE, ED, etc. ; si l'observateur se plaçait ensuite en A′ et regardait B′, il verrait de même successivement sur sa droite les côtés A′E′, E′D′, etc. Si donc on transporte le polygone A′B′C′D′E′ sur le polygone ABCDE de manière que A′B′ coïncide avec son égal AB, les deux polygones coïncideront également : donc ils sont égaux.

146. Centre de symétrie d'une figure. — Si à tout point M d'une figure correspond un point M′, symétrique de M, par rapport à un même point O du plan de la figure, on dit que le point O est *centre de symétrie*, ou simplement *centre* de la figure.

Nous avons vu (131) qu'il existe un centre de figure dans tout parallélogramme.

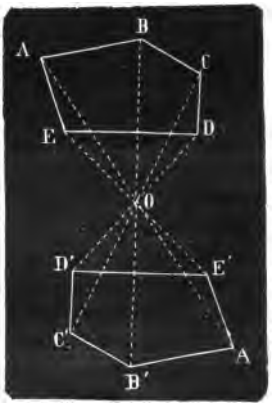


FIG. 96.

THÉORÈME

147. — 1° *La figure symétrique d'une droite* AB (*fig.* 96) *par rapport à un axe* XY, *est une autre droite égale* A′B′ *faisant avec* XY *un angle égal à celui que* AB *fait avec la même droite* XY.

2° *La figure symétrique d'une figure plane* F *par rapport à un axe* XY, *du plan de cette figure, est une autre figure* F′ *égale à la figure* F (*fig.* 98).

1° Si l'on prend les points symétriques A′, B′ de A et B par rapport à l'axe XY, on a :

$$Aa = A'a \text{ et } Bb = B'b,$$

d'où il suit que si l'on fait tourner la partie supérieure du plan, autour de l'axe XY, pour la rabattre sur la partie inférieure, le point

A viendra en A′ et le point B en B′, dès lors les droites AB et A′B′ coïncideront et seront égales.

D'autre part, la droite AB et sa symétrique A′B′ prolongées vont rencontrer l'axe XY en deux points O et O′ qui se confondent en un seul, car les triangles rectangles OAa et O′A′a sont égaux comme ayant un côté de l'angle droit égal Aa = A′a adjacent à un angle aigu aAO = aA′O′. Les triangles rectangles étant égaux, aO coïncide avec aO′ et, de plus, les angles 1 et 1′ sont égaux. 2° Soient les deux figures symétriques F et F′. D'après ce qui vient d'être démontré (1°), ces figures ont leurs côtés égaux chacun à chacun ; de plus, elles ont leurs angles respectivement égaux, car l'une et l'autre de ces figures sont décomposables en un même nombre de triangles égaux chacun à chacun, puisque les côté de l'un sont les symétriques des côtés de l'autre ; mais la *disposition des éléments égaux est différente* dans les deux figures ; car l'observateur qui aurait les pieds en A, regardant le sommet B, verrait successivement sur sa *droite* les côtés AE, ED, etc. ; si, au contraire, il avait les pieds en A′, regardant le sommet B′, il verrait successivement, sur sa *gauche*, les côtés A′E′, E′D′, etc. Cette fois la coïncidence des deux polygones ne peut plus avoir lieu par la simple transposition de l'un sur l'autre, il faut le *retournement* de l'un des deux, ce que l'on obtient, d'ailleurs, en faisant tourner l'un autour de l'axe XY jusqu'à ce qu'il vienne se confondre avec l'autre. Donc, dans tous les cas, *deux figures planes symétriques sont égales.*

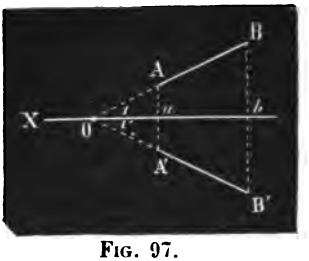


FIG. 97.

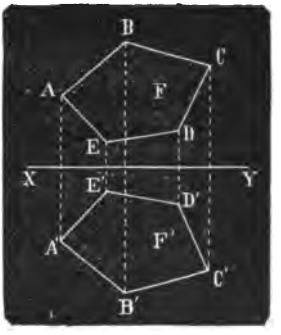


FIG. 98.

148. Axe de symétrie d'une figure. — Si à tout

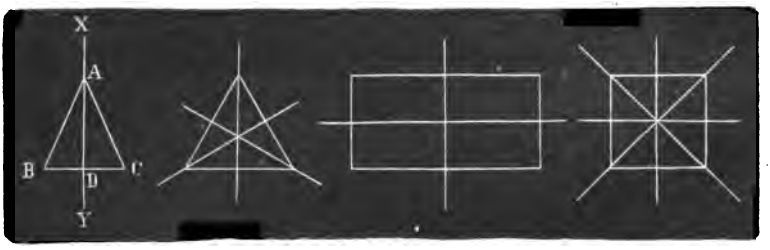


FIG. 99 FIG. 100. FIG. 101. FIG. 102.

point M d'unefigure plane correspond sur cette figure un point M′

symétrique du point M par rapport à une même droite XY du plan de la figure, on dit que cette droite est un *axe de symétrie*, ou simplement *axe*, de la figure.

Il est facile de voir que la hauteur AD d'un triangle isocèle est un axe du triangle (*fig.* 99). On voit aussi sans difficulté que le triangle équilatéral a trois axes (*fig.* 100), que le rectangle en a deux (*fig.* 101) et que le carré en a quatre (*fig.* 102).

CHAPITRE IX

Translation d'une figure plane de forme invariable. — Composition de plusieurs translations.

---

§ I. — TRANSLATION D'UNE FIGURE PLANE DE FORME INVARIABLE

Définitions.

149. — Si deux parallèles AA', BB' sont coupées par une sécante EF, on dit que les portions de droite EA', FB' (*fig.* 103) sont de *même sens* lorsqu'elles sont toutes deux du même côté de la sécante EF; et de *sens contraire*, si elles sont de part et d'autre de la sécante; telles sont les portions de droite EA' et FB ou FB' et FB.

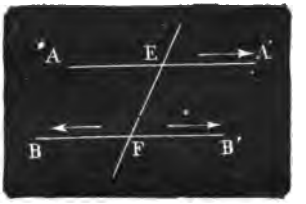


FIG. 103.

150. — On dit que le déplacement d'une figure, tracée sur un plan, a lieu par *translation* quand ce déplacement s'effectue de manière que tous les points de cette figure décrivent des droites égales, parallèles et de même sens. Nous allons démontrer, dans le théorème suivant, qu'on peut opérer une telle translation.

THEORÈME

151. — *Lorsque deux polygones égaux, situés sur un même plan et dont les éléments égaux sont disposés dans le même ordre, ont deux côtés égaux, parallèles et de même sens, tous leurs côtés sont deux à deux parallèles et les droites qui joignent les sommets des angles égaux sont égales, parallèles et de même sens.*

Soient d'abord les triangles ABC, A'B'C' placés dans les conditions répondant à l'énoncé du théorème. Il est, par conséquent, admis que

les deux triangles sont égaux et situés dans un même plan, que leurs éléments égaux sont disposés dans le même ordre et qu'ils ont deux côtés égaux AB et A′B′, parallèles et de même sens.

Il faut démontrer que les côtés BC et B′C′ sont parallèles de même que les côtés AC et A′C′; de plus, que les distances AA′, BB′ et CC′ sont égales, parallèles et de même sens.

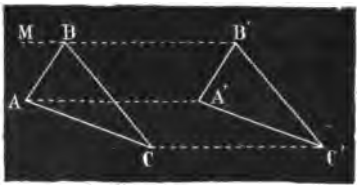


FIG. 104.

Les côtés AB et A′B′ étant, par hypothèse, égaux, parallèles et de même sens, les droites AA′ et BB′ sont aussi égales et parallèles (120); d'autre part, les angles CBM et C′B′B sont égaux comme formés de parties égales chacune à chacune; mais ces angles sont correspondants par rapport à la sécante MBB′ et aux droites BC et B′C′: donc ces droites égales sont parallèles et de même sens : d'où il résulte que CC′ est égal à AA′, lui est parallèle et de même sens. La figure AA′CC′ étant un parallélogramme, AC est égal à A′C′, parallèle et de même sens. Par suite, le triangle ABC peut venir occuper, par translation, la position A′B′C′; il suffit pour cela de déplacer ses sommets d'une même longueur, dans le même sens et dans trois directions parallèles entre elles.

Cette démonstration peut aisément s'appliquer au cas de deux polygones plans ABCDE et A′B′C′D′E′, placés dans les conditions voulues par l'énoncé du théorème, et dans lesquels les côtés égaux, AB et A′B′ sont parallèles et de même sens; car les triangles ABC, ACD, ADE sont respectivement égaux aux triangles A′B′C, A′C′D′, A′D′E′ : d'où il résulte, d'après la première partie du théorème, que les droites AA′, BB′, CC′ sont égales et parallèles et que BC et AC sont parallèles à B′C′ et A′C′ et de même sens. Donc aussi, à cause des triangles ACD, A′C′D′, les droites CC′ et DD′ sont égales et parallèles, par suite CD et C′D′, AD et A′D′ sont parallèles et de même sens.

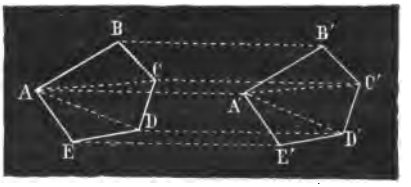


FIG. 105.

On voit avec la même facilité que les autres côtés des deux polygones sont parallèles et de même sens.

On peut donc amener l'un de ces polygones à occuper la position de l'autre, en déplaçant ses sommets d'une même longueur, dans le même sens et dans des directions parallèles entre elles.

La réciproque de ce théorème est évidente.

152. Corollaire. — *Chaque côté d'un polygone animé d'un mouvement de translation reste parallèle à une direction fixe.*

§ II. — COMPOSITIONS DE PLUSIEURS TRANSLATIONS

Définition.

153. — Si l'on donne sur un plan P des portions de droite OA, OB, OC... et un point M sur une figure F de ce plan, nous dirons que la figure F est déplacée sur le plan P, successivement par les translations (OA), (OB), (OC)... si le point M de la figure F décrit d'abord sur le plan P une portion de droite parallèle à OA, égale en longueur et de même sens, puis une autre portion de droite parallèle à OB, égale en longueur et de même sens, puis de même pour OC et ainsi de suite.

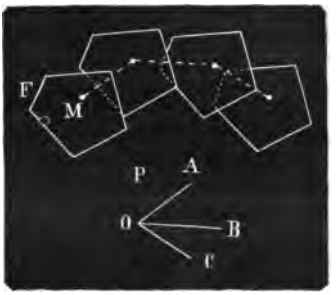


FIG. 106.

THÉORÈME

154. — *On peut remplacer deux translations consécutives par une seule translation.*

Il faut démontrer que les translations (OA) et (OB), par exemple, produisent sur le plan P le même déplacement final que la translation (OE), diagonale du parallélogramme construit sur OA et sur OB.

En effet, si l'on effectue la translation (OA), un point quelconque M de la figure décrit sur le plan P une portion de droite MM′ parallèle à OA, égale en longueur et de même sens (153). Si l'on effectue également la translation (OB), le point M, devenu le point M′ après la première translation, décrit une droite M′M″ parallèle à OB, égale en longueur et de même sens. Après la seconde translation le point M occupe donc la position M″, la même que si chaque point de la figure F avait décrit une portion de droite parallèle à MM″ égale en longueur et de même sens. Maïs MM″ est parallèle à la diagonale OE égale en longueur et de même sens. Le point M étant un point quelconque de la figure F, le théorème est démontré.

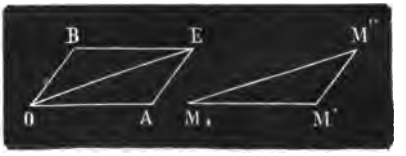


FIG. 107.

La translation (OE) est appelée la *résultante* des translations (OA), (OB) qui sont des translations *composantes*.

155. Corollaire. — *L'ordre de deux translations composantes n'influe pas sur la translation résultante.*

Car, il est évident qu'on ne change pas OE en déplaçant le point M le long de OBE au lieu de le déplacer le long de OAE.

THÉORÈME

156. — *On peut remplacer plusieurs translations composantes par une seule translation résultante.*

Il s'agit de démontrer que les translations composantes (OA), (OB), (OC), (OD), par exemple, peuvent être remplacées par une seule translation résultante OD'.

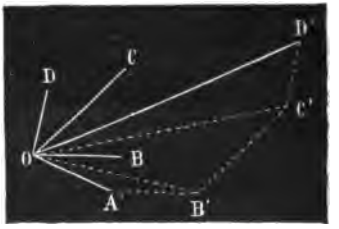


FIG. 108.

En effet, menons la droite AB' parallèle à OB, égale en longueur et de même sens. Or (154), la translation OB' produit le déplacement des translations successives (OA), (OB); de même la translation OC' produit le déplacement des translations successives (OB'), (OC); enfin, la translation résultante (OD') produit le déplacement des translations successives (OC'), (OD).

157. Remarque. — D'après le n° 155, il est évident que la résultante d'un nombre quelconque de translations successives est indépendante de l'ordre dans lequel on effectue ces translations.

CHAPITRE X

Usage de la règle et de l'équerre.

---

158. Règle. — La *règle* est une petite planchette rectangulaire qui sert à tracer des lignes droites sur le papier. Pour faire usage de la règle on la place de manière que l'un de ses bords coïncide avec les deux points M et N, qu'il s'agit d'unir par une droite ; ensuite on fait glisser contre ce bord, de M en N, une pointe à tracer, soit crayon, plume ou tire-ligne. Avant de faire usage d'une règle, il est bon de la vérifier.

On vérifie une règle en traçant d'abord, comme nous venons de l'indiquer, une ligne MN avec la pointe fine d'un crayon, ensuite on place la règle au-dessus de la ligne MN de manière que le même bord passe encore par les points M, N, et l'on trace une nouvelle ligne qui se confond avec la première lorsque la règle est bien droite. Si la règle est défectueuse, le défaut se reproduit en sens contraire, et devient très apparent, comme le montre la figure.

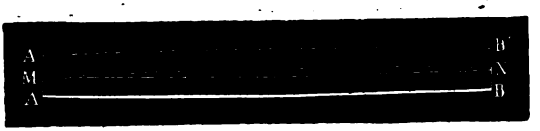


FIG. 109.

159. Équerre. — L'*équerre* est un instrument de bois ou de métal, ayant la forme d'un triangle rectangle (*fig.* 110), et qui sert à tracer des perpendiculaires et à mener des parallèles. Pour que l'équerre soit plus aisée à manier, on y pratique une ouverture circulaire appelée *œil* de l'équerre.

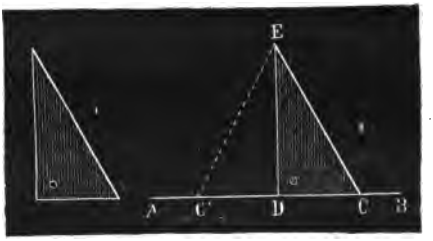


FIG. 110. FIG. 111.

Avant de se servir d'une équerre, il faut la vérifier, c'est-à-dire s'assurer si son plus grand angle est droit. Voici comment on peut vérifier une équerre : on fait coïncider un des côtés de l'angle droit CD (*fig.* 111) avec une droite AB et l'on trace une ligne le long de l'autre côté ED. Puis, retournant l'équerre dans la position DEC', de manière que DC' coïncide encore avec AB, on trace une nouvelle droite qui se confond avec la première si l'équerre est juste. Dans le cas où l'équerre serait fausse, les droites tracées prendraient les positions ci-contre : la figure 112 indique que l'angle CDE est aigu et la figure 113 que l'angle CDE est obtus.

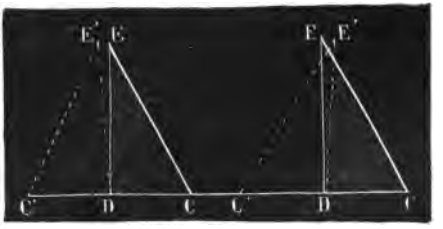


FIG. 112. FIG. 113.

160. — Lorsqu'on veut mener, par un point O, une perpendiculaire à une droite AB, il peut se présenter deux cas : le point O peut être sur AB ou extérieur à AB.

1° Le point donné O est sur AB. Dans ce cas, on place le sommet de l'angle droit de l'équerre en O en faisant coïncider l'un des côtés

de cet angle avec la droite donnée, puis on tire OD qui est la perpendiculaire demandée.

2° Le point O est extérieur à AB. On place l'un des côtés de l'angle

FIG. 114.

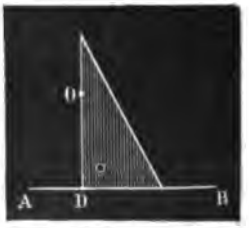


FIG. 115.

droit de l'équerre sur AB et on le fait glisser sur cette droite jusqu'à ce que l'autre côté rencontre le point donné O; enfin, on tire OD qui est évidemment la perpendiculaire demandée.

161. — La construction d'une perpendiculaire à une droite, au moyen de l'équerre, est facile et demande peu de temps, mais elle n'a pas toute la précision voulue; il est préférable d'employer la règle et le compas, comme il est expliqué à la fin du second livre. L'équerre est surtout en usage lorsqu'on veut mener des parallèles.

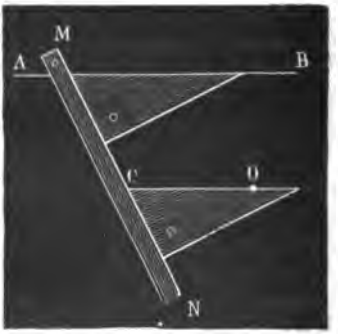


FIG. 116.

162. — Si l'on veut, par exemple, mener par un point O une parallèle à AB, on applique sur AB l'un des bords de l'équerre et contre son autre bord une règle MN; puis on fait glisser contre la règle l'équerre ainsi placée jusqu'à ce que le bord qui était appliqué sur AB passe par le point O; on tire OC qui est de toute évidence parallèle à AB.

EXERCICES SUR LE LIVRE PREMIER

1. Construire le complément d'un angle donné.

2. Construire le supplément d'un angle donné.

3. Les bissectrices de deux angles adjacents supplémentaires sont perpendiculaires.

4. Les bissectrices de deux angles opposés par le sommet sont en ligne droite.

5. Combien peut-on mener de diagonales dans un polygone convexe de n côtés?

6. La somme des diagonales d'un quadrilatère convexe est plus petite que la somme et plus grande que la demi-somme de ses côtés.

7. La somme des droites qui joignent un point intérieur d'un triangle aux trois sommets, est plus petite que la somme et plus grande que la demi-somme des trois côtés du triangle.

8. Deux polygones sont égaux quand ils ont $n - 1$ côtés consécutifs égaux comprenant $n - 2$ angles égaux et semblablement disposés.

9. Deux polygones sont égaux quand ils ont $n - 2$ côtés consécutifs égaux adjacents à $n - 1$ angles égaux et semblablement disposés.

10. Deux polygones sont égaux quand ils ont tous les côtés et $n - 3$ angles consécutifs égaux chacun à chacun et semblablement disposés.

11. Combien de conditions faut-il pour l'égalité de deux polygones?

12. Chaque médiane est plus petite que la demi-somme des côtés adjacents.

13. La somme des médianes d'un triangle est plus petite que la somme et plus grande que la demi-somme des côtés.

14. Sur les côtés d'un angle, on prend des longueurs OA = OB, puis OA' = OB'; on mène AB', BA'. Prouver que OM est bissectrice de l'angle considéré.

15. Par un point donné P hors d'un angle AOB, mener une droite qui détermine par son intersection avec les côtés de cet angle deux longueurs égales QA, OB. Serait une applicat. de la récipr. de 56

16. Dire, sans prendre directement de mesure, si un point C situé hors d'une droite AB est plus près de A que de B.

17. Deux villages A et B situés à une certaine distance d'une rivière veulent construire un pont à frais communs : on demande le lieu où devra être fait le pont pour se trouver également éloigné de chaque village.

18. Les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle concourent en un même point. Il est assez étrange de trouver en 1 exerc. un théor. démontré

19. Si des extrémités de la base d'un triangle isocèle, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés opposés, ces perpendiculaires sont égales. au cours N°. 98

20. Par un point donné P, mener une droite également distante de deux points donnés A et B.

21. Étant donnés deux points A et B situés d'un même côté d'une droite, trouver le plus court chemin pour aller du point A au point B en touchant cette droite.

22. On prend deux points A et B dans l'intérieur d'un angle xoy, trouver le chemin minimum du point A au point B en touchant les côtés ox et oy.

23. Les bissectrices des trois angles d'un triangle concourent au même point.

24. La parallèle à un côté d'un triangle menée par le point de concours des bissectrices, est égale à la somme des segments adjacents à ce côté, qu'elle détermine sur les deux autres.

25. Déterminer la bissectrice de l'angle formé par deux droites, AB, CD, qu'on ne peut prolonger jusqu'à leur rencontre.

26. Les bissectrices de deux angles qui ont les côtés parallèles sont parallèles ou perpendiculaires l'une à l'autre.

27. Les bissectrices de deux angles qui ont les côtés perpendiculaires sont ou perpendiculaires ou parallèles.

28. Dans un triangle ABC, l'angle O des bissectrices des angles B et C égale $1^{dr} + \frac{A}{2}$.

29. Étant donnés un triangle ABC et un point O dans l'intérieur, démontrer que l'angle O est toujours plus grand que l'angle A du triangle.

30. L'angle DAE de la médiane et de la hauteur d'un triangle rectangle est égal à la différence des deux angles aigus. (*L'exercice* 30 *doit être fait après l'exercice* 113.) Pourquoi ?! puisque on a vu le N° 134, p. 45.

31. Dans un triangle ABC on mène jusqu'au côté BC une droite AD faisant avec le côté AB un angle égal à l'angle C et une droite AE faisant avec le côté AC un angle égal à l'angle B. Démontrer que le triangle DAE est isocèle.

32. Trouver la somme des angles droits d'un polygone de 25 côtés.

33. Quel est le polygone régulier dont la somme des angles est 12^{dr} ?

34. Quel est le polygone régulier dont l'angle vaut 4/3 d'angle droit ?

35. Deux trapèzes sont égaux lorsqu'ils ont les quatre côtés égaux et disposés de la même manière.

36. Les trois hauteurs AG, BH, CI d'un triangle concourent au même point.

37. Si l'on mène par les sommets d'un quadrilatère des parallèles à ses diagonales, on forme un parallélogramme équivalent au double du quadrilatère donné.

38. Démontrer que si l'on prend sur les côtés d'un carré ABCD en marchant toujours dans le même sens, des longueurs égales AE, BF, CG, DH, les points E, F, G, H sont les sommets d'un second carré.

39. Quelles sont les espèces de polygones réguliers convenables pour le carrelage ?

40. On peut encore carreler : 1° avec une combinaison d'octogones réguliers et de carrés ; 2° avec une combinaison de dodécagones réguliers et de triangles équilatéraux.

41. Les bissectrices des angles d'un quadrilatère forment un second quadrilatère dont les angles opposés sont supplémentaires.

42. Si par un point quelconque D de la base d'un triangle isocèle, on mène des parallèles DE, DF aux deux autres côtés, on forme un parallélogramme dont le périmètre est constant.

43. Par le sommet A d'un parallélogramme ABCD, on mène une droite quelconque AX. Démontrer que la distance du sommet C à la droite AX est égale à la somme ou à la différence des distances des sommets B et D à la même droite suivant que AX est extérieure au parallélogramme ou le traverse.

44. La somme des distances d'un point quelconque de la base d'un triangle isocèle aux deux autres côtés est constante.

45. La somme des perpendiculaires abaissées d'un point intérieur quelconque d'un triangle équilatéral sur les trois côtés est égale à la hauteur du triangle.

46. Trouver le lieu des points situés à une distance donnée d'une droite AB.

47. Trouver le lieu des points également distants de deux droites parallèles CD, EF.

48. Trouver le lieu des sommets des triangles ayant même base et même hauteur.

49. Dans tout triangle, la droite qui joint les milieux de deux côtés est 1° parallèle au troisième; 2° égale à la moitié.

50. Si E et F sont les milieux des côtés opposés AB et CD d'un parallélo-

gramme ABCD, les droites BF et ED divisent la diagonale AC en trois parties égales.

51. Si l'on joint les milieux E, F, G, H des côtés consécutifs d'un quadrilatère ABCD, la fig. EFGH est un parallélogramme.

52. Si l'on joint les milieux H, F de deux côtés opposés d'nn quadrilatère aux milieux I, J des diagonales, on obtient encore un paralélogramme HIFJ.

53. Les droites HF, GE qui joignent les milieux des côtés opposés d'un quadrilatère, et la droite IJ, qui joint les milieux des diagonales, concourent en un même point O.

54. Si l'on mène les bissectrices des angles d'un parallélogramme : 1° on obtient un rectangle ; 2° les sommets, K, L, M, N, de ce rectangle sont situés sur les droites qui joignent les milieux des côtés opposés du parallélogramme.

55. Soit un triangle ABC et ses trois médianes AM, BN, CP. On prolonge AM d'une quantité MD égale à AM ; puis on prend BE = CF = BC. Les triangles ADE et ADF ont pour côtés le double des médianes du triangle ABC.

56. Les trois médianes d'un triangle concourent en un même point situé aux 2/3 de chacune d'elles à partir du sommet.

57. Au plus grand côté correspond la plus petite médiane.

58. Par un point A pris dans l'intérieur d'un angle DOC, mener une droite telle que le point donné soit le milieu de la portion de cette droite interceptée entre les côtés de l'angle.

59. On joint le sommet A d'un triangle au milieu N de la médiane adjacente BE ; cette ligne prolongée rencontre le côté opposé en un point M tel que $BM = \frac{BC}{3}$.

60. Toute droite qui passe par le centre O d'un parallélogramme et se termine à ses côtés est divisée par ce centre en deux parties égales.

61. Tout quadrilatère qui a pour centre le point de concours de ses diagonales est un parallélogramme.

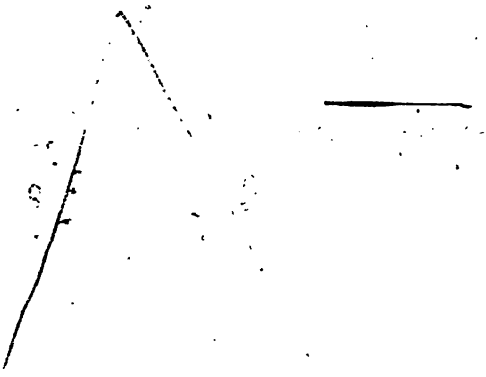
62. Quel quadrilatère obtient-on en joignant les milieux des côtés d'un losange ?

63. On demande le lieu géométrique des milieux des droites qui vont d'un point donné à une droite donnée.

64. Dans un triangle, le point de concours des perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés, le point de concours des trois médianes et celui des trois hauteurs sont en ligne droite, et la distance du 1er point au 2e est moité de la distance du 2e au 3e.

65. Trouver le lieu des points tels que la somme des distances de chacun d'eux à deux droites données soit égale à une longueur donnée *l*.

66. Trouver le lieu des points dont la différence des distances à deux droites concourantes est égale à une longueur donnée.



LIVRE II

LE CERCLE

CHAPITRE PREMIER

Intersection d'une droite et d'un cercle. — Tangente au cercle, les deux définitions de la tangente. — Arcs et cordes.

§ I. — INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN CERCLE.

Définitions

163. Circonférence. — La *circonférence* est une ligne courbe fermée dont tous les points sont également distants d'un point intérieur appelé *centre*.

D'après cette définition la circonférence est encore le *lieu* des points du plan situés à la même distance d'un point de ce plan. Ce point est appelé *centre*. La ligne courbe ABCD (*fig.* 117) est une circonférence dont le point O est le centre.

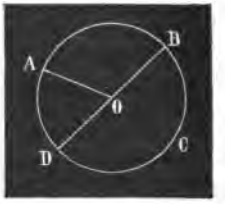


FIG. 117.

164. Cercle. — Le *cercle* est la portion de plan limitée par la circonférence.

Lorsque toute confusion est impossible, on dit souvent *cercle*, au lieu de *circonférence*.

165. Rayon. — On nomme *rayon* toute droite qui va du centre à la circonférence. OA est un rayon.

166. Diamètre. — On appelle *diamètre* toute droite qui passe par le centre de la circonférence et se termine de part et d'autre à cette courbe. Ainsi, BD est un diamètre.

D'après la définition de la circonférence, tous les rayons sont égaux; il en est de même des diamètres, qui sont doubles des rayons.

THÉORÈME

167. — *Une droite ne peut rencontrer une circonférence en plus de deux points.*

En effet, si une droite MN pouvait rencontrer une circonférence O en trois points, ces trois points seraient également distants du centre; on aurait alors trois droites égales menées d'un même point à une même droite, ce qui est impossible (75).

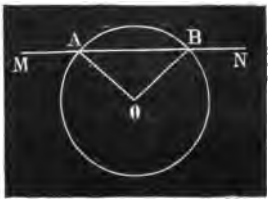


FIG. 118.

168. Définition. — On appelle *sécante* toute droite MN qui rencontre la circonférence en deux points.

THÉORÈME

169. — *Tout diamètre divise le cercle et la circonférence en deux parties égales.*

Soit le cercle AMBN.

Pour démontrer ce théorème, faisons tourner, autour du diamètre AB, la partie supérieure AMB du cercle pour la rabattre sur la partie inférieure ANB. Tous les points de l'arc AMB devront coïncider avec ceux de l'arc ANB; car, s'il en était autrement, et que AMB pût prendre la position AM'B, ou toute autre, il y aurait des points de la circonférence qui seraient inégalement distants du centre, ce qui serait contre la définition du cercle.

FIG. 119.

Donc, tout diamètre divise le cercle et la circonférence en deux parties égales; le diamètre est, par suite, un axe de symétrie.

THÉORÈME

170. — *Les points d'une circonférence qui sont à des distances* maximum *et* minimum *d'un point donné du plan sont sur le diamètre passant par ce point.*

Le point donné A peut être *extérieur* ou *intérieur* à la circonférence O.

1° Soient B et C les points où le diamètre qui passe par le point A

rencontre la circonférence, et soit M et G les deux points ou une autre sécante quelconque AM rencontre la courbe.

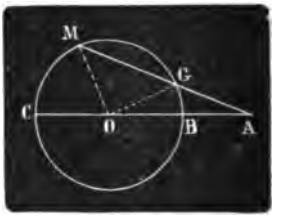


FIG. 120.

On aura :

$$AB < AG \text{ et } AC > AM.$$

En effet, si l'on mène les rayons OM et OG, on a, dans le triangle AOG :

$AB + BO < AG + GO$, ou $AB < AG$ puisque $BO = OG$.

Le triangle AOM donne

$$AO + OM > AM;$$

en remplaçant le rayon OM par son égal OC, on obtient

$$AO + OC > AM$$

ou enfin

$$AC > AM.$$

2° Le point A est à l'intérieur de la circonférence.

Une construction analogue donne dans le triangle OAG

$OA + AG > OG$ ou $OA + AG > OA + AB$.

Si l'on retranche OA de part et d'autre, on a

$$AG > AB.$$

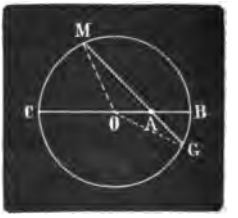


FIG. 121.

Le triangle OAM donne

$OA + OM$ ou $OA + OC > AM$,

ou enfin

$$AC > AM.$$

171. Remarque. — Si le point A se trouve à l'extrémité B du diamètre, sa distance au point B est nulle et sa distance à un point quelconque M de la circonférence est moindre que le diamètre BC. Si le point A est au centre, il se trouve à égale distance de tous les points de la circonférence.

172. Définition. — *La distance d'un point à une circonférence* se compte sur le diamètre qui passe par ce point, elle est égale à la différence entre la distance du point au centre et le rayon.

§ II. — TANGENTE AU CERCLE; LES DEUX DÉFINITIONS DE LA TANGENTE

173. Définition. — On nomme *tangente* une droite qui

prolongée à volonté, ne peut rencontrer la circonférence qu'en un point appelé *point de contact.*

THEORÈME

174. — *La perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon est tangente à la circonférence.*

Soit AT perpendiculaire à l'extrémité A du rayon OA.

Il faut démontrer que AT est tangente au point A.

En effet, toute droite OM, menée du centre à la droite AT, est oblique à cette ligne et, par suite, plus longue que le rayon OA : donc tous les points de AT, à l'exception du point A, sont extérieurs à la circonférence. La droite AT n'ayant que le point A de commun avec la circonférence est donc une tangente en ce point.

FIG. 122.

175. Réciproquement, *la tangente à une circonférence est perpendiculaire au rayon mené au point de contact.*

Soit AT tangente au point A. Il faut prouver que AT est perpendiculaire à l'extrémité A du rayon OA.

En effet, tout point M autre que A, pris sur AT, étant situé hors de la circonférence, est plus éloigné du centre que le point A; par suite OA est la plus courte distance du point O à la droite AT : donc OA est perpendiculaire sur AT au point A.

176. Corollaire I. — *En un point* A *d'une circonférence on peut mener une tangente* AT *et une seule,* car un seul rayon OA peut passer par le point A.

177. Corollaire II. — *La perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente* AT *passe par le point de contact* A, car cette perpendiculaire se confond avec le rayon OA.

178. Corollaire III. — *La perpendiculaire* AO *menée à une tangente au point de contact passe par le centre* O, car le rayon OA, perpendiculaire à la tangente AT au point A, est la seule perpendiculaire qui puisse passer par ce point.

179. Autre définition de la tangente. — *La tangente est la position limite vers laquelle tend une sécante* AB, *qui tourne autour du point* A, *jusqu'à ce que le second point* B, *où elle rencontre la circonférence, vienne se confondre avec le point* A ; car si l'on suppose qu'une sécante AB tourne autour du point A et prenne successivement les positions AB′, AB″..., il arrive que le point B se rapproche indéfini-

ment du point A et finit par se confondre avec lui. Alors la sécante AB n'ayant plus que le seul point A de commun avec la circonférence, est devenue la tangente AT (*fig.* 123).

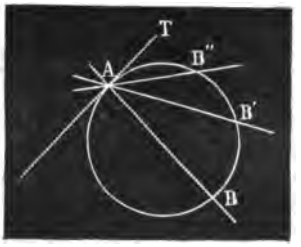


FIG. 123.

FIG. 124.

180. Définition. — On appelle *normale* à une circonférence, en un point, la perpendiculaire menée par ce point à la tangente au point considéré (*fig.* 124).

Ainsi, la perpendiculaire AN, menée par le point A à la tangente AT, est normale à la circonférence O. Le point A est le *pied* de la normale. Il est évident que : *En chaque point d'une circonférence on peut mener une normale, mais une seule, et que cette normale passe par le centre.*

Par un point P, non situé sur la circonférence, on peut mener à cette courbe deux normales, PA, PB ; elles sont l'une et l'autre situées sur le diamètre qui passe par le point P, et elles ont pour *pied*, l'une l'extrémité A du diamètre et l'autre l'extrémité B (*fig.* 125).

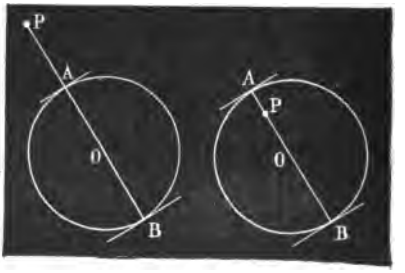


FIG. 125.

181. Remarque. — Il résulte de ce qui précède que la distance d'un point quelconque à la circonférence est la plus petite des deux normales menées de ce point à la circonférence.

§ III. — ARCS ET CORDES.

Définitions.

182. Arc. — On appelle *arc* toute portion de circonférence. Par exemple, AMB est un arc (*fig.* 126).

183. Corde. — La *corde* est une droite qui joint les deux extrémités d'un arc. Ainsi AB est une corde.

On voit que toute corde sous-tend deux arcs ; par exemple, la corde AB sous-tend l'arc AMB et l'arc AEB. Sauf indication contraire, on considère toujours le plus petit des deux arcs.

184. Segment. — On appelle *segment* la portion de cercle comprise entre un arc et sa corde. Ex. : la surface AMB.

185. Secteur. — On nomme *secteur* la portion de cercle comprise entre deux rayons et l'arc qu'ils limitent. Ex. : la surface EOF.

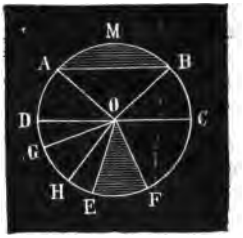


FIG. 126.

186. Figure inscrite. — On nomme *figure inscrite* une figure dont tous les sommets sont sur la circonférence. Le cercle est dit en même temps *circonscrit* à la figure.

187. Figure circonscrite. — On appelle *figure circonscrite* une figure dont tous les côtés sont tangents à la circonférence. Le cercle est dit en même temps inscrit dans la figure.

THÉORÈME

188. — *La plus grande corde du cercle est le diamètre.*

En effet, une corde quelconque AB est moindre que la somme des rayons OA + OB ou moindre qu'un diamètre, puisque la somme de deux rayons vaut un diamètre.

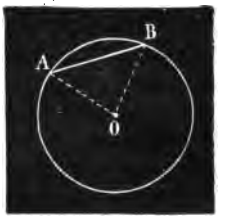


FIG. 127.

THÉORÈME

189. — *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, des arcs égaux sont sous-tendus par des cordes égales et réciproquement les cordes égales sous-tendent des arcs égaux.*

Soient, dans deux cercles égaux O et O', des arcs égaux AMB et A'M'B'. Je dis que les cordes AB et A'B' qui sous-tendent ces arcs, sont égales.

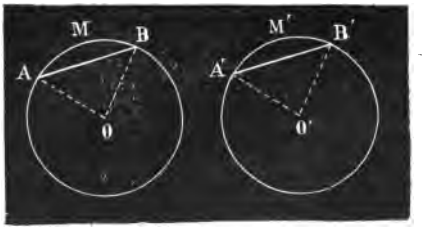


FIG. 128.

En effet, portons le cercle O' sur le cercle O, de façon que les centres coïncident ainsi que les points A et A'; les cercles étant égaux coïncideront aussi, et il en sera de même des arcs égaux AMB, A'M'B'; par suite, le point B' tombera

en B : les cordes AB et A′B′ auront donc mêmes extrémités, donc elles coïncideront et seront égales.

190. Réciproquement, soient dans les cercles égaux O et O′ les cordes égales AB et A′B′. Je dis que les arcs AMB, A′M′B′, sous-tendus par ces cordes, sont égaux.

En effet, menons les rayons OA, OB, O′A′, O′B′. Les triangles AOB, A′O′B′ ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun sont égaux. Si donc nous portons le cercle O′ sur le cercle O de façon que les triangles A′O′B′, AOB coïncident, les cercles coïncideront aussi, et, par suite, les arcs considérés AMB, A′M′B′, ayant mêmes extrémités, coïncideront également et seront égaux.

THÉORÈME

191. — *Dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, à un plus grand arc correspond une plus grande corde et réciproquement.*

Soient les deux cercles égaux O, O′ et l'arc AMB du premier plus grand que l'arc CND du second. Je dis que la corde AB sera plus grande que la corde CD.

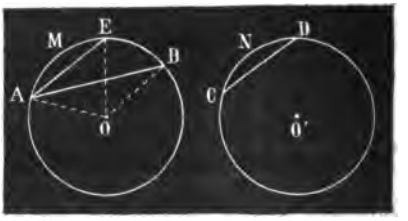


FIG. 129.

Pour le démontrer, prenons sur l'arc AMB une partie AME égale à l'arc CND, puis menons les rayons OA, OE, OB. Les deux triangles AOE, AOB ont deux côtés égaux chacun à chacun, mais comme le point E est situé entre les points A et B, l'angle AOB est plus grand que l'angle AOE, et, par suite, la corde AB est plus grande que la corde AE, ou plus grande que CD, car nous avons fait AE égale à CD.

192. Réciproquement, soient les deux cercles égaux O, O′ et la corde AB du premier plus grande que la corde CD du second.

Je dis que l'arc AMB sera plus grand que l'arc CND.

En effet, si l'arc AMB était égal à CND, la corde AB serait aussi égale à la corde CD, ce qui serait contre l'hypothèse. Si l'arc AMB était plus petit que l'arc CND, la corde AB serait plus petite que la corde CD, ce qui serait encore contre l'hypothèse. L'arc AMB, ne pouvant être ni égal, ni plus petit que l'arc CND, sera nécessairement plus grand.

193. Remarque. — Dans le cas où les arcs considérés sont l'un et l'autre plus grands qu'une demi-circonférence, c'est la plus petite corde qui correspond au plus grand arc : c'est là une conséquence même du théorème qui vient d'être démontré.

THÉORÈME

194. — *Le diamètre perpendiculaire à une corde partage cette corde et chacun des arcs qu'elle sous-tend en deux parties égales.*

Soit dans le cercle O le diamètre DE perpendiculaire à la corde AB. On aura : AC = CB, arc AE = arc BE, et arc AD = BD.

En effet, les obliques OA, OB étant deux rayons sont égales, donc elles s'écartent également du pied de la perpendiculaire DE (73) et AC = CB. D'autre part, puisque AC = CB, les obliques AE et BE s'écartent également du pied de la perpendiculaire EC, donc elles sont égales, et par conséquent (190) arc AE = arc BE.

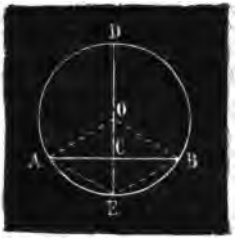


FIG. 130.

On démontre de même l'égalité des arcs AD et BD.

195. Remarque. — Le diamètre ED satisfait à *cinq* conditions, car il est perpendiculaire à la corde AB et passe par les quatre points distincts E, C, O, D, qui sont par conséquent en ligne droite. Or, deux conditions suffisent pour déterminer la position d'une ligne droite : donc toute droite satisfaisant à deux de ces conditions remplira les trois autres. Ainsi, par exemple :

La droite qui joint les milieux de deux arcs sous-tendus par une corde est un diamètre perpendiculaire au milieu de cette corde.

Car la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde passe par le centre du cercle et par les milieux des arcs sous-tendus.

THÉORÈME

196. — *Dans le même cercle ou dans des cercles égaux les cordes égales sont également éloignées du centre, et de deux cordes inégales, la plus grande est la plus rapprochée du centre.*

1° Soient les cordes égales AB, CD tracées dans le cercle O. Je dis que les perpendiculaires OM, ON qui mesurent la distance du centre aux cordes AB, CD sont aussi égales.

En effet, si l'on mène les rayons OB, OD, on forme deux triangles rectangles qui ont les hypoténuses égales : OB = OD comme rayons d'un même cercle, et les côtés BM, DN égaux comme moitiés des cordes égales AB, CD ; donc ces deux triangles sont égaux, et OM = ON, donc les cordes AB, CD sont également éloignées du centre O.

FIG. 131.

2° Soit dans le cercle O la corde AB plus grande que la corde CD.

Je dis que la perpendiculaire OM sera plus courte que la perpendiculaire ON.

En effet, l'arc AB étant plus grand que l'arc CD, prenons sur AB un arc AE égal à l'arc CD, et menons la corde AE qui sera égale à la corde CD. Les cordes CD et AE étant égales, on a ON = ON′ ; mais la perpendiculaire OM est plus courte que l'oblique OI, donc, à bien plus forte raison, a-t-on OM < ON′, ou que son égale ON : donc la corde AB est plus rapprochée du centre O que la corde CD. C. q. f. d.

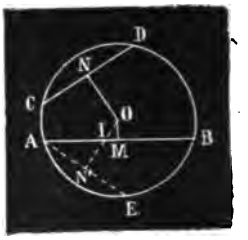


FIG. 132.

197. Corollaire I. — *Les cordes égales d'une même circonférence sont tangentes à une circonférence concentrique à la première qu'elles enveloppent, et cette circonférence concentrique est le lieu des milieux de ces cordes égales.*

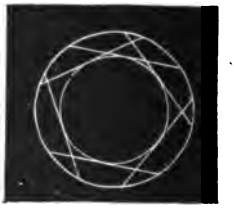


FIG. 133.

198. Corollaire II. — *La corde* minimum *passant par un point intérieur à une circonférence est perpendiculaire au diamètre de ce point* (*fig.* 134).

Soit AB la corde perpendiculaire au diamètre EF du point donné M.

Menons une corde arbitraire CD passant par le même point M et traçons la perpendiculaire ON. Cette perpendiculaire étant plus courte que OM, il en résulte, d'après la seconde partie du théorème, que la corde CD est plus longue que la corde AB.

FIG. 134.

199. Remarque. — Les réciproques des deux parties du théorème sont vraies et faciles à démontrer.

(*Voir une démonstration analogue N*° 192.)

THÉORÈME

200. — *Deux droites parallèles interceptent sur une circonférence des arcs égaux.*

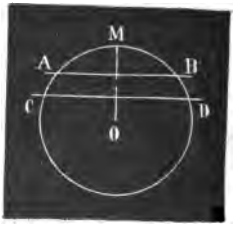


FIG. 135.

Il y a trois cas à considérer.

1° Les deux parallèles AB, CD, dans le cercle O, sont sécantes.

On aura : arc AC = arc BD.

En effet, si l'on mène le rayon OM perpendiculaire à la sécante CD,

il le sera aussi à sa parallèle AB (98) et divisera en deux parties égales chacun des arcs CMD et AMB (194) : on aura, par conséquent,

$$CM = MD,$$
$$AM = MB.$$

En retranchant ces égalités membre à membre, on obtient :

$$CM - AM = MD - MB$$
ou arc AC = arc BD.

2° L'une des parallèles, AB, est tangente à la circonférence; l'autre, CD, est sécante.

On aura : arc CM = arc DM.

En effet, joignons le centre O au point de contact M. Le rayon OM est perpendiculaire à la tangente AB et à sa parallèle CD. Or, OM, étant perpendiculaire à la corde CD, divise l'arc CMD en deux parties égales et nous avons, par suite

arc CM = arc DM.

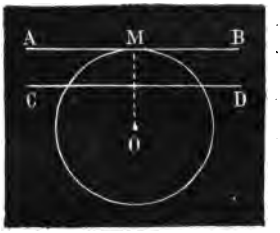


FIG. 136.

3° Les parallèles AB, CD sont l'une et l'autre tangentes à la circonférence.

On aura : arc MEN = arc MFN.

Joignons encore le centre O au point de contact M; OM est perpendiculaire à AB et, par suite, à sa parallèle CD. Mais la perpendiculaire menée du centre à la tangente passe par le point de contact. Donc le rayon OM prolongé passe au point de contact N de la tangente CD. Par conséquent MON est un diamètre qui partage la circonférence en deux parties égales, d'où

arc MEN = arc MFN.

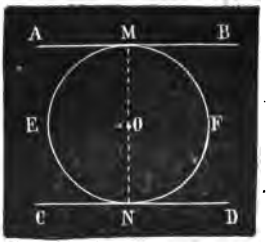


FIG. 137.

201. Corollaire. — *Les points de contact de deux tangentes parallèles sont les extrémités d'un même diamètre.*

APPLICATION I. — PROBLÈME

202. — *Décrire une circonférence tangente en un point* P *d'une droite donnée et passant par un autre point* M *également donné* (*fig.* 138).

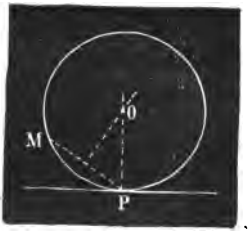


FIG. 138.

Le centre devra se trouver sur un point de la perpendiculaire PO

et sur un point de la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde MP : donc ce centre est au point O, lieu de rencontre des deux perpendiculaires.

APPLICATION II. — PROBLÈME

203. — *Inscrire un cercle dans un triangle donné.*

Le centre O du cercle inscrit doit se trouver à égale distance de chaque côté du triangle ABC, or, tout point de la bissectrice de l'angle A est à égale distance des côtes AB, AC : donc le point O se trouve sur cette bissectrice. On voit de même qu'il doit se trouver sur les bissectrices des angles B et C : donc, il est au point de concours O de ces bissectrices.

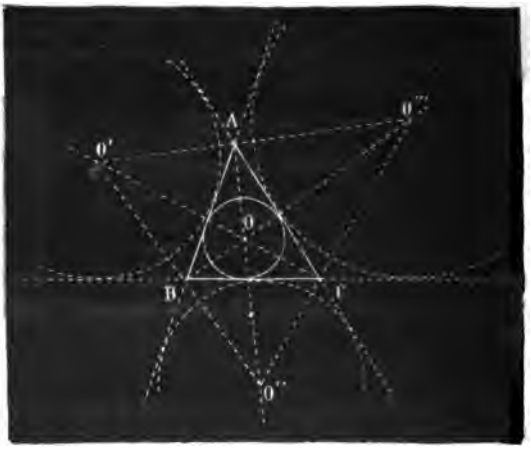


FIG. 139.

204. Remarque. — Les bissectrices AO′ et BO′, BO″ et CO″, AO‴, CO‴, des angles extérieurs concourent aux points O′, O″, O‴ qui sont les centres des cercles *ex-inscrits*. Il existe donc quatre circonférences tangentes à trois droites concourantes données.

La figure 139 montre en même temps que les hauteurs d'un triangle O′O″O‴ sont les bissectrices du triangle ABC formé en joignant deux à deux les pieds de ces hauteurs.

CHAPITRE II

Positions relatives de deux circonférences.

THÉORÈME

205. — ***Par trois*** *points non en ligne droite, on peut faire passer une* ***circonférence****, mais une seule.*

Soient A, B, C trois points non en ligne droite. Je dis que, par ces trois points, on ne peut faire passer qu'une seule circonférence. En effet, traçons les droites AB, BC et sur les milieux de ces droites

élevons les perpendiculaires DE, FG qui se rencontreront (102) en un certain point O. Ce point étant à la fois sur les perpendiculaires DE, FG, les distances OA, OB, OC sont égales (73). Si donc du point O on décrit une circonférence, en prenant OA pour rayon, cette circonférence passera par les trois points A, B, C. Elle sera d'ailleurs la seule satisfaisant à cette condition; car toute circonférence passant par les trois points A, B, C devra avoir, en même temps, son centre sur DE et sur FG : donc il sera en O, point de concours de ces droites. Donc par les trois points donnés on peut faire passer une circonférence et n'en faire passer qu'une.

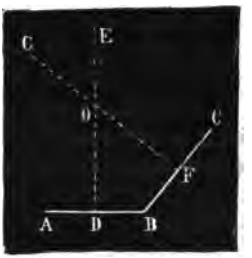


FIG. 140.

206. Corollaire. — *Deux circonférences ne peuvent avoir plus de deux points communs.*

THÉORÈME

207. — *Lorsque deux circonférences ont un point de commun hors de la ligne des centres, elles ont un second point de commun symétrique du premier par rapport à cette ligne.*

En effet, soit A un point commun aux circonférences O, O′ situé hors de la ligne des centres OO′. Prenons le symétrique A′ du point A par rapport à OO′. La figure donne alors OA = OA′ et O′A = O′A′ : donc les deux circonférences qui passent au point A passeront aussi au point A′.

FIG. 141.

208. Corollaire I. — *Lorsque deux circonférences se coupent, la ligne des centres est perpendiculaire au milieu de la corde commune,* car les circonférences O et O′ passant l'une et l'autre en A et A′, la droite AA′ est bien une corde commune.

209. Corollaire II. — *Lorsque deux circonférences sont tangentes, leur point de contact est sur la droite qui joint leurs centres;* car si ce point n'était pas sur la ligne des centres, il serait hors de cette ligne; mais alors les deux circonférences auraient un second point de commun, ce qui serait contre l'hypothèse.

210. Définition. — On appelle *angle de deux courbes* en un point commun, l'angle formé par les tangentes à ces courbes en ce point.

Lorsque l'angle de deux circonférences est droit, on dit qu'elles sont *orthogonales.*

211. — Deux circonférences peuvent occuper cinq positions relatives :

1° Elles peuvent être *extérieures;*

2° Avoir *un point de commun et être tangentes extérieurement;*

3° Avoir *deux points de communs ou sécantes;*

4° Avoir *un point de commun et être tangentes intérieurement;*

5° Être *intérieures*

Les relations de grandeur entre les rayons des circonférences et la distance des centres caractérisant ces cinq positions sont exprimées dans le théorème suivant :

THÉORÈME

212. — 1° *Si deux circonférences sont extérieures, la distance des centres est plus grande que la somme des rayons;*

2° *Si elles sont tangentes extérieurement, la distance des centres est égale à la somme des rayons;*

3° *Si elles sont sécantes, la distance des centres est comprise entre la somme et la différence des rayons;*

4° *Si elles sont tangentes intérieurement, la distance des centres est égale à la différence des rayons;*

5° *Si l'une est intérieure à l'autre, la distance des centres est moindre que la différences des rayons.*

1° Soient les circonférences extérieures O et O′ (*fig.* 142), dont les

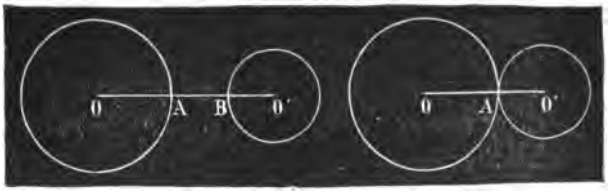


FIG. 142. FIG. 143.

rayons sont OA, O′B et la distance des centres OO′. On a :

$$OO' = OA + AB + O'B.$$

Donc, on a bien :

$$OO' > OA + O'B.$$

2° Soient les circonférences O et O′ tangentes extérieurement (*fig.* 143).

Le point de contact A étant sur OO′, entre O et O′, on a évidemment

$$OO' = OA + AO'.$$

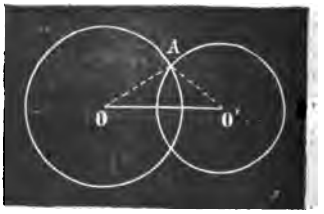


FIG. 144.

3° Soient les circonférences sécantes O et O′ (*fig.* 144).

Elles ont un point commun A hors de la ligne OO′, on peut donc construire le triangle OAO′, lequel donne (57)

$$OA + O'A > OO' > OA - O'A.$$

4° Soit la circonférence O′ tangente intérieurement à la circonférence O (*fig.* 145).

Le point de contact A est situé sur le prolongement de la ligne OO′, et l'on a :

$$OO' = OA - O'A;$$

5° Soit la circonférence O′ intérieure à la circonférence O (*fig.* 146).

La différence des rayons est :

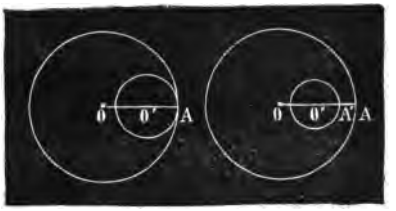


FIG. 145. FIG. 146.

$$OA - O'A' = OO' + A'A;$$

La distance des centres étant OO′, on a évidemment :

$$OO' < OA - O'A'.$$

213. Remarque I. — Les cinq parties du théorème que nous venons de démontrer traduisant toutes les hypothèses possibles que l'on peut faire sur les positions relatives de deux circonférences, il en résulte que les cinq réciproques sont vraies, et se démontrent, d'ailleurs, de la même manière. Exemple :

Lorsque la distance des centres est plus grande que la somme des rayons, les circonférences sont extérieures.

En effet, elles ne peuvent pas être tangentes extérieurement, car la distance des centres serait égale à la somme des rayons, ce qui serait contre l'hypothèse; elles ne peuvent pas non plus se couper, car la distance des centres serait comprise entre la somme et la différence des rayons, ce qui est encore contre l'hypothèse, etc.

Les deux circonférences ne pouvant être ni tangentes extérieurement, ni sécantes, etc., seront forcément extérieures.

214. Remarque II. — On voit, d'après ce qui précède, que :

1° *Deux circonférences ont un point de commun lorsque la distance des centres est égale à la somme ou à la différence des rayons;*

2° *Deux circonférences ont deux points de communs lorsque la distance des centres est comprise entre la somme et la différence des rayons;*

3° *Deux circonférences sont extérieures ou intérieures, selon que la distance des centres est plus grande que la somme des rayons ou plus petite que leur différence.*

215. Remarque III. — En appelant *d* la distance des cen-

tres et r, r' les rayons des circonférences, on peut résumer le théorème dans le tableau suivant :

1° Si l'on a : $d > r + r'$, les circonférences sont extérieures,

2° Si l'on a : $d = r + r'$, les deux circonférences sont tangentes extérieurement ;

3° Si l'on a : $r + r' > d > r - r'$, les circonférences sont sécantes ;

4° Si l'on a : $d = r - r'$, les circonférences sont tangentes intérieurement ;

5° Si l'on a : $d < r - r'$, les circonférences sont intérieures.

Dans le cas où l'on aura $d = o$, les deux circonférences seront concentriques.

CHAPITRE III

Mesure des angles

Définitions.

216. Angle au centre. — On appelle *angle au centre* un angle dont le sommet est au centre de la circonférence : tel est l'angle AOB (*fig.* 147).

FIG. 147.

217. Angle inscrit. — *L'angle inscrit* est un angle qui a son sommet sur la circonférence : tel est l'angle ACB.

218. Mesurer un angle. — En général, *mesurer* une grandeur, c'est la comparer à une autre *grandeur connue* de même espèce qu'on appelle unité. *Mesurer un angle*, c'est donc le comparer à un autre angle connu pris pour unité.

THÉORÈME

219. — *Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, les angles au centre égaux interceptent des arcs égaux et réciproquement.*

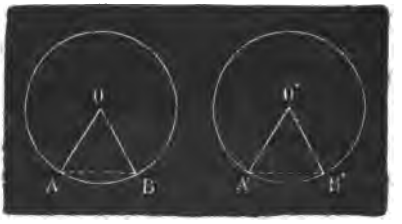


FIG. 148.

Soient O et O′ deux angles au centre égaux tracés dans deux cercles égaux. Il faut démontrer que : arc AB = arc A′B′.

Menons les cordes AB, A′B′. Les deux triangles AOB, A′O′B′ ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, donc ils sont égaux. Par suite, les cordes AB, A′B′ sont égales. D'où (190) :

arc AB = arc A′B′.

220. Réciproquement. — Si les arcs AB, A′B′ sont égaux, on aura : angle O = angle O′.

En effet, tirons les cordes AB, A′B′ ; ces cordes sous-tendant des arcs égaux sont égales : donc les deux triangles AOB, A′O′B′ sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, donc :

angle O = angle O′.

THÉORÈME

221. — *Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, deux angles au centre sont dans le même rapport que les arcs qu'ils interceptent.*

Soient AOB, A′O′B′ deux angles au centre qui interceptent les arcs AB, A′B′ dans les cercles égaux O et O′.

Il s'agit de démontrer que : $\frac{\text{AOB}}{\text{A′O′B′}} = \frac{\text{AB}}{\text{A′B′}}$.

1° Les arcs AB et A′B′ ont une commune mesure As. Si cette commune mesure est contenue 4 fois dans l'arc AB et 7 fois dans l'arc A′B′, les arcs AB, A′B′ sont entre eux comme les nombres 4 et 7, et nous avons

$$\frac{\text{AB}}{\text{A′B′}} = \frac{4}{7}.$$

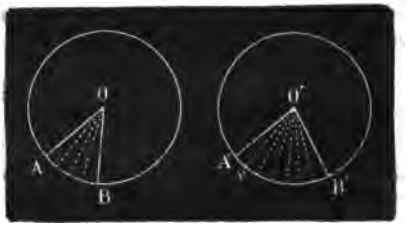


FIG. 149.

Joignons les points de division des arcs aux centres O et O′. Les angles AOB, A′O′B′ sont partagés l'un et l'autre en petits angles tous égaux entre eux, comme interceptant des arcs égaux. Mais 4 de ces angles sont contenus dans AOB et 7 dans A′O′B′. Donc,

$$\frac{\text{AOB}}{\text{A′O′B′}} = \frac{4}{7}.$$

Les quantités $\frac{\text{AB}}{\text{A′B′}}$, $\frac{\text{AOB}}{\text{A′O′B′}}$, étant l'une et l'autre égales à $\frac{4}{7}$ sont égales entre elles : donc

$$\frac{\text{AOB}}{\text{A′O′B′}} = \frac{\text{AB}}{\text{A′B′}}.$$

2° Les arcs AB, A′B′ sont incommensurables. On pourrait se contenter de dire : la démonstration précédente, étant indépendante de la longueur de l'arc As, serait encore vraie dans le cas où cette commune mesure serait moindre que toute quantité appréciable, et, par conséquent, dans le cas où les arcs seraient incommensurables. Mais on peut aussi donner une autre démonstration.

222. — Supposons l'arc A'B' divisé en un nombre quelconque, n, de parties égales à A's, et que l'une de ces parties soit contenue m fois dans AB avec un reste rB plus petit que A's. L'arc AB contenant plus de m fois et moins de $(m+1)$ fois A's, il arrive alors que l'on a :

$$\frac{m}{n} < \frac{AB}{A'B'} < \frac{m+1}{n}.$$

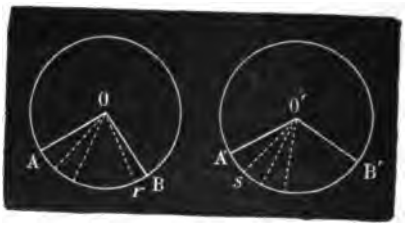


FIG. 150.

En menant des rayons aux points de division des arcs, on forme des angle au centre égaux. L'angle A'O'B' contient n angles égaux à A'O's et l'angle AOB en contient m avec un reste BOr plus petit que A'O's. On a donc :

$$\frac{m}{n} < \frac{AOB}{A'O'B'} < \frac{m+1}{n}.$$

Le rapport des arcs et celui des angles sont donc compris entre $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$, dont la différence est $\frac{1}{n}$. Mais cette quantité a pour limite *zéro*, puisque n peut avoir telle grandeur qu'on voudra. Donc, la différence des deux rapports a pour limite zéro. Donc, dans tous les cas, le rapport des angles est égal au rapport des arcs.

THÉORÈME

223. — *Un angle au centre a même mesure que l'arc qu'il intercepte, si l'on prend pour unité d'arc celui qui est intercepté par l'unité d'angle.*

Soit AOB l'angle à mesurer (*fig.* 151).

Prenons, comme *unité* d'angle, un angle au centre quelconque DOC, interceptant, d'après l'hypothèse, l'*unité* d'arc DC. Le théorème précédent donne

$$\frac{AOB}{DOC} = \frac{\text{arc AB}}{\text{arc DC}}.$$

FIG. 151.

Or, le premier de ces deux rapport égaux exprime la mesure de l'angle AOB (218) et le second la mesure de l'arc AB : donc ces deux mesures sont égales.

224. Remarque I. — Dans le langage ordinaire, on dit, pour abréger : *L'angle au centre a pour mesure l'arc compris entre ses côtés.*

225. Remarque II. — La démonstration du théorème est

indépendante de l'unité d'angle et de l'unité d'arc. Comme, en général, on prend l'*angle droit* pour unité d'angle, l'unité d'arc est le *quadrant* ou quart de la circonférence.

Mais en prenant le quadrant pour unité de mesure, il arrive que la valeur d'un angle est presque toujours exprimée par une fraction. Afin de faciliter la comparaison des arcs et d'exprimer plus simplement, en nombres, ces arcs et, par suite, les angles qui leur correspondent, on a divisé la circonférence en 360 parties égales appelées *degrés;* le degré en 60 *minutes*, la minute en 60 *secondes*.

Actuellement, on divise plus fréquemment la circonférence en 400 parties égales appelées *grades*.

Le grade se subdivise en décigrades, centigrades (ou minutes centésimales), milligrades, dix-milligrades (ou secondes centésimales).

Le quadrant vaut donc 90 *degrés* ou 100 *grades* ainsi que l'angle qui lui correspond.

226. — La valeur d'un angle ou d'un arc s'énonce en disant combien il contient de degrés, minutes, secondes, ou combien de grades, décigrades, centigrades. Si, par exemple, l'arc intercepté par les côtés d'un angle au centre vaut 25 degrés 15 minutes 35 secondes, ce nombre, qui s'écrit 25° 15′ 35″, est équivalent à 28 grades 6 centigrades 64 dix-milligrades qui s'écrit: $28^{g},0664$, ou encore 28^{g}, 06′ 64″ et se lirait dans ce cas 28 grades 6 minutes centésimales 64 secondes centésimales. Ce nombre de degrés ou de grades indique la mesure de l'arc aussi bien que la mesure de l'angle.

THÉORÈME

227. — *Un angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

Nous considérerons trois cas.

1° Le centre O du cercle est sur l'un des côtés AC de l'angle inscrit A.

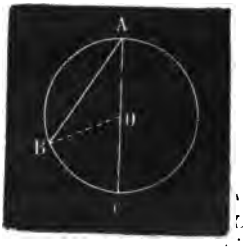


FIG. 152.

L'angle inscrit A a pour mesure $\frac{BC}{2}$.

Pour le démontrer, menons le rayon OB. Le triangle AOB est isocèle, et les angles A et B sont égaux. Mais l'angle BOC extérieur au triangle ABO est égal à la somme des angles A et B. Donc, l'angle A est la moitié de l'angle BOC. Or, l'angle au centre BOC a pour mesure l'arc BC compris entre ses côtés. Donc l'angle A a pour mesure la moitié de cet arc, ou $\frac{BC}{2}$.

2° Le centre O du cercle est dans l'intérieur de l'angle inscrit BAC.

L'angle inscrit BAC a pour mesure $\frac{BC}{2}$. Pour le prouver, menons le diamètre AD. D'après le cas précédent, l'angle 1 a pour mesure $\frac{BD}{2}$, et l'angle 2 a pour mesure $\frac{DC}{2}$: donc l'angle BAC, somme des angles 1 et 2, a pour mesure $\frac{BD}{2} + \frac{DC}{2}$ ou $\frac{BC}{2}$.

FIG. 153.

3° Le centre O du cercle est extérieur à l'angle inscrit BAC.

L'angle inscrit BAC a pour mesure $\frac{BC}{2}$. En effet, menons le diamètre AD. D'après le premier cas, l'angle total BAD a pour mesure $\frac{BD}{2}$ ou $\frac{BC}{2} + \frac{CD}{2}$; mais l'angle 2 a pour mesure $\frac{CD}{2}$: donc l'angle 1 ou BAC a pour mesure $\frac{BC}{2}$.

FIG. 154.

228. Corollaire I. — *Tous les angles A, A', A'' inscrits... dans un même segment de cercle BAC sont égaux*, car ils ont tous pour mesure la moitié de l'arc BMC (*fig.* 155).

229. Corollaire II. — *Tous les angles A, A'... inscrits dans un demi-cercle BAC* (*fig.* 156) *sont droits*, car tous ont pour mesure la moitié de la demi-circonférence BMC.

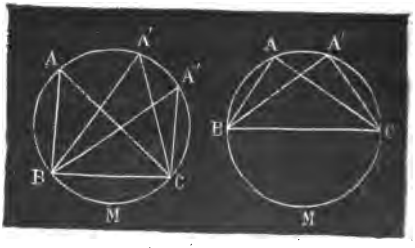


FIG. 155.

FIG. 156.

THÉORÈME

230. — *Un angle formé par une tangente et une corde a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

Soit BAC l'angle considéré.

Cet angle a pour mesure la moitié de l'arc AC compris entre ses côtés, ou $\frac{AC}{2}$. En effet, menons au point de contact A le diamètre AD.

FIG. 157.

L'angle BAD est droit, et il a pour mesure la moitié de la demi-circonférence ACD ou $\frac{AC}{2}+\frac{CD}{D}$; mais la mesure de l'angle inscrit CAD est $\frac{CD}{2}$: donc celle de l'angle BAC est $\frac{AC}{2}$.

On voit de même que la mesure de l'angle CAE est égale à la moitié de l'arc CD plus la moitié de l'arc DMA, ou la moitié de l'arc CDMA.

THÉORÈME

231. — *Un angle BAC formé par une corde BA et le prolongement AC d'une autre corde DA a pour mesure la demi-somme des arcs BMA, AND sous-tendus par les deux cordes.*

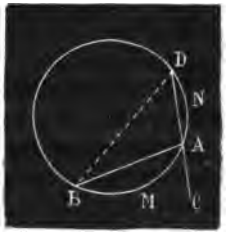


FIG. 158.

Menons la droite BD. Dans le triangle BAD, l'angle extérieur BAC est la somme des angles B et D qui ne lui sont point adjacents; mais l'angle B a pour mesure la moitié de l'arc AND, et l'angle D la moitié de l'arc BMA.

L'angle BAC aura donc, lui aussi, pour mesure la demi-somme de ces deux arcs.

THÉORÈME

232. — *Un angle dont le sommet est à l'intérieur d'un cercle a pour mesure la demi-somme des arcs compris entre ses côtés et leurs prolongements.*

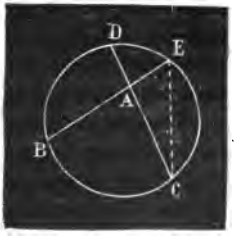


FIG. 159.

Soit l'angle intérieur BAC.

Cet angle a pour mesure $\frac{BC}{2}+\frac{DE}{2}$. En effet, menons la corde CE.

L'angle BAC, étant extérieur au triangle AEC, est égal à la somme des angles E et C; mais l'angle E a pour mesure $\frac{BC}{2}$, et l'angle C a

pour mesure $\frac{DE}{2}$: donc l'angle BAC, somme de ces deux angles, a pour mesure $\frac{BC}{2} + \frac{DE}{2}$.

THÉORÈME

233. — *Un angle formé par deux sécantes qui se coupent hors du cercle a pour mesure la demi-différence des arcs compris entre ses côtés.*

Soit l'angle A formé par les sécantes AB, AC.

Cet angle a pour mesure $\frac{BC}{2} - \frac{DE}{2}$. En effet, menons la corde CD. L'angle BDC étant extérieur au triangle ACD est égal à la somme des angles A et C; par suite, l'angle A est égal à la différence des angles BDC et C; mais BDC a pour mesure $\frac{BC}{2}$ et C a pour mesure $\frac{DE}{2}$: donc l'angle A, différence de ces deux angles, a pour mesure $\frac{BC}{2} - \frac{DE}{2}$.

FIG. 160.

234. Remarque. — Il est évident que cette démonstration est indépendante de la grandeur des arcs BC, DE. Elle s'applique, par conséquent, au cas où l'un des côtés de l'angle ou tous les deux sont tangents à la circonférence.

Donc :

1° Un angle A formé par une sécante et une tangente à un cercle (*fig.* 161) a pour mesure la demi-différence des arcs BC et DC compris entre ses côtés;

2° Un angle A formé par deux tangentes à un cercle (*fig.* 162) a pour mesure la demi-différence des arcs BMC, BNC compris entre ses côtés.

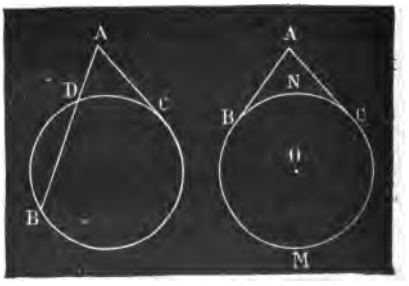


FIG. 161. FIG. 162.

L'angle A, formé par les deux tangentes issues de ce point, est l'*angle sous lequel on voit le cercle* O *du point* A.

THÉORÈME

235. — *Les angles opposés d'un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle sont supplémentaires.*

Soient les angles A et C du quadrilatère inscrit ABCD. Le premier a pour mesure $\frac{BCD}{2}$ et le second $\frac{BAD}{2}$. Leur somme a, par conséquent, pour mesure la moitié de la circonférence entière ou deux angles droits : donc les angles opposés A et C sont supplémentaires.

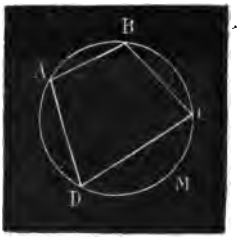


FIG. 163.

236. Réciproquement, *tout quadrilatère convexe dont deux angles opposés sont supplémentaires est inscriptible.*

Supposons que dans le quadrilatère ABCD les angles A et C soient supplémentaires. Décrivons la circonférence passant par les trois points A, B, D. L'angle A a pour mesure la moitié de l'arc BMD; l'angle BCD lui étant supplémentaire par hypothèse a pour mesure la moitié de l'arc BAD; or, pour que l'angle BCD ait cette mesure, il faut que son sommet C soit sur la circonférence passant déjà par les trois points A, B, D.

D'après ce théorème, il *faut et il suffit* qu'un quadrilatère convexe ait deux angles opposés supplémentaires pour qu'il soit inscriptible.

CHAPITRE IV

Mouvement de rotation autour d'un point et déplacement d'une figure plane de forme invariable.

---

237. Définition. — On dit qu'une figure F d'un plan P est animée d'un mouvement de *rotation* autour d'un *point fixe* O de ce plan (*fig.* 164), lorsque tous les points de cette figure parcourent, en même temps, et dans le même sens, des arcs de cercle dont le point O est le *centre*.

THÉORÈME

238. — *Les divers points A, B, C... d'une figure plane, de forme invariable, animés d'un mouvement de rotation autour du centre O, se déplacent en décrivant, dans le même sens, des arcs auxquels correspondent des angles égaux au centre.*

Soit d'abord (*fig.* 164) les deux points A et B, ces points ayant, par exemple, décrit des arcs AMA′ et BNB′, il faut démontrer que les angles AOA′, BOB′ qui correspondent à ces arcs, sont égaux.

En effet, par définition, les points A et B sont, dans le mouvement de rotation, constamment à la même distance l'un de l'autre et du point O. Si donc nous menons la droite AB, le triangle ABO, en

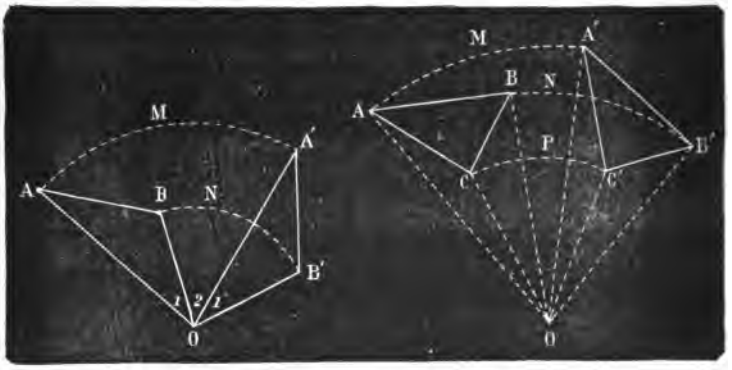


FIG. 164.

FIG. 165.

tournant autour du point O, reste toujours égal à lui-même, de sorte que s'il prend la position A'B'O les angles 1 et 1' ne cessent pas d'être égaux ; mais, si l'on ajoute à chacun de ces angles successivement l'angle 2, il y aura encore égalité. Donc enfin, les angles AOA' et BOB', correspondants aux arcs AMA' et BNB', sont égaux.

Soit en second lieu (*fig.* 165) trois points quelconques A, B, C, formant le triangle ABC, relié au point de rotation O par les droites AO, BO, CO.

Si l'on suppose que ce triangle, en tournant autour du centre O, a pris la position A'B'C', il faut démontrer que les arcs AMA', BNB', CPC' décrits par les points A, B, C correspondent à des angles égaux au centre.

En effet, si l'on considère le triangle BOC, on voit immédiatement, d'après ce qui vient d'être dit, que les arcs CPC', BNB' décrits par les points C et B correspondent à des angles au centre, COC' et BOB', qui sont égaux.

De même, en considérant le triangle ABO, on voit que les angles AOA' et BOB' sont aussi égaux : donc les trois arcs AMA', BNB', CPC' correspondent à trois angles égaux au centre.

239. Réciproquement, *si divers points A, B, C,... d'un plan décrivent, en même temps, autour d'un point O et dans le même sens, des arcs correspondants à des angles égaux, la figure, dont ces divers points sont les sommets, reste de forme invariable.*

Soit, par exemple, les trois points A, B, C formant le triangle ABC (*fig.* 166) amené en A'B'C' par suite d'une rotation autour du point O.

Il faut démontrer qu'on a, après la rotation,

$$AB = A'B',\ AC = A'C',\ BC = B'C'.$$

En effet, par hypothèse, les angles AOA′ et BOB′ sont égaux. Or, si de l'angle total AOB′, nous retranchons successivement les deux angles égaux BOB′ et AOA′, les deux restes ou les angles AOB et A′OB′ sont aussi égaux. Mais de l'égalité de ces derniers angles, il résulte que les triangles OAB et OA′B′ sont égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés respectivement égaux : donc AB est égal à A′B′. On démontrerait de même l'égalité des côtés AC et A′C′, BC et B′C′, puisque l'angle COC′ est égal à AOA′ et à BOB′.

Bien que nous nous soyons arrêté à la considération de trois points, il est évident que ces démonstrations sont générales.

THÉORÈME

240. — *Tout déplacement d'une figure plane de forme invariable dans son plan, se ramène à une translation ou à une rotation.*

Soient deux positions AB, A′B′ d'un côté d'un polygone mobile dans son plan (*fig.* 166, *fig.* 167 et *fig.* 168).

Il faut démontrer que la deuxième position A′B′ a été obtenue par

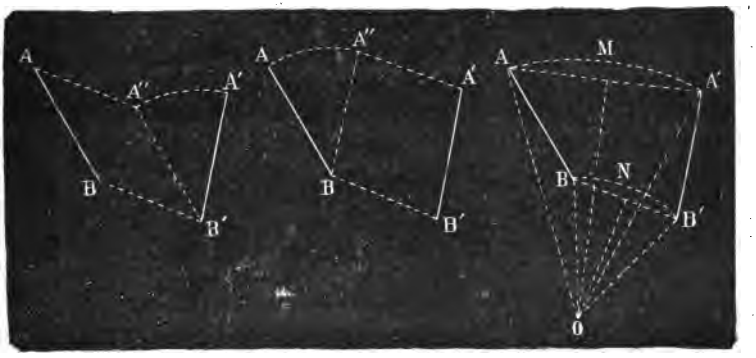


FIG. 166. FIG. 167. FIG. 168.

translation ou par rotation.

Or, deux cas se présentent : AB et A′B′ sont parallèles ou se coupent en un point.

1° Si ces droites sont parallèles la position A′B′ a été obtenue par translation (139).

2° Si les droites AB et A′B′ sont concourantes, le côté AB a pu être amené en A′B′ par une rotation, et c'est ce qui va être expliqué.

Il semble *a priori* que la position A′B′ (*fig.* 166) soit le résultat d'abord d'une translation de AB en A″B″, puis d'une rotation en A′B′, ou (*fig.* 167) d'abord d'une rotation de AB en A″B, puis d'une translation en A′B′ ; mais il n'en est pas ainsi, une seule rotation peut amener ce résultat.

En effet, il est facile de voir que, s'il y a rotation, le centre de rotation doit se trouver à la fois sur la perpendiculaire MO élevée au milieu de la corde AA′ et sur la perpendiculaire NO élevée au milieu de la corde BB : ce centre est donc le point O.

Or, pour qu'on puisse amener le côté AB à la position A′B′ par une rotation autour du point O, *il faut et il suffit* que les deux angles AOB et A′OB′ soient égaux, et c'est précisément ce qui a lieu ; car les triangles AOB et A′OB′ sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun. Si donc le côté AB tourne dans son plan, ayant le point O pour centre de rotation, le point A viendra en A′ et le point B en B′.

Donc, *tout déplacement d'une figure plane de forme invariable dans son plan se ramène à une translation ou à une rotation*. Il y a *translation*, lorsque deux positions d'un même côté sont des droites parallèles et de même sens ; il y a *rotation* dans les autres cas.

CHAPITRE V

Usage de la règle et du compas. — Rapporteur. — Problèmes élémentaires et lieux géométriques.

---

§ Ier. — USAGE DE LA RÈGLE ET DU COMPAS ; RAPPORTEUR

241. – Nous avons parlé de la règle et de ses divers usages à la fin du premier livre, il n'en sera donc plus question dans ce chapitre.

242. Compas. — Le *compas*, que tout le monde connaît, est formé de deux branches métalliques mobiles, réunies par un axe à l'une de leurs extrémités et terminées à l'autre par des pointes ordinairement d'acier.

Une vis placée en tête du compas sert à régler le frottement autour de l'axe. Ce frottement doit être assez doux pour permettre d'écarter ou de resserrer les branches du compas sans secousses ni effort ; cependant, il faut qu'il soit suffisant pour maintenir invariables les branches de l'instrument lorsqu'on le manie.

Le compas sert à prendre des distances ; mais on l'emploie surtout pour tracer les circonférences et les arcs de cercle. L'une des pointes reste immobile et marque le centre, l'autre, en tournant autour de la première, décrit la circonférence. L'ouverture du compas, ou la distance des deux pointes, est le rayon du cercle.

Les menuisiers, les charpentiers et autres ouvriers travaillant le bois font usage du compas à *pointes sèches*. Les dessinateurs se servent du compas à *pointe de rechange*. C'est un compas où l'on peut remplacer l'une des pointes par un tire-ligne ou un porte-crayon.

243. Rapporteur. — Le *rapporteur* est un demi-cercle gradué, ordinairement de corne transparente, ou de cuivre et alors évidé. Cet instrument sert à mesurer un arc ou un angle, ou bien à construire un arc ou un angle de grandeur donnée. Le bord circulaire

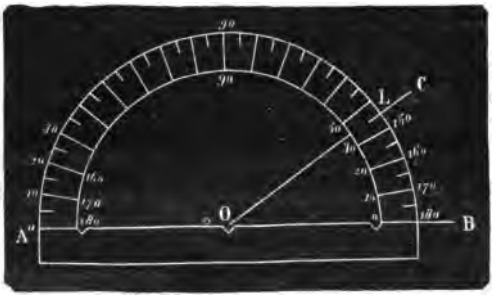


FIG. 169.

ou *limbe* de l'instrument est divisé en 180 degrés (quelquefois en demi-degrés). Les divisions sont indiquées de 10 en 10 degrés et la graduation est double, afin que l'on puisse mesurer les arcs de droite à gauche ou de gauche à droite. La ligne AB, qui est un diamètre, se nomme *ligne de foi*. Il existe en son milieu une légère échancrure O, qui est le *centre* du rapporteur.

Pour mesurer un angle BOC avec le rapporteur, on place le centre de l'instrument au sommet de l'angle, en O, et l'on dirige la ligne de foi sur l'un des côtés OB. Le limbe coupe alors le second côté OC en un point L. La division du limbe qui correspond à ce point fait connaître la valeur de l'angle BOC. Dans la figure 169, l'angle BOC vaut 35°.

Pour construire avec le rapporteur, en un point A (*fig.* 170) d'une droite donnée MN, un angle égal à un angle donné B, on commence par mesurer l'angle B, puis on place le centre du rapporteur au point A, et la ligne de foi dans la direction MN; ensuite on marque sur le papier un point I qui correspond à la valeur de l'angle donné. Enfin on mène AI, et l'on a l'angle demandé, car l'angle IAK a la même mesure que l'angle donné B.

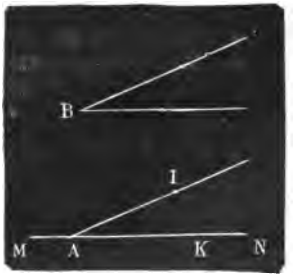


FIG. 170.

Le rapporteur est un instrument très utile en géométrie; mais à la condition qu'il soit exact. Il est donc nécessaire de s'assurer de l'exactitude d'un rapporteur avant d'en faire usage.

A cet effet, on mesure un angle comme il vient d'être indiqué plus haut, puis on fait tourner le rapporteur de manière que son centre reste toujours au sommet de l'angle. Il est évident que si ses divisions sont égales, il s'entrouvera toujours le même nombre entre les côtés de l'angle dans toutes les positions occupées par le rapporteur.

§ II. — PROBLÈMES ÉLÉMENTAIRES ET LIEUX GÉOMÉTRIQUES

PROBLÈME

244. — *Élever une perpendiculaire au milieu d'une droite* AB.

Des points A et B, avec une ouverture de compas arbitraire, mais plus grande que la moitié de AB [1], on décrit deux arcs de cercle qui se coupent en C et en D, et la droite CD est la perpendiculaire demandée; car les points C et D étant équidistants des points A et B appartiennent à la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB : donc le point E, qui est en même temps sur cette perpendiculaire et sur AB, est le milieu de cette dernière droite.

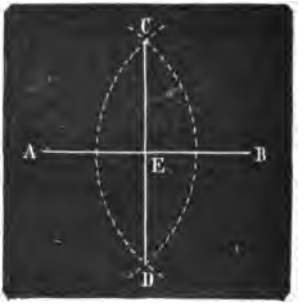


FIG. 171.

245. Remarque. — On voit que cette construction est aussi la solution de cet autre problème : *Partager une droite* AB *en* 2 *parties égales.*

En répétant une construction identique sur les segments AE, EB, la droite serait partagée en 4 parties égales. En procédant toujours de même, on la partagerait en 8, 16... parties égales, c'est-à-dire en un nombre de parties égales marqué par une puissance de 2.

PROBLEME

246. — *Par un point donné mener une perpendiculaire à une droite* AB.

1° Le point donné O est sur la droite AB.

---

1. Pour que les arcs se coupent, l'ouverture de compas doit être plus grande que la moitié de AB, car si elle était égale à la moitié les arcs seraient tangents (218,2°).

Prenons les points A et B à égale distance du point O; puis des points A et B, avec une ouverture de compas plus grande que AO, décrivons deux arcs qui se coupent en D; enfin menons DO qui est la perpendiculaire demandée; car les points D et O étant équidistants des points A et B, il en résulte que DO est perpendiculaire sur le milieu de AB : donc cette droite DO est bien la perpendiculaire cherchée.

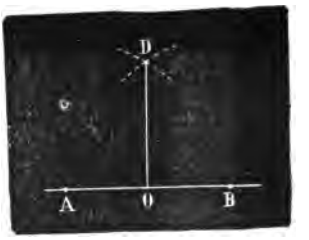


FIG. 172.

2° Le point donné O est extérieur à la droite AB.

Du point O, avec un rayon *convenable*, décrivons un arc qui coupe la droite donnée en deux points A et B. Puis de ces mêmes points, avec un rayon plus grand que la moitié de AB, décrivons deux arcs qui se coupent en D; enfin menons OD, qui sera la perpendiculaire demandée.

Car les points O et D étant équidistants des points A et B, OD est perpendiculaire sur le milieu de AB : donc cette droite perpendiculaire à AB et passant par le point O est bien la perpendiculaire demandée.

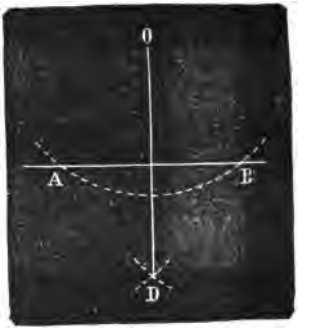


FIG. 173.

247. Remarque. — On pourrait également employer l'équerre ou le rapporteur pour mener la perpendiculaire; la construction serait facile et rapide, mais il est à craindre qu'elle n'ait pas toujours la précision désirable : l'imperfection trop fréquente des instruments et la difficulté de l'exécution rigoureuse des constructions graphiques sont deux causes d'erreur dont il faut se défier.

PROBLÈME

248. — *Élever une perpendiculaire à l'extrémité d'une droite* AB *qu'on ne peut prolonger.*

FIG. 174.

D'un point quelconque O pris au-dessus de AB, décrivons, avec OB pour rayon, une circonférence qui coupe AB en un point C, menons le diamètre CD et enfin tirons BD, qui sera la perpendiculaire demandée; car l'angle inscrit CBD ayant pour mesure la demi-circonférene CMD est droit.

On peut aussi employer l'équerre.

PROBLÈME

249. — *Par un point donné* C, *mener une parallèle à une droite* AB.

Du point donné C, abaissons sur AB la perpendiculaire CD, et du même point C menons à CD la perpendiculaire CE qui sera la parallèle demandée, car deux perpendiculaires AB, CE à une même droite CD, sont parallèles.

FIG. 175.

PROBLÈME

250. — *En un point* A *d'une droite donnée* MN *construire un angle égal à un angle donné* B.

Du point B comme centre et avec une ouverture de compas quelconque, décrivons l'arc de cercle CD ; puis du point A comme centre, avec la même ouverture de compas, l'arc indéfini KL. Enfin, prenons sur KL une partie KI = CD, menons AI, et nous aurons l'angle demandé : IAK = B, car ces deux angles sont opposés à des arcs KI, CD de même rayon et égaux par construction.

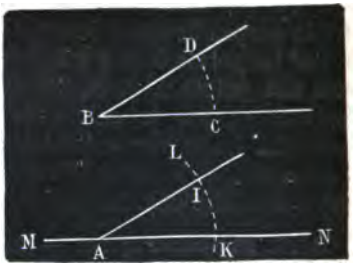


FIG. 176.

PROBLÈME

251. — *Par un point* A, *extérieur à une droite* MN, *faire passer une seconde droite qui fasse avec la première un angle égal à un angle donné* B.

En un point quelconque de MN faisons un angle CDN égal à l'angle B ; puis du point A traçons la parallèle AE à DC. L'angle AEN est l'angle demandé, car il est égal à l'angle CDN et par suite à l'angle B.

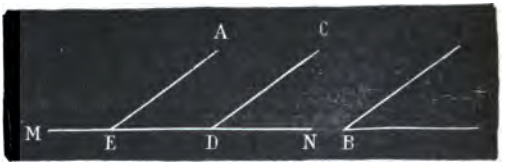


FIG. 177.

PROBLÈME

252. — *Diviser un arc ou un angle en deux parties égales.*

1° Soit l'arc ABC (*fig.* 178) à diviser en deux parties égales.

Menons la corde AC et sur le milieu de cette corde élevons la perpendiculaire EF. Cette perpendiculaire passant par le centre E (194) de l'arc divise l'arc ABC en deux parties égales.

2° Soit à diviser l'angle ABC (*fig.* 179) en deux parties égales.

Du point B avec un rayon quelconque, décrivons l'arc ADC, puis menons la corde AC, enfin, du point B, abaissons sur cette corde la perpendiculaire BD qui divisera l'arc et par suite l'angle en deux parties égales.

FIG. 178.

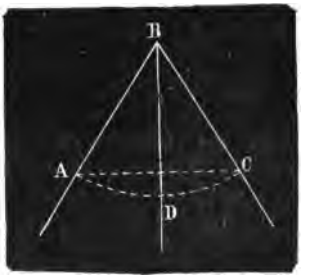


FIG. 179.

La remarque du n° 245 s'applique évidemment au cas de la division d'un arc ou d'un angle en un nombre de parties égales marqué par une puissance de 2.

PROBLÈME

253. — *Deux angles* B *et* C *d'un triangle étant donnés, trouver le troisième* (*fig.* 180).

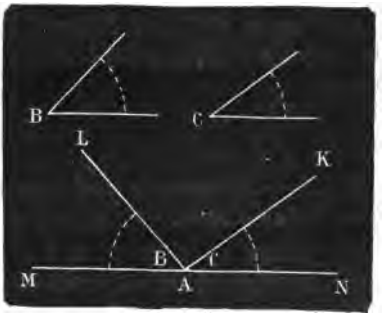


FIG. 180.

En un point quelconque A d'une droite indéfinie MN, on fait deux angles MAL, NAK respectivement égaux aux angles donnés B et C : l'angle LAK est l'angle demandé; car les trois angles réunis autour du point A valent deux droits.

Pour résoudre ce problème, on pourrait encore faire usage du rapporteur comme au n° 243.

PROBLÈME

254. — *Construire un triangle connaissant un côté et deux angles* (*fig.* 181).

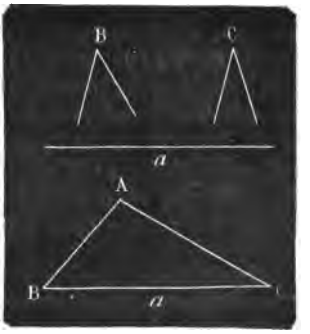


FIG. 181.

Le troisième angle A étant facile à déterminer, nous pouvons supposer que les angles donnés B et C sont adjacents au côté donné *a*.

Sur une droite indéfinie, prenons une longueur BC $= a$, et faisons au point B un angle ABC égal à l'angle B, et au point C un angle ACB égal à l'angle C.

Les droites BA, CA déterminent en se rencontrant le triangle ABC qui répond à la question (58).

Pour que le problème soit possible, il est évident qu'on doit avoir B + C < 2 droits.

PROBLÈME

255. — *Construire un triangle connaissant deux côtés et l'angle qu'ils comprennent.*

En un point B d'une droite indéfinie BC, faisons un angle ABC égal à l'angle B, puis prenons BC $= a$, BA $= c$ et tirons AC.

La triangle ABC ainsi déterminé répond évidemment à la question.

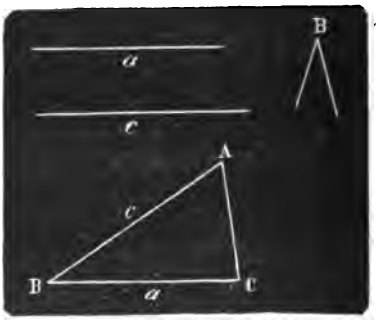


FIG. 182.

PROBLÈME

256. — *Construire un triangle connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.*

On donne les côtés a et b et l'angle A. Supposons l'angle donné aigu.

En un point A d'une droite quelconque MN faisons un angle égal à l'angle A, et prenons AC $= b$. Cela fait, décrivons, du point C comme centre et avec a pour rayon, un arc de cercle qui coupera généralement MN en deux points, B et B′, situés du même côté de l'ouverture de l'angle CAB.

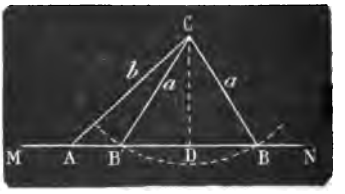


FIG. 183.

Si nous traçons CB et CB′, nous obtiendrons ainsi deux triangles ACB, ACB′ qui répondent l'un et l'autre à la question. Dans le cas supposé il y a donc deux solutions.

Discussion. — Il est clair que le problème n'est possible que si l'arc de cercle décrit du point C rencontre MN, et pour qu'il en soit ainsi il faut que l'on ait a ou égal ou supérieur à la hauteur CD. Admettons donc que cette condition soit remplie.

Les différents cas qui peuvent se présenter dépendent évidemment de l'angle donné A et des longueurs relatives des côtés a et b.

Supposons successivement A *aigu*, *droit* ou *obtus*.

1° $A < 90°$. Si a est égal à la hauteur $CD = CB$, l'arc de

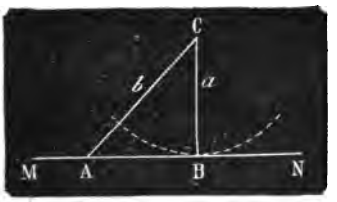


FIG. 184.

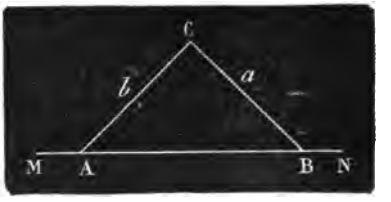


FIG. 185.

cercle est tangent à MN et le triangle rectangle ACB (*fig.* 184) répond seul à la question. Si a est plus grand que CD et plus petit que b, l'arc de cercle coupe MN en deux points B et B situés sur la portion AN de cette droite, c'est-à-dire du côté de l'ouverture de l'angle donné A ; par suite, les triangles ACB, ACB′ (*fig.* 183) répondent à la question. Si a est égal à b, le point B′ se confond avec le point A, alors le triangle ACB′ se réduit à une droite AC et l'autre triangle ACB (*fig.* 185) devient isocèle. Si a est plus grand que b, les deux points B et B′ sont l'un sur la portion AN de la droite MN et l'autre sur la portion AM (*fig.* 186). Le premier triangle ACB répond seul à la question. Le triangle ACB′ ne saurait convenir, puisque dans ce triangle le côté a est opposé à l'angle obtus B′AC, tandis que, par hypothèse, il doit être opposé à un angle aigu.

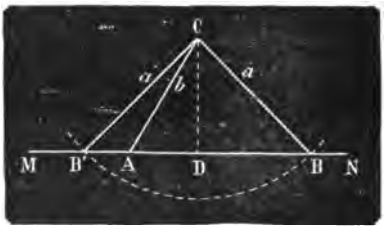


FIG. 186.

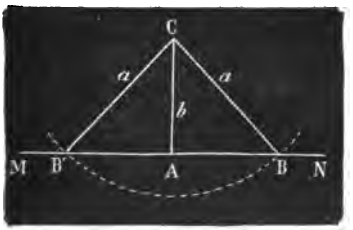


FIG. 187.

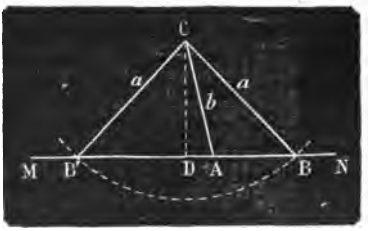


FIG. 188.

2° $A = 90°$. Si a est plus grand que b, l'arc de cercle coupe MN en deux points B et B′ symétriques par rapport à A (*fig.* 187). Les deux triangles ABC, AB′C conviennent donc l'un et l'autre ; mais comme ils sont égaux, il n'y a en réalité qu'une solution. Si a est égal à b,

l'arc de cercle est tangent à MN en A et le triangle ABC n'est plus qu'une droite. Si a est plus petit que b le problème devient impossible.

3° $A > 90°$. L'angle A étant le plus grand angle du triangle, le côté a qui lui est opposé doit être aussi le plus grand. Le problème n'est donc possible que si a est plus grand que b. L'arc de cercle coupe alors MN en deux points B et B' (*fig.* 194) dont l'un est à droite de A et l'autre à gauche. Mais il n'y a que la solution ACB qui convienne, parce que c'est dans ce triangle seulement que le côté a est apposé à un angle obtus.

La discussion qui précède se trouve résumée dans le tableau ci-dessous :

$a < CD$			0 solution.
$a = CD$			1 solution (triangle rectangle).
$a > CD$	$A < 90°$	$a < b$	2 solutions.
		$a = b$	1 solution (triangle isocèle).
		$a > b$	1 solution.
	$A = 90°$	$a > b$	1 solution.
		$a = b$	0 solution.
		$a < b$	0 solution.
	$A > 90°$	$a > b$	1 solution.
		$a = b$	0 solution.
		$a < b$	0 solution.

PROBLÈME

257. — *Construire un triangle connaissant les trois côtés a, b, c.*

Prenons sur une droite indéfinie une longueur BC = a, et du point B comme centre, avec un rayon égal à c, décrivons un arc de cercle ; du point C comme centre, avec un rayon égal à b, décrivons un autre arc de cercle qui coupera le premier au point A. Enfin, traçons les droites BA, CA et nous aurons évidemment le triangle demandé.

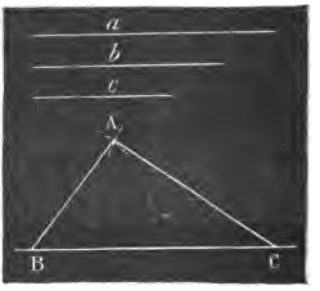


FIG. 189.

Discussion. — Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les arcs décrits des pints B et C se coupent. La distance a de leurs centres doit donc être comprise entre la somme et la différence des rayons b et c.

On doit, par conséquent, avoir déjà : $a < b + c$; mais comme b peut être plus grand ou plus petit que c, il faut qu'on ait encore $a > b - c$ ou $a > c - b$. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la

construction du triangle soit possible avec les trois côtés a, b, c sont donc :

1° $a < b + c$;

2° $\begin{cases} b > c & a > b - c, \text{ d'où } b < a + c. \\ b < c & a > c - b, \text{ d'où } c < a + b. \end{cases}$

De sorte que les conditions de possibilité sont les trois suivantes :

$$a < b + c, \qquad b < a + c, \qquad c < a + b.$$

On voit que *le problème est toujours possible, si l'un quelconque des côtés est moindre que la somme des deux autres.*

PROBLÈME

258. — *Mener par un point donné* A *une tangente à un cercle.*

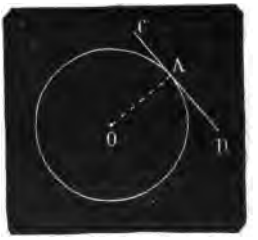


FIG. 190.

1° Le point A est sur le cercle.

Il suffit de mener le rayon OA et d'élever au point A une perpendiculaire CD. Cette perpendiculaire sera la tangente demandée (174).

2° Le point A est hors le cercle.

Joignons le centre O au point A et sur OA comme diamètre décrivons une circonférence qui rencontre la première aux points B et B′ : les droites AB, AB′ sont deux tangentes.

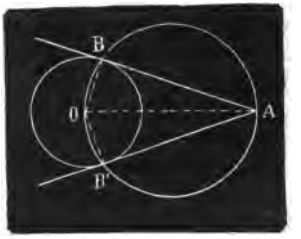


FIG. 191.

En effet, si nous menons les rayons OB, OB′ nous aurons deux angles OBA, OB′A, inscrits dans une demi-circonférence : donc ces angles sont droits, et AB, AB′ perpendiculaires aux extrémités des rayons OB, OB′ sont des tangentes à la circonférence.

259. Remarque. — Les deux triangles rectangles OAB, OAB′ ont l'hypothénuse OA de commune, et OB = OB′, donc ces deux triangles sont égaux (81); par suite, tangente AB = tangente AB′ et angle OAB = angle OAB′. Par conséquent, *les tangentes à un cercle issues d'un même point sont égales, et la droite qui joint ce point au centre divise l'angle formé par les tangentes en deux parties égales.*

PROBLÈME

260. — *Mener à un cercle une tangente parallèle à une droite donnée* MN.

On mène par le centre du cercle une perpendiculaire à la droite donnée. Cette perpendiculaire rencontre la circonférence en deux points A et B. Par ces points on trace deux tangentes qui répondent à la question ; car ces tangentes et la droite donnée MN étant trois perpendiculaires à la même droite AB sont parallèles entre elles.

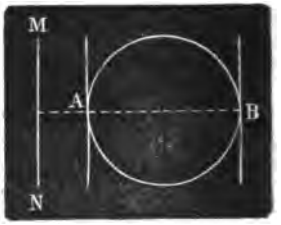


FIG. 192.

PROBLEME

261. *Mener une tangente commune à deux cercles.*

Les deux cercles peuvent être du même côté ou de part et d'autre de la tangente commune. Dans le premier cas, la tangente commune est dite *extérieure*, et *intérieure* dans le second cas. Examinons successivement chacun de ces cas.

1° *Tangente commune extérieure.* — Supposons le problème résolu et soit AA′ la tangente commune aux cercles O et O′. Menons les rayons OA, O′A′ aux points de contact, et par le centre O′ du petit cercle traçons O′C parallèle à AA′. Les rayons OA, O′A′ sont perpendiculaires sur AA′ (174). La figure CAA′O′ est donc un rectangle et CA = O′A′ ; par suite OC est égale à la différence, OA — O′A′, des rayons donnés. D'ailleurs OC est perpendiculaire à O′C au point C, d'où il résulte que si on décrit du point O un cercle de rayon OC, la droite O′C sera tangente à ce cercle. Ainsi, la tangente demandée est parallèle à une tangente menée du centre O′ à un cercle décrit du centre O, avec un rayon égal à la différence des rayons des cercles donnés. Donc : pour construire la tangente commune extérieure AA′, on décrira un cercle ayant O pour centre et pour rayon *la différence des rayons* des cercles donnés; du point O′, on mènera la tangente O′C à ce cercle,

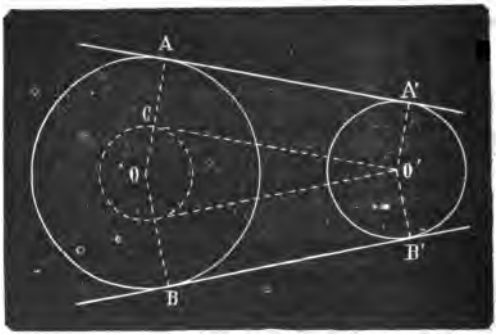


FIG. 193.

puis le rayon OA passant par le point de contact C ; enfin au point A, on tracera la parallèle AA′ à la tangente O′C, cette parallèle sera la tangente demandée.

Comme on peut mener par le point O′ deux tangentes au cercle qui a OC pour rayon, le problème admet une seconde solution : les deux cercles O, O′ auront encore BB′ pour tangente commune.

2° *Tangente commune intérieure.* — Soit encore la question résolue, et AA′ la tangente commune intérieure demandée. Menons les rayons OA, O′A′ aux points de contact et, par le centre O′, traçons une parallèle O′C à la tangente AA′. Pour la même raison que dans le premier cas, la figure ACO′A′ est un rectangle et AC = A′O′. La tangente demandée AA′ est donc parallèle à une droite O′C perpendiculaire à l'extrémité d'une droite OC égale à la somme, OA + O′A′, des rayons des cercles donnés. Donc : pour construire la tangente commune intérieure AA′, on décrira un cercle ayant O pour centre et pour rayon *la somme des rayons* des cercles donnés ; du point O′, on tracera la tangente O′C à ce cercle, puis le rayon OC du point de contact ; enfin au point A où OC coupe le cercle OA, on mènera une parallèle AA′ à la tangente O′C, cette parallèle sera la tangente demandée.

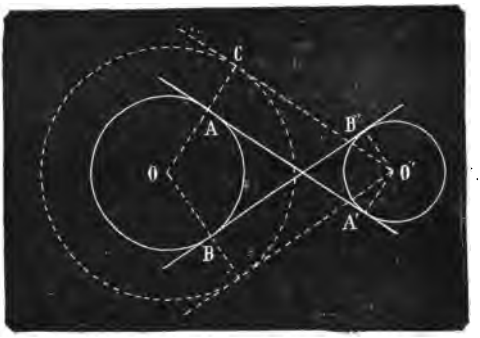


FIG. 194.

Comme par le point O′ on peut mener deux tangentes au cercle qui a OC pour rayon, le problème admet encore une solution : les deux cercles auront aussi BB′ pour tangente commune.

Discussion. — On voit facilement que le problème proposé

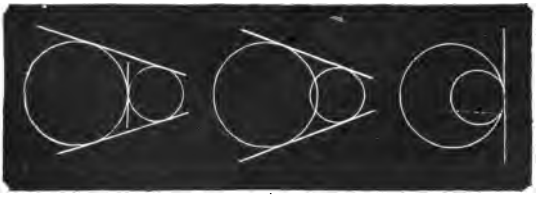


FIG. 195. FIG. 195 *bis.* FIG. 195 *ter.*

admet quatre solutions lorsque les deux cercles sont extérieurs (*fig.* 193) et (*fig.* 194) ; mais lorsque les deux cercles se touchent exté-

rieurement, les tangentes intérieures se confondent en une seule perpendiculaire sur la ligne des centres, et le problème n'admet plus que trois solutions (*fig.* 195). Il n'en admet plus que deux si les cercles sont sécants (*fig.* 194 *bis*), et une seule s'ils sont tangents intérieurement (*fig.* 195 *ter*). Enfin il devient impossible lorsque les deux cercles sont intérieurs.

En appelant d la distance des centres des deux cercles et r, r' leurs rayons, les considérations précédentes peuvent se résumer dans le tableau ci-dessous :

$d > r + r'$: 4 solutions { 2 tangentes communes extérieures. 2 tangentes communes intérieures.

$d = r + r'$: 3 solutions { 2 tangentes communes extérieures. 1 tangente commune intérieure.

$r + r' > d > r - r'$: 2 solutions — 2 tangentes communes extérieures.

$d = r - r'$: 1 solution — 1 tangente commune extérieure.

$d < r - r'$: 0 solution.

PROBLÈME

262. — *Le lieu des points d'un plan d'où une droite est vue sous un angle donné se compose de deux arcs de cercle égaux et symétriques par rapport à la droite.*

Soit MN la droite qui doit être vue sous l'angle donné α.

Si nous supposons qu'un certain point A appartienne au lieu cherché, il arrive que MAN est égal à l'angle α.

Décrivons une circonférence passant par les trois points M, A, N. Un point quelconque E de l'arc MAN appartient au lieu, car l'angle MEN, par exemple, inscrit dans ce segment, a même mesure que l'angle A, ou la moitié de l'arc MLN. Au contraire, tout point I intérieur ou extérieur à l'arc MAN n'appartient pas au lieu, car l'angle MIN est plus grand ou plus petit que l'angle A.

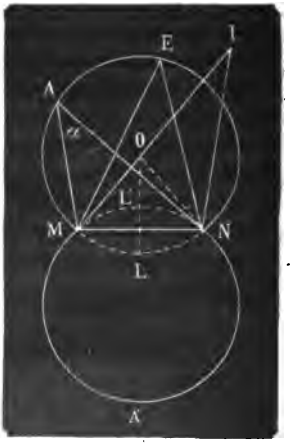


FIG. 196.

Les points de l'arc MAN sont donc les seuls d'où la droite MN soit vue sous un angle égal à l'angle A, c'est-à-dire égal à l'angle donné α.

On peut faire le même raisonnement sur l'arc MA'N, symétrique de MAN, donc cet arc fait aussi partie du lieu.

Le segment MAN est ce qu'on appelle *le segment capable de l'angle donné α décrit sur* MN *comme corde.*

263. Remarque I. — Il est facile de voir que la ligne courbe MLNL' formée par les deux arcs MLN, ML'N est le lieu des points du plan d'où on voit la ligne MN sous un angle égal au supplément de α.

264. Remarque II. — Lorsque l'angle α est droit le lieu devient une circonférence décrite sur MN comme diamètre.

PROBLÈME

265. — *Décrire sur une droite donnée* AB *un segment capable d'un angle donné* C.

Supposons le problème résolu et soit AMB le segment demandé et O son centre.

Ce centre est sur la perpendiculaire au milieu de la corde AB et aussi sur la perpendiculaire à la tangente au point B : donc il est au point de concours O de ces deux perpendiculaires. Mais les angles AMB et ABD sont égaux, car l'un et l'autre ont pour mesure la moitié de l'arc ANB (230). Donc pour avoir l'arc demandé AMB, on construira en B un angle ABD égal à l'angle donné C, puis on élèvera une perpendiculaire au milieu de la droite AB et une autre en B à BD, le point de concours O de ces perpendiculaires sera le centre du segment. Pour achever la construction, il suffira de décrire une circonférence ayant O pour centre et OB pour rayon.

FIG. 197.

Il est évident (262) que tous les angles inscrits dans le segment AMB sont les seuls qui soient égaux à l'angle C. On peut donc dire que le segment AMB est le lieu des points d'où la corde AB est vue sous un angle égal à l'angle C, et que le segment ANB est le lieu des points d'où la corde AB est vue sous un angle égal au supplément de l'angle C.

266. Remarque particulière. — Les questions de géométrie sont en nombre illimité, et d'ailleurs si diverses qu'il est impossible de songer à suivre la même marche pour arriver à les résoudre; mais parmi les méthodes en usage, il en est deux dont nous devons dire quelques mots.

La première, la méthode *synthétique*, est employée pour les problèmes simples et faciles, ceux dont la solution se voit aisément (nos **244**, **246**, etc.).

Pour chacun de ces problèmes, nous avons commencé par donner la solution, puis nous avons expliqué son exactitude en quelques mots.

La seconde méthode, connue sous le nom de méthode *analytique*, est la plus féconde qu'on puisse employer : c'est elle qui a doté la science des plus belles découvertes ; c'est à elle qu'on doit recourir dans la recherche de la solution de tout problème de géométrie présentant quelque difficulté. Voici, dans ce cas, la marche à suivre : on suppose le problème résolu, on construit alors, à la main, et aussi bien que possible, une figure qu'on regarde comme étant la figure demandée, et contenant, par suite, tous les éléments connus et inconnus. Si l'on examine ensuite, avec soin, sur cette figure la liaison qui existe entre les données et les inconnues, on trouve généralement les nouvelles constructions à faire pour arriver à la solution demandée (Voir nos 261, 262, etc.).

Quelle que soit d'ailleurs la marche que l'on suive, un problème n'est complètement résolu que dans le cas où l'on s'est rendu compte du nombre de solutions qu'il peut avoir, et que l'on a étudié les conditions de possibilité et d'impossibilité qu'il présente; en d'autres termes, pour le résoudre entièrement, il faut en faire ce qu'on appelle la *discussion* (nos 256, 257, etc.).

EXERCICES SUR LE LIVRE II

67. — Quel est le lieu des points situés à une distance donnée d'un point donné ?

68. — Trouver la plus courte et la plus longue distance d'un point donné à une circonférence.

69. — Une droite de longueur constante reste parallèle à elle-même, tandis que l'une de ses extrémités décrit une circonférence : quel est le lieu de l'autre extrémité ?

70. — On donne un cercle O et un point A pris dans son plan ; on demande le lieu des milieux des sécantes qui joignent le point A aux divers points de la circonférence O.

71. — Par un point A extérieur à une circonférence O, on mène une sécante ACD dont la partie extérieure AC est égale au rayon, puis par le centre la droite AOB : démontrer que l'angle COA est le tiers de l'angle DOB.

72. — Lieu des centres des circonférences passant par deux points donnés A et B.

73. — Trouver sur une circonférence deux points également distants d'un point donné P.

74. — Par un point donné dans l'intérieur d'un cercle, mener une corde dont ce point soit le milieu.

75. — On donne une circonférence O, deux points, A et B, en dehors, et une droite infinie XY : on demande de décrire une seconde circonférence passant par les deux points et coupant la première de manière que la corde qui joindra les deux points d'intersection soit parallèle à la droite donnée.

76. — Trouver le centre d'un cercle tracé.

77. — Décrire avec un rayon donné une circonférence qui passe à égale distance de trois points donnés non en ligne droite.

78. — Indiquer le lieu des milieux des cordes d'un cercle égales à une ligne donnée.

79. — Décrire avec un rayon donné une circonférence qui intercepte sur deux droites données des longueurs données.

80. — Décrire un cercle qui intercepte une même corde donnée sur trois roites données.

81. — La plus longue corde et la plus petite qui passent par un point intérieur à un cercle sont deux droites perpendiculaires, dont l'une est un diamètre.

82. — Lieu géométrique des centres des cercles d'un rayon donné et tangents à une droite donnée.

83. — Tracer deux tangentes parallèles dont l'une passe par un point marqué sur une circonférence donnée.

84. — Tracer une tangente qui soit perpendiculaire à une droite donnée.

85. — Tracer une tangente à un cercle donné parallèlement à une droite donnée.

86. — Quel est le lieu des centres des circonférences tangentes à deux droites concourantes ?

87. — Inscrire un cercle dans un triangle donné ABC.

88. — Mener une circonférence d'un rayon donné R tangente à deux droites données.

89. — Décrire une circonférence tangente en un point P d'une droite donnée et passant par un autre point M également donné.

90. — Mener dans un cercle une sécante passant par un point P et telle que la corde interceptée soit égale à une longueur donnée.

91. — Mener à un cercle une tangente qui fasse un angle donné avec une droite donnée.

92. — Décrire une circonférence d'un rayon connu, qui passe par un point donné et soit tangente à une droite tracée.

93. — Deux points A et B sont à une distance d : on demande de faire passer par ces deux points deux parallèles qui soient à une distance m l'une de l'autre.

94. — On prolonge le rayon AB d'un cercle d'une longueur BC égale à AB ; on mène une tangente quelconque MD, sur laquelle on élève les perpendiculaires BN, CD : prouver que l'angle $BDC = \frac{ABD}{3}$.

95. — Deux cordes parallèles AC, BD, menées des extrémités du même diamètre, sont égales.

96. — Lieu des centres des circonférences tangentes à une circonférence donnée en un point donné.

97. — Trouver le lieu des points situés à une distance donnée d'une circonférence donnée.

98. — Lieu des centres des circonférences d'un rayon donné r et tangentes à une circonférence donnée R.

99. — Décrire, des sommets d'un triangle, comme centres, trois circonférences telles que chacune touche les deux autres.

100. — Décrire une circonférence d'un rayon donné et tangente à une droite et à une circonférence données.

101. — Tracer une circonférence de rayon connu qui en coupe une autre en deux points marqués.

102. — Deux points A et B étant donnés, en trouver un troisième O qui soit à une distance M de A et à une distance N de B.

103. — Inscrire, entre deux circonférences extérieures données, une droite de longueur donnée, parallèle à une droite donnée.

104. — Par l'un des points d'intersection de deux circonférences mener une sécante commune qui ait son milieu en ce point.

105. — On donne la corde AB; sur le rayon OB, on élève la perpendiculaire OD = AB, et du point D on décrit un arc avec un rayon égal à OB. Démontrer que C est le milieu de l'arc AB.

106. — Un cercle étant donné, combien faut-il de cercles de même rayon pour l'entourer?

107. — Si l'on divise la corde d'un arc de cercle en trois parties égales, les rayons qui passent par les points de division ne partagent pas l'arc en trois parties égales.

108. — Par le point de contact de deux circonférences tangentes intérieurement ou extérieurement, on mène deux sécantes, puis on joint leurs points de rencontre avec la même circonférence, les cordes ainsi menées sont parallèles.

109. — Si l'on ne mène qu'une sécante (problème précédent) et des tangentes à ses extrémités, ces deux tangentes sont parallèles.

110. — Si d'un point quelconque pris dans l'intérieur d'un angle on abaisse des perpendiculaires sur les côtés de cet angle, le quadrilatère que déterminent les perpendiculaires sera inscriptible.

111. — Le rectangle et le carré sont les seuls parallélogrammes inscriptibles.

112. — Un trapèze dont les deux côtés non parallèles sont égaux (trapèze isocèle) est inscriptible dans un cercle.

113. — Dans tout triangle rectangle, la droite qui joint le sommet de l'angle droit au milieu de l'hypoténuse est égale à la moitié de l'hypoténuse.

114. — Sur deux droites rectangulaires OA, OB, on fait glisser une droite de longueur donnée AB; on demande le lieu des milieux des hypoténuses des triangles rectangles ainsi formés.

115. — Soient un triangle rectangle ABC et une perpendiculaire quelconque OH sur l'hypoténuse BC. On prolonge OH jusqu'à sa rencontre en D avec AC et l'on tire BD, puis on prolonge CO jusqu'en E. Trouver le lieu du point E.

116. — Étant donnés un cercle BO et un diamètre AB, on mène un rayon quelconque OC, puis on trace CD perpendiculairement sur AB et l'on prend OM = CD. Trouver le lieu du point M.

117. — Quand deux cordes égales se coupent à l'intérieur ou à l'extérieur d'une circonférence, les segments déterminés sur ces deux cordes par le point de rencontre sont respectivement égaux.

118. — Si deux cercles se coupent en deux points P et Q et que par le point P on mène une droite PAB qui les rencontre en A et B, l'angle AOB est constant quelle que soit la direction de AB.

119. — Les circonférences qui ont pour cordes les côtés d'un quadrilatère inscriptible ABCD donnent lieu, par leurs secondes intersections, à un quadrilatère inscriptible EFGH.

120. — Si l'on joint les pieds des hauteurs d'un triangle ABC, on obtient un second triangle dans lequel les angles ont pour bissectrices les hauteurs du premier.

121 — Sur un rayon OA prolongé on élève une perpendiculaire DE; puis par le point A on mène la sécante ABC, et les tangentes CD, BE. Démontrer que AE = AD.

122. — On prend un point P quelconque sur le diamètre d'un cercle, on le joint à l'extrémité A du rayon AO perpendiculaire au diamètre OP, puis on prolonge AP jusqu'à sa rencontre avec la circonférence en B et l'on mène la tangente BC. Démontrer que CB = CP.

123. — Si par le point A, milieu d'un arc BAC d'une circonférence, on mène deux cordes quelconques AD et AE qui coupent en F et en G la corde BC. le quadrilatère DFGE, ainsi obtenu, est inscriptible.

124. — Les bissectrices EF, GH des angles formés par les côtés opposés d'un quadrilatère ABCD inscriptible sont perpendiculaires entre elles.

125. — Si deux cordes AB et CD se coupent dans un cercle, la somme AC + BD des arcs qu'elles interceptent est égale à la somme des arcs interceptés par les deux diamètres parallèles à ces cordes.

126. — Soient le cercle circonscrit à un triangle ABC et H le point de rencontre des hauteurs; si l'on prolonge la hauteur CG jusqu'en F, on aura HG = GF.

127. — Les côtés opposés d'un quadrilatère circonscrit à une circonférence, ajoutés deux à deux, donnent des sommes égales.

128. — Indiquer le lieu des points de départ des tangentes à une circonférence donnée égales à une droite donnée.

129. — Le diamètre de la circonférence inscrite dans un triangle rectangle est égal à l'excès de la somme des côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse.

130. — 1° Les segments déterminés sur les côtés d'un triangle par les points de contact du cercle inscrit et d'un des cercles ex-inscrits sont égaux, chacun au demi-périmètre moins un côté; 2° la somme de ces segments est égale au demi-périmètre.

131. — Deux circonférences O et O′ étant tangentes intérieurement au point A, et BC étant une corde de la grande circonférence tangente en D à la petite, la droite AD est la bissectrice de l'angle BAC.

132. — Une circonférence étant tangente aux deux côtés d'un angle ABC, si on mène une troisième tangente DF à l'arc AC, 1° le triangle DBF a un périmètre constant quel que soit le point G pris à volonté sur l'arc; 2° l'angle DOF est aussi constant.

133. — Deux cercles étant donnés, mener une sécante telle que les cordes nterceptées par les deux cercles aient des longueurs données.

134. — Lieu des sommets des triangles ayant la même base et l'angle au sommet égal à un angle donné.

135. — Lieu des centres des cercles inscrits dans ces mêmes triangles.

136. — Lieu des points de concours des hauteurs de ces mêmes triangles.

137. — De tous les triangles inscrits dans le même segment de cercle, le triangle isocèle a le plus grand périmètre.

138. — Les positions A, B, C de trois clochers étant marquées sur une carte, indiquer sur cette carte la position M d'une maison de laquelle ont été observés les angles AMB, BMC que forment entre elles les droites horizontales menées de la maison aux trois clochers.

139. — Les circonférences qui passent par deux sommets d'un triangle ABC

et par le point de concours H des hauteurs sont égales à la circonférence circonscrite au triangle.

140. — Trouver dans le plan d'un triangle un point d'où l'on voie les trois côtés sous des angles égaux.

Construire un triangle isocèle connaissant :

141. — La base et l'angle du sommet.

142. — L'angle au sommet et la hauteur.

143. — La base et le rayon du cercle inscrit.

144. — La base et le rayon du cercle circonscrit.

145. — Le périmètre et la hauteur.

Construire un triangle rectangle connaissant :

146. — L'hypoténuse et un angle aigu.

147. — L'hypoténuse et un côté de l'angle droit.

148. — L'hypoténuse et la hauteur correspondante.

149. — Un côté de l'angle droit A et la hauteur issue de A.

150. — La médiane et la hauteur issues de l'angle droit.

151. — Un côté de l'angle droit et le rayon r du cercle inscrit.

152. — Le rayon r du cercle inscrit et un angle aigu.

153. — Un angle aigu et la somme des deux côtés de l'angle droit.

154. — Un angle aigu et la différence des deux côtés de l'angle droit.

155. — Construire sur une base donnée AB un triangle CAB rectangle en A, tel que l'hypoténuse CB et le côté CA fassent ensemble une somme double du côté AB.

Construire un triangle connaissant :

156. — Les milieux des trois côtés.

157. — Deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.

158. — Le périmètre et les angles.

159. — Le périmètre, un angle en grandeur et un point du troisième côté

160. — Un côté, un angle adjacent et la somme des deux autres côtés.

161. — Un côté, l'angle adjacent et la différence des deux autres côtés.

162. — Un côté, l'angle opposé et la somme des deux autres côtés.

163. — Un côté, l'angle opposé et la différence des deux autres côtés.

164. — Les angles et la somme de deux côtés.

165. — Le rayon du cercle circonscrit, un côté et un angle adjacent.

166. — Le rayon du cercle circonscrit et les angles.

167. — Le rayon du cercle circonscrit, un côté et une hauteur (2 cas).

168. — Le rayon du cercle inscrit et les angles.

169. — Le rayon r du cercle inscrit, un côté et un angle (2 cas).

170. — Le rayon r du cercle inscrit, un angle et la hauteur correspondante.

171. — Le rayon r du cercle inscrit, le rayon r' du cercle ex-inscrit et un angle A (2 cas).

172. — Les centres des trois cercles ex-inscrits.

173. — Les trois angles et l'une des hauteurs.

174. — Un angle, la hauteur et la bissectrice issue de l'angle donné.

175. — Les pieds des trois hauteurs.

176. — Un côté, un angle et une hauteur (5 cas).

177. — Deux côtés et une hauteur (2 cas).

178. — Un angle et deux hauteurs (2 cas).

179. — Un côté et deux hauteurs (2 cas).

180. — Deux côtés et une médiane (2 cas).

181. — Les trois médianes.

182. — L'angle, la hauteur et la médiane issues du même sommet.

183. — Les angles et une médiane.

184. — Construire un carré connaissant sa diagonale.

185. — Construire un carré connaissant la somme ou la différence de son côté et de sa diagonale.

Construire un rectangle connaissant :

186. — Un de ses côtés et l'angle des diagonales.

187. — Son périmètre et sa diagonale.

188. — Son périmètre et l'angle des diagonales.

189. — La différence de deux côtés et l'angle des diagonales.

Construire un losange connaissant :

190. — Ses diagonales.

191. — Le côté et le rayon du cercle inscrit.

192. — Un angle et le rayon du cercle inscrit.

193. — Un angle et une diagonale.

Construire un parallélogramme connaissant :

194. — Les diagonales et un côté.

195. — Les diagonales et leurs angles.

196. — Un côté, un angle et une diagonale.

197. — Un côté, une hauteur et un angle (2 cas).

198. — Une diagonale, un angle et le périmètre.

Construire un trapèze isocèle connaissant :

199. — Les bases et un angle.

200. — Les bases et la hauteur.

201. — Les bases et le rayon du cercle circonscrit.

202. — Une base, la hauteur et l'un des côtés égaux.

203. — Les bases et la diagonale.

204. — Construire un trapèze quelconque connaissant les quatre côtés.

205. — Construire un trapèze connaissant les bases et les diagonales.

206. — Construire un pentagone connaissant les milieux des cinq côtés.

LIVRE III

LONGUEURS PROPORTIONNELLES

CHAPITRE PREMIER

Rapport et proportion. — Parallèle à l'un des côtés d'un triangle.

§ Ier. — RAPPORT ET PROPORTION

Définitions.

267. — On appelle *rapport* de deux grandeurs de même espèce le nombre qui exprime comment la première est composée avec la seconde.

Dire, par exemple, que le rapport de deux grandeurs de même espèce est 5, c'est faire connaître que la première est composée de 5 fois la seconde, ou, en d'autres termes, qu'elle est 5 fois plus grande.

De même dire que le rapport de deux grandeurs est $\frac{7}{8}$, c'est dire que la première est composée de sept fois le $\frac{1}{8}$ de la seconde ou qu'elle vaut les 7 huitièmes de la seconde.

Le rapport de deux lignes quelconques n'est que le rapport des nombres qui expriment leurs longueurs mesurées avec la même unité. Par exemple, si a et b représentent les nombres qui mesurent les longueurs A et B, on a :

FIG. 198.

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b}.$$

268. — On nomme *proportion* l'expression de l'égalité de deux

rapports. Si donc quatre droites A, B, C, D sont telles que le rapport des deux premières soit égal à celui des deux dernières, ces quatre lignes forment la proportion :

$$(1) \qquad \frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

La ligne D est dite *quatrième proportionnelle* aux trois premières A, B, C.

Lorsque dans la proportion (1) on a B = C, elle devient :

$$(2) \qquad \frac{A}{B} = \frac{B}{D}.$$

Dans ce cas la ligne D est une ***troisième proportionnelle*** aux droites A et B, et la ligne B une ***moyenne proportionnelle*** entre A et D.

La proportion (2) donne

$$B^2 = A \times D.$$

Le carré d'une moyenne proportionnelle à deux lignes est donc égal au produit de ces lignes.

D'après ce qui précède, deux droites AB, CD sont partagées en parties proportionnelles par les points E et F, si les deux *segments* de la première forment un rapport égal à celui des deux segments de la seconde, et, dans ce cas, on a :

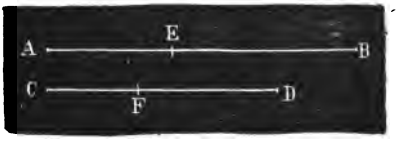


FIG. 199.

$$\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FD}.$$

THÉORÈME

269. — ***Sur une droite limitée AB, il existe un point et un seul, dont le rapport des distances aux points A et B soit égal à un rapport donné.***

Supposons le rapport donné égal à $\frac{3}{5}$.

1° Il y a un point M qui divise AB dans le rapport donné. En effet, il est évident que la droite AB peut être partagée en 3 + 5 ou 8 parties égales. Or, si nous prenons, en partant du point A, 3 de ces parties, le point M, ainsi déterminé,

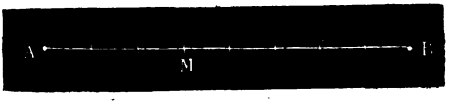


FIG. 200.

répondra à la question; car AM contient 3 parties égales et MB en contient 5 : donc nous pouvons écrire :

$$\frac{AM}{MB} = \frac{3}{5}.$$

2° Le point M est le seul qui divise AB dans le rapport donné.

Il est facile de voir qu'il en est ainsi; car si on suppose, par exemple, que le point M s'avance du côté de B, le numérateur AM augmente, tandis que le dénominateur MB diminue : donc, pour ces deux raisons, le rapport $\frac{AM}{MB}$ augmente. Si on suppose, au contraire, que le point M se rapproche de A, le numérateur AM diminue et le dénominateur MB augmente : donc, pour ces deux raisons, le rapport $\frac{AM}{MB}$ diminue. Le point primitif est donc le seul qui divise AB dans le rapport de 3 à 5.

270. Remarque. — La démonstration qui précède facilite beaucoup l'intelligence du théorème suivant, lequel résout d'une manière générale la question d'une droite partagée dans un rapport donné.

THÉORÈME

271. — *Sur une droite indéfinie* XY, *il existe deux points, et deux seulement, dont le rapport des distances de chacun à deux points fixes* A *et* B *de cette droite, soit égal à un rapport donné.*

Appelons $\frac{m}{n}$ le rapport donné. Si nous supposons qu'un point

FIG. 201.

mobile M parcoure la droite XY, on devra avoir, et pour deux points seulement, une égalité telle que

$$\frac{MA}{MB} = \frac{m}{n}.$$

La démonstration de ce théorème peut se diviser en trois parties.

1° Le point mobile est à *gauche de* A.

Quelle que soit la position M du point mobile à gauche de A, il est visible que MA est inférieur à MB; par suite, le rapport $\frac{MA}{MB}$ est

toujours inférieur à l'unité; et comme MA = MB — AB, on peut écrire :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MB - AB}{MB} = 1 - \frac{AB}{MB}.$$

On voit que l'étude du rapport $\frac{MA}{MB}$ dont les deux termes sont variables peut être remplacée par celle du rapport $\frac{AB}{MB}$, dont le dénominateur seul est variable.

Or, si M est très loin à gauche de A, le dénominateur MB est très grand, et, par suite, $\frac{AB}{MB}$ est très petit. Et comme la distance MB peut dépasser toute grandeur, il en résulte que $\frac{MA}{MB}$ peut être aussi voisin de 1 qu'on le désire. Mais à mesure que le point M se rapproche de A, le dénominateur MB diminue ; par suite la fraction $\frac{AB}{MB}$ augmente; il arrive alors que le rapport $\frac{MA}{MB}$ diminue et devient égal à 0, lorsque le point M est en A [1]. Ainsi, *à gauche du point* A *le rapport considéré décroît d'une manière continue de* 1 *à* 0. Donc, il a passé une fois, et une fois seulement, par toute valeur comprise entre 1 et 0. Donc on a eu une fois seulement $\frac{MA}{MB} = \frac{m}{n}$, si la valeur donnée $\frac{m}{n}$ est comprise entre 1 et 0.

2° Le point mobile M est devenu M′ *entre* A *et* B.

Lorsque le point mobile va de A en B, le rapport $\frac{M'A}{M'B}$ augmente, puisque son numérateur croît en même temps que son dénominateur décroît. Quand le point mobile atteint le milieu O de AB, il arrive que les deux termes du rapport sont égaux, et alors on a $\frac{M'A}{M'B} = 1$. Lorsque le point mobile a passé le point O, le rapport $\frac{M'A}{M'B}$ continue à augmenter à mesure que M′ se rapproche de B, car son numérateur augmente et tend vers AB, tandis que son dénominateur, au contraire,

---

1. Cela est facile à comprendre, car dans le cas où le point M est en A, on a MA = 0 et MB = AB de sorte que l'égalité

$$\frac{MA}{MB} = 1 - \frac{AB}{MB}$$

se change en cette autre : 0 = 1 — 1 = 0.

diminue en tendant vers 0; par suite, le rapport considéré prend des valeurs de plus en plus grandes; et, lorsque le point M′ se confond avec le point B, le rapport devient $\frac{AB}{0}$ et dépasse alors toute grandeur imaginable. On exprime ce fait en disant que le rapport est *infini*. Ainsi, *de* A *en* B *le rapport considéré croît d'une manière continue de* 0 *à l'infini*. Donc, il a passé une fois et une fois, seulement, par toute valeur comprise entre 0 et l'infini. Donc, on a eu une fois seulement $\frac{M'A}{M'B} = \frac{m}{n}$, la valeur donnée $\frac{m}{n}$ ayant été quelconque.

3° Le point mobile M est devenu M″ *à droite de* B.

Pendant que le point mobile M″ parcourt le segment BY, le numérateur du rapport $\frac{M''A}{M''B}$ étant toujours plus grand que le dénominateur, ce rapport reste constamment supérieur à 1, et comme

$$M''A = M''B + AB,$$

on peut écrire :

$$\frac{M''A}{M''B} = \frac{M''B + AB}{M''B} = 1 + \frac{AB}{M''B}.$$

Le rapport $\frac{AB}{M''B}$ est, comme nous venons de le voir, infini lorsque le point mobile M″ est en B; mais à mesure que ce même point s'éloigne de B, le dénominateur augmente de plus en plus jusqu'à l'infini, et, par suite, la fraction $\frac{AB}{M''B}$ diminue graduellement en tendant vers 0. A la limite $\frac{AB}{M''B}$ devient nul et l'on a, dès lors, $\frac{M''A}{M''B} = 1$. Ainsi, *à droite de* B *le rapport considéré décroît d'une manière continue de l'infini à* 1. Donc, il a passé une fois, et une fois seulement, par toute valeur comprise entre l'infini et 1. Donc, on a eu une fois seulement $\frac{M''A}{M''B} = \frac{m}{n}$, si la valeur donnée est comprise entre l'infini et 1.

Le théorème est donc démontré, et les deux points cherchés sont à gauche du point O, si le rapport $\frac{m}{n}$ est inférieur à l'unité, et à droite de ce même point O, si le rapport $\frac{m}{n}$ est supérieur à l'unité.

Les considérations précédentes montrent que les deux points en question sont d'ailleurs les seuls qui existent sur la droite.

272. Définition. — Les deux segments M'A, M'B (*fig.* 209) dont la somme est AB, sont dits *additifs;* et les segments MA, MB dont la différence est AB sont appelés *soustractifs.*

§ II. — PARALLÈLE A L'UN DES COTÉS D'UN TRIANGLE

THÉORÈME DE THALÈS

273. — *Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle divise les deux autres en parties proportionnelles.*

Soit dans le triangle ABC la droite DE parallèle à BC.

Il faut démontrer que

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

Supposons qu'une commune mesure AM soit contenue 3 fois dans AD et 2 fois dans DB; ces deux lignes sont entre elles comme les nombres 3 et 2, on a donc

$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}.$$

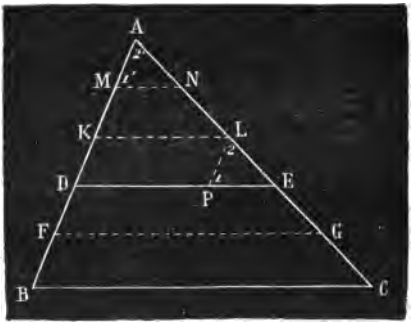


FIG. 202.

Par les points de division de AB, menons des parallèles à BC. Ces parallèles partagent aussi AC en cinq parties égales. Montrons que deux parties quelconques AN et LE, par exemple, sont égales.

A cet effet, menons LP parallèle à AB; nous formons ainsi le triangle ELP qui est égal à MAN; parce que ces deux triangles ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, savoir : les côtés LP et AM égaux, car l'un et l'autre sont égaux à KD, le premier comme portions de parallèles comprises entre parallèles et le second par construction, les angles 1 et 1', 2 et 2' sont aussi égaux, car ces angles ont leurs côtés respectivement parallèles et de même sens : donc LE = AN. Le côté AC est donc aussi partagé en 5 parties égales; et comme 3 de ces parties sont dans AE et 2 dans EC, il vient :

$$\frac{AE}{EC} = \frac{3}{2}.$$

Mais deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles, donc enfin,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

Si AD et DB n'avaient pas de commune mesure, on trouverait, en répétant le raisonnement fait au n° 222, que le rapport des segments AD, DB est encore égal à celui des segments AE, EC.

On pourrait aussi se contenter de dire que cette démonstration étant indépendante de la longueur de la commune mesure AM, serait encore rigoureuse dans le cas où cette commune mesure serait plus petite que toute quantité appréciable, et par conséquent dans le cas où les lignes AD et DB seraient incommensurables.

274. Remarque. — La parallèle DE (fig. 203) n'est pas astreinte à rencontrer les côtés AB et AC, elle peut être menée au-dessous de la base ou au delà du sommet, la démonstration reste la même. Ainsi, la figure 203 donne

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \quad \text{et} \quad \frac{AD'}{D'B}=\frac{AE'}{E'C}.$$

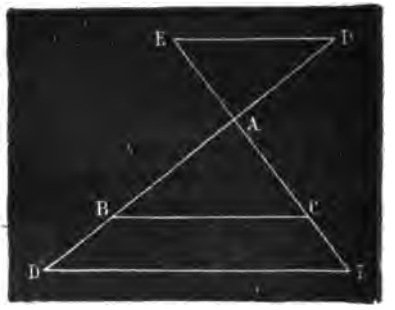


FIG. 203.

275. Corollaire I. — *Les côtés* AB *et* AC (*fig.* 202) *sont proportionnels aux segments déterminés par la parallèle* DE, *soit à partir du sommet* A *du triangle, soit à partir de la base.*

En effet, on a

1° $$\frac{AB}{AD}=\frac{5}{3} \text{ et } \frac{AC}{AE}=\frac{5}{3};$$

donc

[1] $$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}.$$

2° $$\frac{AB}{BD}=\frac{5}{2} \text{ et } \frac{AC}{CE}=\frac{5}{2};$$

donc

[2] $$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CE}.$$

En changeant les moyens de place dans [1] et [2], on a encore

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE} \text{ et } \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CE}.$$

276. Corollaire II. — *Deux droites quelconques coupées par des parallèles sont partagées en parties proportionnelles.*

Soient les droites AB, CD coupées par les parallèles EF, GH, KL. Il faut prouver les relations suivantes :

$$\frac{EG}{FH}=\frac{GK}{HL}=\frac{KB}{LD}.$$

A cet effet, menons par le point E une parallèle EM à CD. D'après le corollaire précédent, le triangle EKN donne

$$\frac{EK}{EN}=\frac{EG}{EP}=\frac{GK}{PN}.$$

Le triangle EBM donne, d'autre part,

$$\frac{EK}{EN}=\frac{KB}{NM};$$

et, à cause du rapport commun $\frac{EK}{EN}$, on a :

$$\frac{EG}{EP}=\frac{GK}{PN}=\frac{KB}{NM}.$$

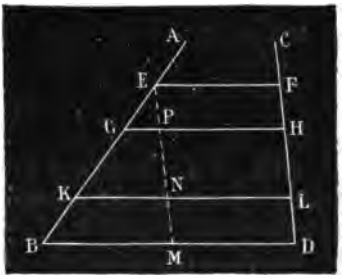


FIG. 204.

Mais EP = FH, PN = HL et NM = LD, comme parallèles comprises entre parallèles. Donc enfin

$$\frac{EG}{FH}=\frac{GK}{HL}=\frac{KB}{LD}.$$ C. Q. F. D.

THÉORÈME (*réciproque*).

277. — *Toute droite qui partage deux côtés d'un triangle en parties proportionnelles, est parallèle au troisième côté.*

Si dans le triangle ABC la droite DE donne

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

cette droite est parallèle à BC.

En effet, la parallèle à BC menée par le point D doit diviser AC dans un rapport égal à $\frac{AD}{DB}$; mais comme

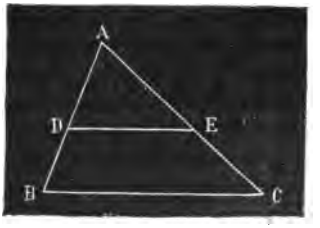


FIG. 205.

il n'y a qu'un seul point de AC qui puisse jouir de cette propriété, et que, par hypothèse, le point E forme cette division, la parallèle considérée passe aussi par le point E, et, par conséquent, n'est autre que DE.

CHAPITRE II

Propriétés des bissectrices d'un triangle. — Lieu géométrique des points dont le rapport des distances à deux points fixes est constant.

THÉORÈME

278. — *La bissectrice d'un angle intérieur ou extérieur d'un triangle divise le côté opposé en segments* additifs *ou* soustractifs *proportionnels aux côtés adjacents.*

1° Soit le triangle ABC dans lequel AD est bissectrice de l'angle *intérieur* A.

Il faut démontrer que les segments additifs DB, DC qu'elle détermine sur BC sont proportionnels aux côtés AB, AC ou que

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Menons CE parallèle à AD jusqu'à sa rencontre avec BA prolongé. Le triangle BCE donne

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AE}.$$

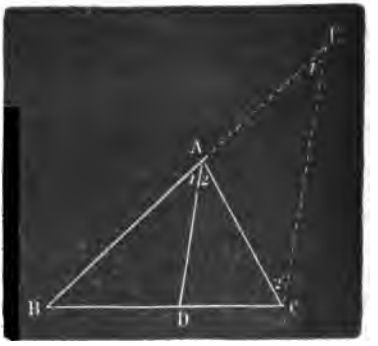


FIG. 206.

Comparant cette égalité à celle qu'il faut trouver, nous voyons qu'il suffit de montrer que AE = AC. Or, les angles 1 et 1′ sont égaux comme correspondants, et les angles 2 et 2′ égaux comme alternes-internes : donc les angles 1′ et 2′ sont égaux comme étant l'un et l'autre égaux à l'angle 2. Donc le triangle ACE est isocèle et AE = AC : d'où la relation cherchée :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

La proportion précédente s'écrit encore, en changeant les moyens de place,

$$\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC}.$$

2° Soit, dans le triangle ABC, la bissectrice AD′ de l'angle *extérieur* CAF, laquelle forme sur le côté BC les deux segments soustractifs D′B, D′C.

On aura encore la proportion

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}.$$

En effet, la parallèle CE à AD′ donne

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AE}.$$

De même que dans le cas de l'angle intérieur, il suffit de prouver que AE = AC.

Or, les angles 1 et 1′ sont égaux comme correspondants, et les angles 2 et 2′ égaux comme alternes-internes : donc les angles 1′ et 2′ sont égaux comme étant l'un et l'autre égaux à l'angle 2. Donc le triangle ACE est isocèle et AE = AC; d'où enfin :

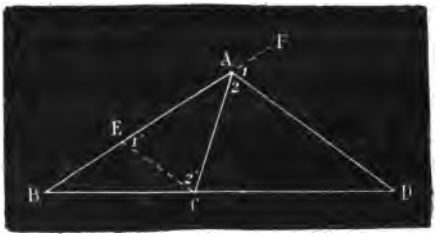


FIG. 207.

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}$$

ou encore, comme plus haut,

$$\frac{D'B}{AB} = \frac{D'C}{AC}.$$

THÉORÈME (*réciproque.*)

279. — *Si une droite issue d'un sommet d'un triangle divise le côté opposé en segments additifs ou soustractifs proportionnels aux côtés adjacents, elle est bissectrice de l'angle intérieur ou extérieur formé par ces côtés.*

Par hypothèse, le point D partage, dans le triangle ABC, le côté BC en segments additifs, de sorte qu'on a :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Je dis que AD est bissectrice de l'angle intérieur BAC.

En effet, entre B et C, il existe un seul point qui divise BC dans le rapport de AB à AC; or, d'après le théorème direct, ce point appartient à la bissectrice de l'angle BAC : donc la droite AD a les points A et D de communs avec la bissectrice de l'angle BAC : donc cette droite AD n'est autre que cette bissectrice.

La démonstration est identiquement la même pour les segments soustractifs.

FIG. 208.

279 *bis*. Calcul des segments. — *Connaissant les côtés* a, b, c *d'un triangle* ABC, *calculer les segments additifs et les segments soustractifs déterminés sur un des côtés par les pieds des bissectrices de l'angle opposé et de son supplément.*

Soient DB et DC les segments déterminés par la bissectrice AD. On a :

$$\frac{DB}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{DB + DC}{c + b} = \frac{a}{c + b}$$

d'où :

$$DB = \frac{ac}{c + b}$$

et $DC = \frac{ab}{c + b}$.

Pour les segments D'B, D'C déterminés par la bissectrice AD', on a de même :

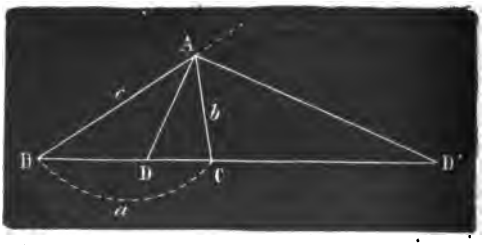


FIG. 208 *bis*.

$$\frac{D'B}{c} = \frac{D'C}{b} = \frac{D'B - D'C}{c - b} = \frac{a}{c - b},$$

d'où :

$$D'B = \frac{ac}{c - b}$$

et

$$D'C = \frac{ab}{c - b}.$$

Dans le cas où l'on voudrait calculer la distance DD′, on aurait

$$DD' = DC + D'C = \frac{ab}{c+b} + \frac{ab}{c-b} = \frac{2abc}{c^2 - b^2}.$$

280. — *Le lieu des points tels que le rapport de leurs distances deux points fixes soit constant est une circonférence.*

Soient A et B les deux points fixes et $\frac{m}{n}$ le rapport constant.

Sur la droite indéfinie AB, il existe deux points (271) D et D′ qui vérifient les relations

$$(1) \qquad \frac{DA}{DB} = \frac{m}{n}$$

et

$$(2) \qquad \frac{D'A}{D'B} = \frac{m}{n}.$$

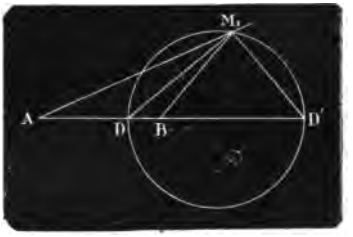


FIG. 209.

Ces deux points font par conséquent partie du lieu cherché. Il faut démontrer que tout point M_1 du lieu appartient à une circonférence qui aura DD′ pour diamètre.

Par hypothèse on a :

$$\frac{M_1A}{M_1B} = \frac{m}{n},$$

par conséquent

$$\frac{M_1A}{M_1B} = \frac{DA}{DB} = \frac{D'A}{D'B}.$$

Ce qui fait voir (279) que la droite M_1D est bissectrice de l'angle AM_1B et que M_1D' est bissectrice de l'angle extérieur supplémentaire de AM_1B. Les bissectrices M_1D et M_1D' étant perpendiculaires l'une à l'autre, l'angle DM_1D' est droit; donc le point M_1 est sur la circonférence décrite sur DD′ comme diamètre.

281. Réciproquement, il faut démontrer que tout point M de la circonférence décrite sur DD′ comme diamètre est un point du lieu, c'est-à-dire que

$$\frac{MA}{MB} = \frac{m}{n}.$$

En effet, menons MA, MB, MD et MD′; puis par le point B

traçons BE parallèle à MD et BF parallèle à MD′. Alors nous avons, par suite de ces parallèles,

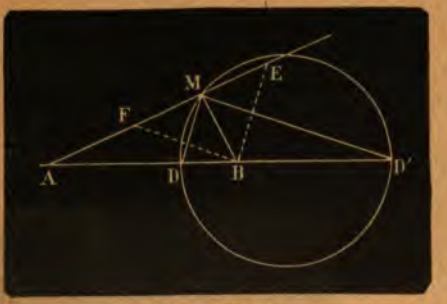


Fig. 209 *bis*.

$$\frac{DA}{DB} = \frac{MA}{ME}$$

et

$$\frac{D'A}{D'B} = \frac{MA}{MF}.$$

Mais, par hypothèse,

$$\frac{DA}{DB} = \frac{D'A}{D'B} = \frac{m}{n},$$

donc

$$\frac{MA}{ME} = \frac{MA}{MF},$$

égalité qui donne ME = MF. Or, l'angle EBF est un angle droit, car ses côtés sont respectivement parallèles aux côtés de l'angle droit DMD′ : donc le point B est sur une circonférence décrite sur EF comme diamètre ; par suite ME = MF = MB. A cause de cette dernière égalité, nous pouvons écrire :

$$\frac{DA}{DB} = \frac{D'A}{D'B} = \frac{MA}{MB} = \frac{m}{n}.$$

Ce qui démontre que le point M fait partie du lieu.

Remarque. — Si le rapport donné $\frac{m}{n} = 1$, le point D est le milieu de AB, et le point D′ est rejeté à l'infini.

La circonférence décrite sur DD′ est remplacée par la médiatrice de AB.

CHAPITRE III

Triangles semblables. — Cas de similitude.

Définitions.

282. — Deux triangles sont dits *semblables* lorsqu'ils ont les angles égaux chacun à chacun et les côtés homologues proportionnels. On appelle *sommets homologues* deux sommets qui sont les sommets d'angles égaux.

On nomme *côtés homologues* deux côtés dont les extrémités correspondent à des sommets respectivement homologues dans les deux triangles.

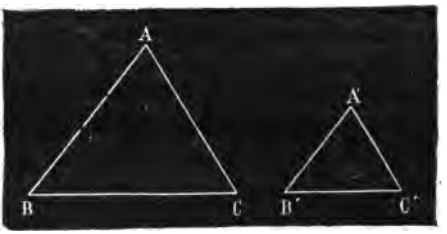


FIG. 210.

Enfin, le rapport de deux côtés homologues est ce qu'on appelle le *rapport de similitude* des deux triangles.

Ainsi, les triangles ABC, A'B'C' étant supposés semblables ont pour sommets homologues les angles A et A', B et B', C et C'; pour côtés homologues AB et A'B', AC et A'C', BC et B'C'; enfin pour rapport de similitude la valeur constante du rapport, $\frac{AB}{A'B'}$, de deux côtés homologues quelconques.

THÉORÈME

283. — *Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine un nouveau triangle semblable au premier.*

Soit la droite DE parallèle au côté BC. Je dis que le triangle ADE est semblable au triangle ABC.

En effet, ces deux triangles ont d'abord les angles égaux chacun à chacun, savoir : l'angle A commun, les angles 1 et 1' égaux comme correspondants, les angles 2 et 2' égaux aussi pour la même raison.

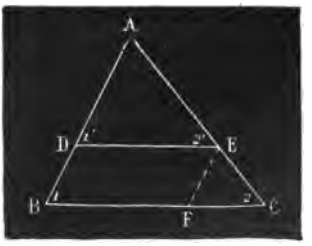


FIG. 211.

De plus ces triangles ont les côtés homologues proportionnels; car la parallèle DE donne (273)

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

Si l'on mène une parallèle EF à AB elle donne aussi

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}.$$

Mais la figure BDEF étant un parallélogramme DE = BF.

Si, dans l'égalité précédente, on remplace BF par sa valeur DE, on a les trois rapports égaux

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

Les deux triangles ABC et ADE ayant leurs angles respectivement égaux et leurs côtés homologues proportionnels sont semblables.

La démonstration serait la même, si la parallèle DE rencontrait les prolongements des côtés du triangle ABC.

284. Remarque. — Si deux triangles ABC et A′B′C′ sont semblables, on doit avoir, d'après la définition donnée plus haut (282) :

$$A = A', \; B = B',$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

Mais il n'est pas *nécessaire* de connaître ces *quatre* relations pour être à même de conclure que deux triangles sont semblables. Les théorèmes suivants vont nous apprendre que *deux* de ces relations convenablement choisies *entraînent* forcément les deux autres et par suite la similitude des triangles.

THÉORÈME

285. — *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun.*

Soient les deux triangles ABC, A′B′C′ dans lesquels A = A′ et B = B′.

Je dis que ces deux triangles sont semblables.

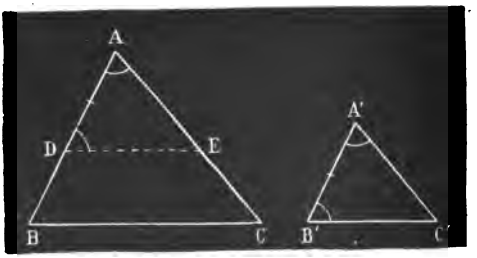


FIG. 212.

En effet, prenons sur AB une longueur AD = A′B′, et menons DE parallèle à BC. Le triangle ADE est semblable à ABC (283); si nous prouvons que ADE est égal à A′B′C′, nous aurons démontré que A′B′C′ est lui-même semblable à ABC. Or, les triangles ADE, A′B′C′

ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, savoir : les côtés AD et A'B' égaux par construction, les angles A et A' égaux par hypothèse et les angles D et B' égaux aussi, comme étant l'un et l'autre égaux au même angle B : donc ces deux triangles sont égaux et par conséquent A'B'C' est semblable à ABC.

286. Corollaire. — *Deux triangles rectangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle aigu égal.*

THÉORÈME

287. — *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels (fig. 213).*

Soient les deux triangles ABC, A'B'C' dans lesquels $A' = A$ et

$$[1] \qquad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}.$$

Je dis que ces deux triangles sont semblables.

En effet, prenons sur AB une longueur $AD = A'B'$ et menons DE parallèle à BC. Le triangle ADE est semblable à ABC, si nous prouvons qu'il est égal à A'B'C', nous aurons démontré que A'B'C' est lui-même semblable à ABC. Or, la similitude des triangles ADE, ABC donne

$$[2] \qquad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

Mais par construction $AD = A'B'$; en remplaçant dans l'égalité [2] AD par sa valeur A'B', il vient :

$$[3] \qquad \frac{A'B'}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

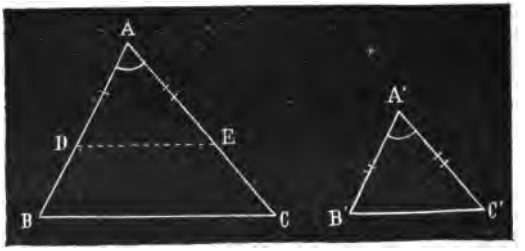


FIG. 213.

Or, les égalités [1] et [3] ayant le rapport $\frac{A'B'}{AB}$ de commun, il en résulte que

$$\frac{AE}{AC} = \frac{A'C'}{AC}.$$

Dans cette dernière proportion l'égalité des dénominateurs entraîne celle des numérateurs ; par suite,

$$AE = A'C'.$$

Les deux triangles ADE, A'B'C' ont alors un angle égal compris

entre côtés respectivement égaux : donc ils sont égaux et A′B′C′ est par conséquent semblable à ABC.

288. Corollaire. — ***Deux triangles rectangles sont semblables lorsqu'ils ont deux côtés proportionnels chacun à chacun.***

Le fait est évident, si les côtés proportionnels comprennent l'angle droit. Supposons donc que ces côtés soient l'hypoténuse et un côté de l'angle droit. Considérons, par exemple, les triangles rectangles ABC, A′B′C′ dans lesquels on a :

$$\frac{B'A'}{BA} = \frac{B'C'}{BC}.$$

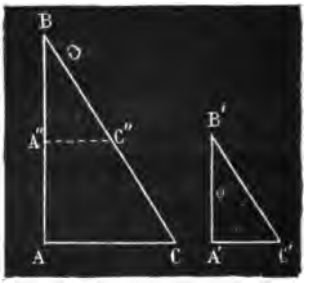


FIG. 214.

Je dis qu'ils sont semblables.

En effet, prenons sur BA une longueur $BA'' = B'A'$ et menons A″C″ parallèle à AC. Le triangle BA″C″ est semblable à BAC, il suffit de prouver qu'il est de plus égal à B′A′C′. Or, ces deux triangles rectangles ont deux côtés égaux chacun à chacun ; car la parallèle A″C″ donne :

$$\frac{BA''}{BA} = \frac{BC''}{BC},$$

ou, puisque $BA'' = B'A'$,

$$\frac{B'A'}{BA} = \frac{BC''}{BC}.$$

Mais on a, par hypothèse,

$$\frac{B'A'}{BA} = \frac{B'C'}{BC};$$

donc,

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{BC''}{BC}.$$

D'où il résulte que $B'C' = BC''$: les triangles BA″C″ et B′A′C′ sont donc égaux (82) ; par suite, ABC et A′B′C′ sont semblables.

THÉORÈME

289. — ***Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont les trois côtés proportionnels.***

Soient les deux triangles ABC, A′B′C′ dans lesquels

$$[1] \qquad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

Je dis que ces deux triangles sont semblables.

En effet, prenons sur AB une longueur AD = A'B', et menons DE parallèle à BC. Le triangle ADE est semblable à ABC, si nous prouvons qu'il est de plus égal à A'B'C', nous aurons démontré que A'B'C' est lui-même semblable à ABC. Or, la similitude des triangles ADE et ABC donne :

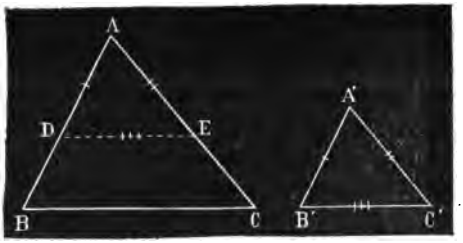


FIG. 215.

$$[2] \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{BC}{DE}.$$

Mais A'B' étant, par construction, égal à AD, nous pouvons écrire

$$[3] \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{CB}.$$

Les égalités [1] et [3] ayant un rapport commun, $\frac{A'B'}{AB}$, il en résulte que tous les autres rapports sont égaux et que ceux qui ont même dénominateur, ont des numérateurs égaux. Donc

$$AE = A'C' \text{ et } DE = B'C'.$$

Les deux triangles ADE et A'B'C' ont alors les trois côtés égaux chacun à chacun, donc ils sont égaux et A'B'C' est semblable à ABC.

290. Analogie entre l'égalité et la similitude. — Ainsi que l'indique le tableau ci-dessous, il existe une très grande analogie entre l'égalité et la similitude des triangles.

Deux triangles sont :

ÉGAUX	SEMBLABLES
Lorsqu'ils ont :	Lorsqu'ils ont :
1° *Deux angles égaux comprenant un côté égal ;*	1° *Deux angles égaux ;*
2° *Un angle égal compris entre deux côtés égaux ;*	2° *Un angle égal compris entre deux côtés proportionnels ;*
3° *Les trois côtés égaux.*	3° *Les trois côtés proportionnels.*

Pour le second cas et le troisième, on voit que dans la similitude la *proportionnalité* est substituée à l'*égalité*.

D'autre part, on remarque que la démonstration de la similitude de deux triangles consiste à prouver l'égalité de l'un d'eux avec un triangle semblable à l'autre.

Enfin, il est utile de se rappeler que pour la démonstration de chaque cas de similitude on fait usage du cas d'égalité correspondant.

THÉORÈME

291. — *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont leurs côtés respectivement parallèles ou perpendiculaires.*

Appelons A, B, C les trois angles de l'un des triangles, et A′, B′, C′ les trois angles correspondants de l'autre. Les angles A et A′, B et B′, C et C′ ont leurs côtés parallèles ou perpendiculaires. Or, nous savons que deux angles qui ont les côtés parallèles ou perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires.

On ne peut donc faire que quatre hypothèses :

1° $A + A' = 2$ droits ; $B + B' = 2$ droits ; $C + C' = 2$ droits ;

2° $A + A' = 2$ droits ; $B + B' = 2$ droits ; $C = C'$;

3° $A + A' = 2$ droits ; $B = B'$; $C = C'$;

4° $A = A'$; $B = B'$; $C = C'$.

Les deux premières hypothèses sont inadmissibles, car la somme des 6 angles vaudrait plus de 4 droits. Il est évident que la troisième hypothèse rentre dans la quatrième, car $A + A' = 2$ droits donne $A = A'$: donc les deux triangles sont équiangles et par conséquent semblables.

CHAPITRE IV

Figures homothétiques. — Centres de similitude de deux cercles. — Polygones semblables. — Propriété des sécantes issues d'un même point.

---

§ Ier. — FIGURES HOMOTHÉTIQUES

Définitions.

292. — Soit O un point quelconque pris dans le plan d'une figure F. Si l'on joint par des droites le point O à différents points A, B, C... de la figure F, et qu'on prenne sur OA, OB... des longueurs OA′, OB′... telles que $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \ldots K$,

On détermine une seconde figure F′ *homothétique* à la première.

Le point O est le *centre d'homothétie*, et le nombre constant K est le *rapport d'homothétie*. Les points correspondants A et A′, B et B′, C et C′ sont dits *homologues;* les droites OA et OA′, OB et OB′, etc., qui vont du centre d'homothétie à deux points homologues, sont des *rayons homologues*.

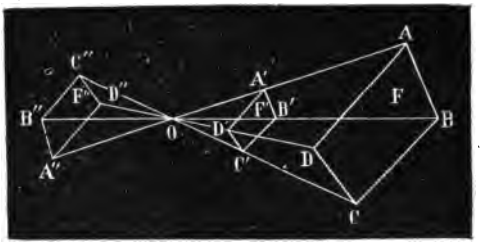


FIG. 216.

On nomme *droites homologues* des droites telles que AB, A′B′... ou AB, A″B″... qui dans les figures homothétiques F et F′ ou F et F″, joignent des points respectivement homologues.

293. — L'homothétie est *directe* ou *inverse*, suivant que dans les deux figures les rayons homologues sont de même sens ou de sens contraire. Ainsi les figures F et F′ sont *directement homothétiques*, et les figures F et F″ sont *inversement homothétiques*.

294. — Les points A, B, C,... et A′, B′, C′... (*fig.* 216) forment ce qu'on appelle deux *systèmes de points homothétiques*. Donc, deux polygones sont homothétiques lorsque leurs sommets forment deux systèmes de points homothétiques.

295. — Si l'on construit deux figures F′ et F″ ayant chacune, avec une figure F, le même centre O d'homothétie et le même rapport d'homothétie K, et que la première soit directement et la seconde inversement homothétiques à la figure F, il arrive que les figures F′ et F″ sont égales, car il est évident qu'on peut les faire coïncider en faisant tourner l'une d'elles de 180°, autour du centre d'homothétie. Si donc deux figures sont inversement homothétiques, il suffit de faire tourner l'une d'elles de 180°, autour du centre d'homothétie, pour qu'elle devienne directement homothétique à l'autre.

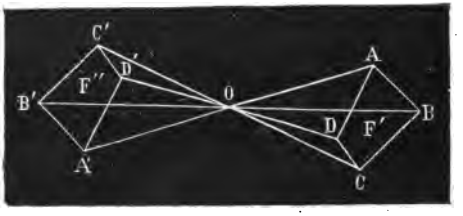


FIG. 217.

THÉORÈME

296. — *Dans deux figures homothétiques, deux droites homologues sont parallèles, de même sens ou de sens contraire, selon que l'homo-*

thétie est directe ou inverse, et leur rapport est égal au rapport d'homothétie.

Soient, dans les figures directement homothétiques F, F′, deux droites homologues quelconques AB et A′B′ et K le rapport d'homothétie.

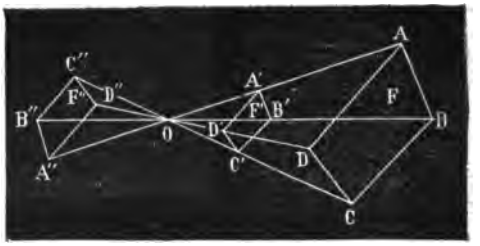


FIG. 218.

Les deux triangles AOB, A′OB′ ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels sont semblables; par suite, les droites homologues AB et A′B′ sont parallèles et de même sens; d'ailleurs, le rapport de ces droites est égal à K, car la similitude des triangles donne :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = K.$$

A cause des triangles semblables AOB et A″OB″, dans les figures F et F″, inversement homothétiques, on verrait de même que les droites homologues AB et A″B″ sont parallèles, de sens contraire, et que leur rapport est encore égal au rapport d'homothétie $\frac{OA''}{OA} = K$.

297. Corollaire I. — *La figure homothétique d'un angle par rapport à un point quelconque pris pour centre d'homothétie, est un angle égal dont les côtés sont parallèles à ceux du premier angle, de même sens ou de sens contraire, selon que l'homothétie est directe ou inverse.*

298. Corollaire II. — *La figure homothétique d'un polygone par rapport à un point quelconque pris pour centre d'homothétie, est un polygone; les côtés qui se correspondent dans les deux polygones sont parallèles, les angles qui se correspondent sont égaux; les côtés parallèles, ainsi que les côtés des angles égaux, sont de même sens ou de sens contraire, selon que l'homothétie est directe ou inverse. Enfin, le rapport des côtés qui se correspondent est égal au rapport d'homothétie des deux polygones.*

THÉORÈME

299. — *Deux systèmes de points sont homothétiques, s'il existe dans leur plan commun deux points* P *et* P′ *tels que les droites qui joignent le point* P *aux divers points du premier système, et les droites qui*

joignent le point P′ *aux divers points correspondants du second, soient parallèles et dans le même rapport.*

Soient A et A′, B et B′..... des points correspondants, et K le rapport constant.

On a, par hypothèse,

$$\frac{P'A'}{PA} = \frac{P'B'}{PB} = \frac{P'C'}{PC} = \ldots\ldots K.$$

D'autre part, si les droites PA et P′A′ sont parallèles et de même sens, la droite AA′ ira couper le prolongement de PP′ en un certain point O, et l'on aura, à cause des triangles semblables OAP et OA′P′, et des rapports précédents,

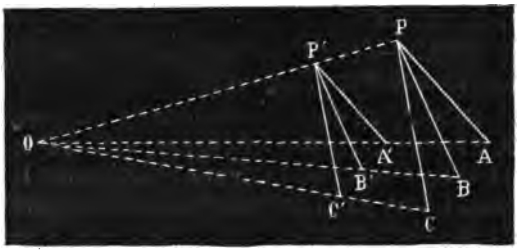


FIG. 219.

$$\frac{OP'}{OP} = \frac{P'A'}{PA} = \frac{P'B'}{PB} = \ldots\ldots K.$$

Le point O est donc aussi le point de concours des droites BB′, CC′... avec PP′, et, par conséquent,

$$\frac{OP'}{OP} = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \ldots\ldots K.$$

Les deux systèmes sont donc directement homothétiques; le centre d'homothétie est le point O et le rapport d'homothétie est K.

Si les droites PA, P′A′... sont parallèles et de sens contraires, le point O se trouve entre les points P et P′; alors les deux systèmes sont inversement homothétiques. Dans ce cas la démonstration est identique à la précédente.

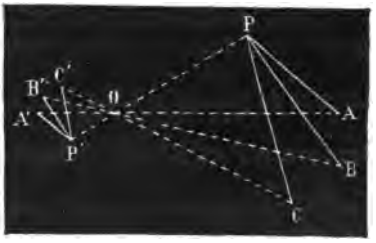


FIG. 220.

300. Remarque. — Si les rapports $\frac{P'A'}{PA}, \frac{P'B'}{PB}, \ldots$ sont égaux à l'unité, c'est que les droites parallèles P′A′ et PA, P′B′ et PB, sont égales; mais de ce que ces droites soient égales et paral-

lèles, il résulte que les droites PP′ et AA′, PP′ et BB′,... sont aussi égales et parallèles : elles ne peuvent donc se rencontrer. On dit dans ce cas que le centre O d'homothétie des deux figures est rejeté à l'infini.

Si les droites parallèles P′A′ et PA, P′B′ et PB,... étaient de sens contraire (*fig.* 220), mais égales, on aurait aussi P′O = OP, A′O = OA,... de sorte que le centre O d'homothétie partagerait chacune des droites PP′, AA′,... en deux parties égales.

THÉORÈME

301. — *Deux figures* F′ *et* F″ *homothétiques à une troisième* F *sont homothétiques entre elles.*

Soient I un point quelconque de la figure F, I′ le point homologue de la figure F′, et I″ le point homologue de la figure F″. Joignons le point I à un point quelconque M de la figure F; joignons de même I′ et I″ aux points M′ et M″ homologues de M dans les figures F′ et F″.

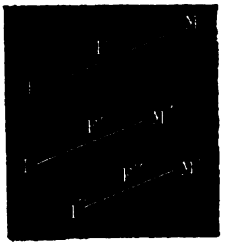


FIG. 221.

Les droites I′M′, I″M″ étant l'une et l'autre parallèles à IM (296) sont parallèles entre elles. De plus, si l'on désigne par K′ et K″ les rapports d'homothétie des figures F′ et F″ avec la figure F, on a

$$\frac{I'M'}{IM} = K' \text{ et } \frac{I''M''}{IM} = K',$$

d'où on tire

$$\frac{I'M'}{I''M''} = \frac{K'}{K''}.$$

Ainsi, les droites I′M′ et I″M″, quelconques dans les figures F′ et F″, mais par construction homologues dans ces deux figures, sont parallèles et de plus elles sont dans un rapport constant égal à $\frac{K'}{K''}$: donc les figures F′ et F″ sont homothétiques et leur rapport d'homothétie est $\frac{K'}{K''}$, ou égal au rapport d'homothétie de F′ à F divisé par le rapport d'homothétie de F″ à F.

302. Remarque. — Si les figures F′ et F″ sont l'une et l'autre directement ou inversement homothétiques à F, les droites I′M′, I″M″ sont toutes deux de même sens que IM ou toutes deux de sens contraire. Dans les deux cas I′M′ et I″M″ sont de même sens et, par suite, les figures F′ et F″ sont directement homothétiques. Si, au contraire, l'une des figures F′ et F″ est directement et l'autre inverse-

ment homothétique à F, les droites I'M' et I''M'' sont dirigées l'une dans le sens IM et l'autre en sens contraire, et alors les figures F' et F'' sont inversement homothétiques.

303. Corollaire I. — *Si le rapport d'homothétie des figures* F' *et* F *est égal au rapport d'homothétie des figures* F'' *et* F, *les figures* F' *et* F'' *sont égales.*

Car alors on a :

$$\frac{F'}{F} = \frac{F''}{F}, \text{ d'où } \frac{F'}{F''} = \frac{F}{F} = 1.$$

Le rapport d'homothétie des figures F' et F'' étant égal à l'unité, il en résulte que ces deux figures sont égales.

304. Corollaire II. — *Si l'on prend un même point pour centre d'homothétie et que l'on fasse varier de zéro à l'infini le rapport d'homothétie, on pourra construire des figures égales à toutes les figures homothétiques d'une même figure* F.

THÉORÈME

305. — *Lorsque trois figures sont deux à deux homothétiques, les trois centres d'homothétie sont en ligne droite.*

Soient F, F', F'' les trois figures deux à deux homothétiques, O le centre d'homothétie des figures F' et F'', O' le centre d'homothétie des figures F et F'', O'' le centre d'homothétie des figures F et F'.

Je dis que les trois centres O, O', O'' sont en ligne droite.

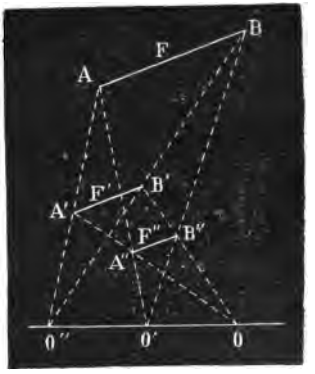


FIG. 222.

En effet, si l'on considère la droite O''O' comme appartenant à la figure F', elle a pour homologue dans la figure F la droite O''O' elle-même, puisqu'elle passe par le point O'', centre d'homothétie des figures F' et F. Si l'on considère la même droite O''O' comme appartenant à la figure F'', elle a pour homologue dans la figure F la droite O''O' elle-même, puisqu'elle passe par le point O', centre d'homothétie des figures F'' et F. La droite O''O' étant homologue à elle-même dans les figures F' et F, F'' et F est aussi homologue à elle-même dans les figures F' et F'', donc elle passe par le point O, centre d'homothétie de ces deux figures. Donc les trois centres d'homothétie O, O', O'', sont en ligne droite. Cette droite est appelée *axe d'homothétie ou axe de similitude directe.*

§ II. — CENTRES D'HOMOTHÉTIE OU DE SIMILITUDE DE DEUX CERCLES

THÉORÈME

306. — *La figure homothétique d'un cercle est un autre cercle.*

Soient C un cercle, O un centre d'homothétie, K le rapport d'homothétie et A un point quelconque du cercle donné.

Il s'agit de trouver le lieu des points A′ tels que le rapport $\frac{OA'}{OA} = K$.

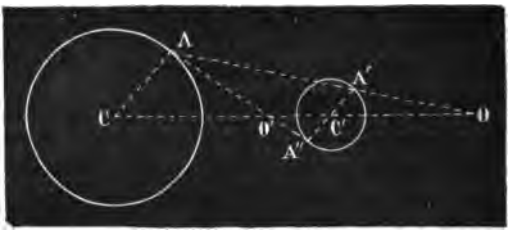


FIG. 223.

Prenons sur la droite OC une longueur OC′ telle que

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{OA'}{OA} = K;$$

puis traçons CA et C′A′. Les triangles OA′C′ et OAC ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels sont semblables et donnent :

$$\frac{C'A'}{CA} = \frac{OC'}{OC} = K,$$

d'où

$$C'A' = CA \times K.$$

Mais CA est constant, donc C′A′ est aussi constant. Le lieu des points A′ est donc un cercle ayant son centre en C′ et pour rayon $C'A' = CA \times K$.

Les cercles C et C′ sont directement homothétiques.

La démonstration serait la même si l'on considérait un centre d'homothétie inverse O′.

THEOREME (*réciproque*).

307. — ***Deux cercles quelconques sont à la fois directement et inversement homothétiques.***

Soient les deux cercles C et C′. Traçons deux rayons CA, C′A′ parallèles et de même sens. La droite AA′ prolongée rencontre la

ligne des centres en un certain point O; alors les triangles semblables OA'C' et OAC donnent :

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{C'A'}{CA}.$$

Le rapport des rayons, $\frac{C'A'}{CA}$, étant toujours constant, et comme ils sont en outre parallèles et de même sens, les cercles C et C' sont *directement* homothétiques et leur centre d'homothétie est en O.

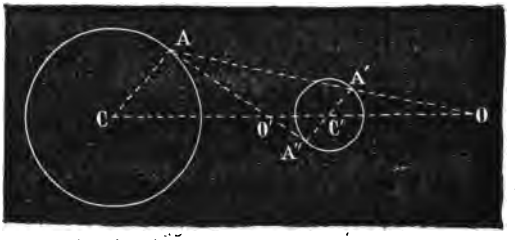


FIG. 224.

Soient maintenant deux rayons CA, C'A'' parallèles et de sens contraire. La droite AA'' rencontre la ligne des centres en un certain point O'; alors les triangles semblables O'A''C' et O'AC donnent :

$$\frac{O'C'}{O'C} = \frac{C'A''}{CA}.$$

Le rapport des rayons, $\frac{C'A''}{CA}$, étant toujours constant, et comme ils sont en outre parallèles et de sens contraire, les circonférences C et C' sont *inversement* homothétiques et leur centre d'homothétie est O'.

Les points O et O' sont aussi appelés *centres de similitude* des cercles C et C'.

308. Remarque I. — Il est évident que si deux cercles se touchent extérieurement, leur point de contact est leur centre d'homothétie inverse, et que s'ils se touchent intérieurement, le point de contact est leur centre d'homothétie directe.

309. Remarque II. — Les rapports $\frac{C'A'}{CA}$, $\frac{C'A''}{CA}$ étant constants l'un et l'autre, il en est de même des rapports $\frac{OC'}{OC}$, $\frac{O'C'}{O'C}$ qui leur sont respectivement égaux. Donc les points O et O' sont fixes, et les tangentes extérieures, positions limites de deux sécantes, joignent les extrémités de deux rayons parallèles, de même sens, et passent par le centre d'homothétie directe.

Quant aux tangentes intérieures elles joignent également deux rayons parallèles, de sens contraire, et passent par le centre d'homo-

thétie inverse. De là un nouveau moyen facile de mener des tangentes communes à deux circonférences.

1° *Pour une tangente extérieure, on détermine d'abord le centre d'homothétie directe; puis on mène par ce point une tangente à l'une des circonférences; elle est aussi tangente à l'autre.*

2° *Pour une tangente intérieure, on commence par déterminer le centre d'homothétie inverse; puis on mène par ce point une tangente à l'une des circonférences; elle est aussi tangente à l'autre.*

THÉORÈME

310. — *Les trois centres d'homothétie directe de trois cercles sont en ligne droite; deux centres d'homothétie inverse sont aussi en ligne droite avec le centre d'homothétie directe qui correspond au troisième, centre d'homothétie inverse.*

Soient O, O′, O″ trois cercles; D, D′, D″ les centres d'homothétie

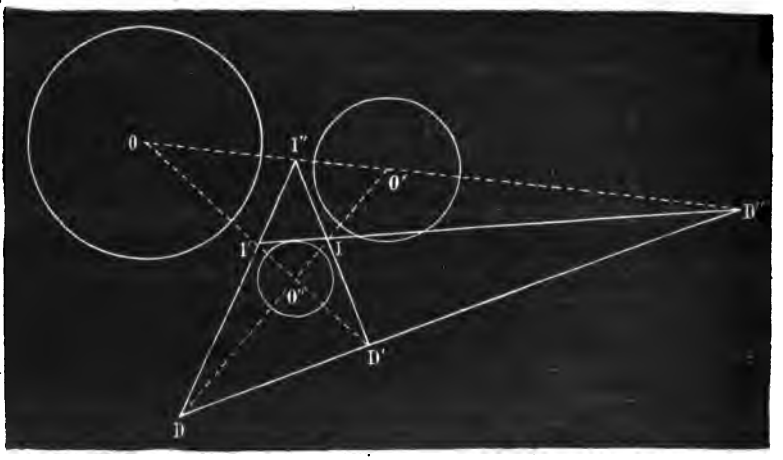


FIG. 225.

directe des cercles O′ et O″, O et O″, O et O′; et soient I, I′, I″ les centres d'homothétie inverse des mêmes cercles.

Les cercles O′ et O″ étant l'un et l'autre directement homothétiques au cercle O sont homothétiques entre eux : donc (305) les trois centres d'homothétie directe, D, D′, D″, sont en ligne droite. D'autre part, les cercles O′ et O″ étant inversement homothétiques au cercle O (307) sont directement homothétiques entre eux : donc les deux centres d'homothétie inverse, I″ et I′, des cercles O′ et O″ par rapport au cercle O, et le point D, centre d'homothétie directe correspondant au troisième centre I d'homothétie inverse, sont trois points en ligne droite.

De même les cercles O″ et O étant inversement homothétiques au cercle O′ sont directement homothétiques entre eux : donc les trois points I″, I, D′ sont en ligne droite. Enfin, pour une raison analogue les trois points I′, I, D″ sont également en ligne droite.

Les trois cercles ont donc quatre axes d'homothétie, savoir : DD′D″, I′I′D, I″ID′, I′ID″. Le premier est un *axe d'homothétie directe*, et chacun des trois autres, un *axe d'homothétie inverse*.

§ III. — POLYGONES SEMBLABLES

311. — On appelle *polygones semblables* des polygones d'un même nombre de côtés qui ont leurs angles égaux chacun à chacun et leurs côtés homologues proportionnels.

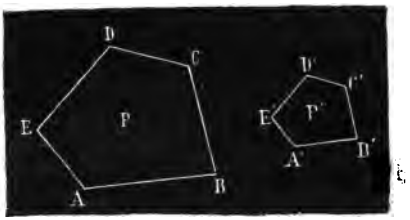


FIG. 226.

Ce qui a été dit sur les *côtés homologues*, les *sommets homologues* et le *rapport de similitude*, en parlant des triangles semblables, s'applique aussi aux polygones semblables.

Ainsi, par exemple, en supposant que les polygones P et P′ soient semblables, ils satisfont à ces deux conditions :

$$1^{o}\ A = A', B = B', C = C', D = D', E = E';$$

$$2^{o}\ \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'A'}{EA}.$$

D'autre part, AB et A′B′ sont deux côtés homologues, parce que les angles A et B sont respectivement égaux aux angles A′ et B′; les sommets A et A′ sont homologues, parce que les angles A et A′ sont égaux; enfin, la valeur constante $\frac{A'B'}{AB}$ d'un rapport quelconque de deux côtés homologues est le rapport de similitude des deux polygones.

THÉORÈME

312. — *Deux polygones homothétiques sont semblables.*

En effet, nous avons démontré (298) que les figures homothétiques ont leurs angles égaux et leurs côtés homologues proportionnels.

THEORÈME (*réciproque*).

313. — *Deux polygones semblables qui ont leurs côtés homologues parallèles, sont homothétiques.*

Soient les polygones semblables P et P′ dont les côtés homologues sont parallèles, et dont le rapport de similitude est K.

Je dis que ces polygones sont homothétiques.

En effet, soit O le point de concours des droites AA′, BB′ ; les deux triangles semblables OAB, OA′B′ donnent :

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = K.$$

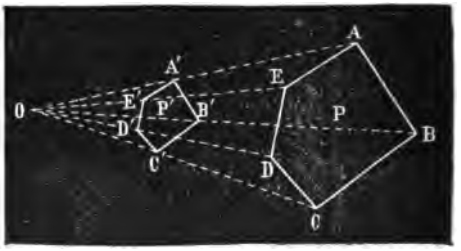


FIG. 227.

Par suite de la similitude des polygones donnés, on a aussi :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = K,$$

d'où

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{B'C'}{BC} = K.$$

Or, si l'on tire les droites OC, OC′, les triangles OBC, OB′C′ sont semblables ; car ils ont des angles correspondants, OBC, OB′C′, égaux compris entre côtés proportionnels, par conséquent leurs angles en O sont égaux. Donc les droites OC et OC′ se confondent, c'est-à-dire que les points C, C′, O sont en ligne droite. On verrait de même que les droites DD′, EE′ prolongées passent aussi au point O. Ce point partage d'ailleurs chacune de ces droites dans le rapport K. Donc les deux polygones sont homothétiques.

314. Remarque. — Les polygones sont homothétiques directs ou inverses, selon que les côtés homologues sont parallèles dans le même sens ou en sens contraire.

315. Corollaire I. — *Deux triangles qui ont leurs côtés parallèles sont homothétiques.*

316. Corollaire II. — *Deux polygones semblables étant donnés, ils peuvent toujours être placés de façon à être homothétiques, par rapport à un point quelconque choisi dans leur plan.*

317. Corollaire III. — *Si l'on prend un même point pour centre d'homothétie et que l'on fasse varier le rapport* K *de zéro à l'infini, on pourra obtenir tous les polygones semblables à un polygone donné, en construisant les polygones qui lui sont homothétiques.*

318. Définition. — Il résulte de ce qui précède cette autre définition des polygones semblables :

On appelle *polygones semblables* des figures qui peuvent être placées dans un même plan de façon à être homothétiques.

THÉORÈME

319. — *Le rapport des périmètres de deux polygones semblables est égal au rapport de similitude.*

En effet, soient P et P′ les périmètres de deux polygones semblables ; a, b, c, d,..... les longueurs des côtés du premier, et a', b', c', d',..... les longueurs des côtés homologues du second. On a, d'après la définition même des polygones semblables,

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}=\ldots\ldots,$$

d'où

$$\frac{a+b+c+d\ldots\ldots}{a'+b'+c'+d'\ldots\ldots}=\frac{a}{a'};$$

remplaçant le premier membre de cette égalité par sa valeur, on a :

$$\frac{P}{P'}=\frac{a}{a'} \qquad \text{C. q. f. d.}$$

THÉORÈME

320. — *Deux polygones semblables sont décomposables en un même nombre de triangles semblables et semblablement placés.*

Soient P et P′ deux polygones semblables. Pour démontrer que ces deux polygones sont décomposables en un même nombre de triangles semblables et semblablement placés, prenons à l'*intérieur* du premier un point quelconque O, et joignons ce point aux extrémités du côté AB.

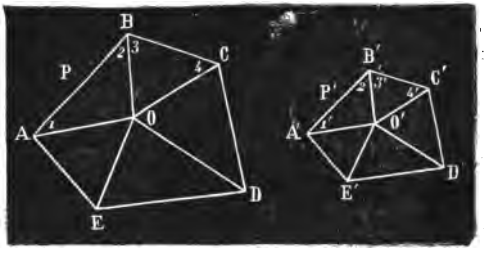


FIG. 228.

Si sur le côté A′B′, homologue de AB, nous construisons dans l'*intérieur* du polygone P′, aux points A′ et B′, des angles 1′ et 2′ respectivement égaux aux angles 1 et 2, nous obtiendrons deux triangles OAB, O′A′B′ qui seront semblables et semblablement disposés. Si nous joignons maintenant le point O à tous les sommets du premier polygone, et le point O′ à tous les sommets du second, les deux polygones se trouveront alors décomposés en un même nombre de triangles semblablement disposés. Il s'agit de démontrer leur

similitude respective. Or, les deux premiers triangles OAB, O'A'B' sont semblables par construction et donnent :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{O'B'}.$$

D'ailleurs, la similitude des polygones donne :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'},$$

d'où, à cause du rapport commun,

$$\frac{OB}{O'B} = \frac{BC}{B'C'},$$

Mais les angles ABC et A'B'C' sont égaux par hypothèse et les angles 2 et 2' égaux par construction : donc les angles 3 et 3' sont aussi égaux comme différences d'angles égaux. Par suite, les triangles OBC et O'B'C' sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels.

La similitude des triangles OBC, O'B'C' sert à démontrer celles destriangles OCD, O'C'D', et ainsi de suite.

THÉORÈME (*réciproque*).

321. — ***Deux polygones composés d'un même nombre de triangles semblables et semblablement placés sont semblables.***

Soient les deux polygones P et P' composés d'un même nombre de triangles semblables et placés de la même façon, les uns ayant pour sommet O, les autres O'.

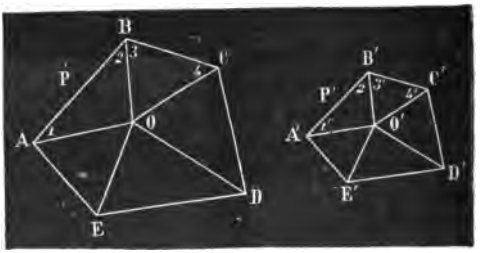


FIG. 229.

Il faut démontrer que ces deux polygones sont semblables.

1° Les angles de ces deux polygones sont égaux chacun à chacun comme somme d'angles respectivement égaux; par exemple, l'angle ABC formé des angles 2 et 3 est égal à l'angle A'B'C' formé des angles 2' et 3', lesquels sont respectivement égaux aux angles 2 et 3.

2° Les côtés homologues des deux polygones sont proportionnels; car la similitude des triangles donne cette suite de rapports égaux :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{O'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{OC}{O'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{OD}{O'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \ldots;$$

en ne considérant que les rapports des côtés des polygones, on voit que ces côtés sont proportionnels.

Les polygones P et P′ ayant leurs angles égaux et leurs côtés homologues proportionnels sont semblables.

322. Remarque I. — Deux points tels que O et O′ (*fig.* 229) sont dits homologues, lorsque les triangles OAB, O′A′B′, obtenus en joignant respectivement ces points aux extrémités de deux côtés homologues AB et A′B′, sont semblables et semblablement disposés. Or, d'après la démonstration du n° 320, on peut prendre deux points homologues quelconques pour centres de décomposition de deux polygones semblables en triangles semblables et semblablement disposés. Si donc le point O coïncidait avec l'un des sommets A, son homologue O′ coïnciderait avec le sommet A′.

Les points homologues O et O′ peuvent d'ailleurs être extérieurs aux polygones P et P′; alors ces polygones sont composés de triangles semblables additifs et de triangles semblables soustractifs.

Deux droites situées dans le plan de deux polygones semblables sont dites *homologues* lorsque leurs extrémités sont deux à deux des points homologues : telles sont, par exemple, les diagonales qui unissent les sommets homologues.

323. Remarque II. — On voit (321) que la similitude des polygones est déduite de celle des triangles. Or, deux polygones de n côtés chacun sont l'un et l'autre décomposables en $(n-2)$ triangles, et il suffit que ces triangles soient semblables deux à deux et semblablement disposés pour que les polygones soient semblables. Mais comme il faut 2 conditions (284) pour que deux triangles soient semblables, pour que deux polygones de n côtés le soient, il faudra un nombre de conditions égal à $(n-2)2$, c'est-à-dire $2n-4$.

§ IV. — PROPRIÉTÉ DES SÉCANTES ISSUES D'UN MÊME POINT

THÉORÈME

324. — *Des sécantes issues d'un même point interceptent des segments proportionnels sur deux parallèles et réciproquement.*

Soient les deux parallèles KL, MN coupées par les sécantes OA, OB, OC, OD.

Je dis qu'on a la suite de rapports égaux :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD}.$$

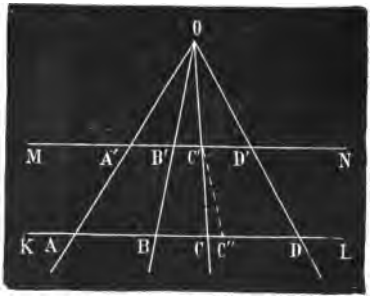


FIG. 230.

En effet, les triangles OA′B′, OB′C′, OC′D′ sont respectivement semblables aux triangles OAB, OBC, OCD, d'où cette suite de rapports égaux :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OB} = \frac{BC'}{BC} = \frac{OC'}{OC} = \frac{C'D'}{CD},$$

ce qui démontre le théorème; car si l'on supprime les rapports $\frac{OB'}{OB}$ et $\frac{OC'}{OC}$, il reste la série des rapports qu'il fallait trouver.

325. Réciproquement, *si des sécantes interceptent des segments proportionnels sur deux droites parallèles, elles sont concourantes* (*fig.* 230).

Soient les parallèles KL, MN sur lesquelles se trouvent des points A, B, C,... A′, B′, C′,... tels qu'on ait les rapports égaux :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD}.$$

Je dis que les droites AA′, BB′, CC′, DD′... sont concourantes.

En effet, soit O le point de rencontre de deux quelconques des droites considérées, par exemple, de AA′ et de BB′. Joignons OC′ et prolongeons cette ligne; soit C″ le point où elle rencontre la parallèle KL.

Les trois droites concourantes OA, OB et OC″ donnent :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC''}.$$

Mais on a, par hypothèse,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC};$$

donc, par suite du rapport commun $\frac{A'B'}{AB}$,

$$\frac{B'C'}{BC''} = \frac{B'C'}{BC}.$$

Or, dans ces deux derniers rapports, l'égalité des numérateurs entraîne celle des dénominateurs et

$$BC'' = BC.$$

Le point C″ se confond, par conséquent, avec le point C, et C′C est le prolongement de OC′.

On prouverait de même que le prolongement de DD′ passe au point O.

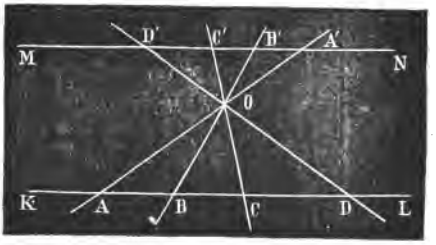


FIG. 231.

326. Remarque. — La démonstration est la même pour le

théorème et sa réciproque lorsque le point de concours O est situé entre les deux parallèles KL, MN (*fig.* 231).

CHAPITRE V

Relations métriques dans un triangle rectangle et dans un triangle quelconque.

Définitions.

327. — On appelle *relations métriques* les relations qui existent entre les nombres qui expriment les mesures de différentes longueurs. Ces relations sont indépendantes de l'unité de longueur qui a été choisie.

Afin d'abréger les énoncés des relations métriques entre des longueurs, on n'exprime pas les nombres qui sont les mesures de ces longueurs; ainsi, par exemple, on dit *le carré d'un côté, le produit de deux côtés, etc.*, au lieu d'énoncer les nombres qui sont les mesures de ces côtés.

328. — On appelle *projection* d'un point sur une droite le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite.

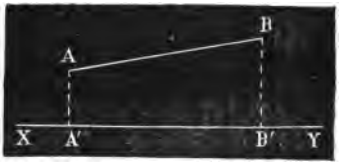


FIG. 232.

La projection d'une portion de droite AB sur une droite indéfinie XY est la distance A'B' comprise entre les projections des points A et B.

329. Remarque. — On démontre en algèbre :

1° *Que le carré de la somme de deux quantités est égal au carré de la première, plus le carré de la seconde, plus deux fois le produit de la première par la seconde.*

Si l'on désigne ces quantités par a et b, on a :

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab; \qquad [1]$$

2° *Que le carré de la différence de deux quantités est égal au carré de la première, plus le carré de la seconde, moins deux fois le produit de la première par la seconde.*

Si les quantités sont a et b, on a :

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab; \qquad [2]$$

3° *Que le produit de la somme de deux quantités par leur différence est égal à la différence des carrés de ces quantités.*

Si les quantités sont a et b, on a, par conséquent :

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2; \qquad [3]$$

Si l'on place le second membre de cette égalité le premier et réciproquement, on a :

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

4° *Cette relation fait connaître que la différence de deux carrés est égale à la somme de leurs racines multipliée par la différence de ces mêmes racines.*

Ces diverses formules sont d'un fréquent usage, il est donc bon de les retenir.

THÉORÈME

330. — *Dans un triangle rectangle :*

1° *Chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse entière et sa projection sur l'hypoténuse;*

2° *La perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les deux segments de l'hypoténuse.*

Soient ABC un triangle rectangle en A, et AD la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse.

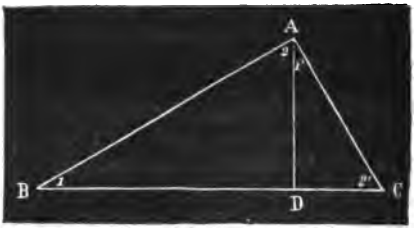


FIG. 233.

1° On doit avoir :

$$\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{BD}.$$

En effet, les triangles rectangles ABC, ABD ayant l'angle aigu B de commun sont semblables et donnent : [1]

$$\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{BD} \qquad \text{ou } \overline{AB}^2=BC\times BD. \qquad (1)$$

Le côté AB de l'angle droit est donc bien moyen proportionnel entre l'hypoténuse BC et sa projection BD sur l'hypothénuse.

On verrait de même que AC est moyen proportionnel entre BC et DC, c'est-à-dire qu'on a :

$$\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{DC} \qquad \text{ou } \overline{AC}^2=BC\times DC. \qquad (2)$$

---

1. Pour établir facilement l'égalité de ces rapports, il suffit de se rappeler que les côtés homologues sont opposés aux angles égaux.

2° On doit avoir :

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}.$$

Les triangles rectangles ABD, ADC sont semblables, car ils ont les angles aigus 1 et 1′ égaux comme ayant l'un et l'autre l'angle 2 pour complément.

La similitude de ces triangles donne :

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC} \qquad \text{ou } \overline{AD}^2 = BD \times DC. \qquad (3)$$

Donc la perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les deux segments de l'hypoténuse.

331. Remarque. — Ainsi que nous l'avons dit plus haut, il est sous-entendu, par exemple, dans la relation (1)

$$\overline{AB}^2 = BC \times BD,$$

que le carré du nombre qui exprime la longueur du côté AB est égal au produit des nombres qui expriment les longueurs de BC et de BD.

332. Corollaire I. — *Le rapport des carrés des côtés de l'angle droit est égal au rapport des deux segments de l'hypoténuse.*

Car, si on divise membre à membre les égalités (1) et (2), il vient :

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{BD}{DC}.$$

333. Corollaire II. — *Toute corde est moyenne proportionnelle entre le diamètre qui passe par l'une de ses extrémités et la projection de cette corde sur ce diamètre.*

Ainsi, la corde AB, dans le cercle O, est moyenne proportionnelle entre AC et AD : cela est vrai, car l'angle ABC est droit comme inscrit dans une demi-circonférence.

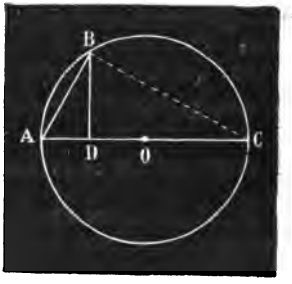


FIG. 234.

334. Corollaire III. — *Toute perpendiculaire* BD (*fig.* 234) *abaissée d'un point de la circonférence sur un diamètre est moyenne proportionnelle entre les deux segments* AD *et* DC *du diamètre.*

Cela est évident, car le triangle ABC est rectangle en B.

THÉORÈME (*réciproque*).

335. — 1° *Si un côté d'un triangle, faisant avec un second côté un*

angle aigu, est moyen proportionnel entre ce second côté et sa projection sur ce côté, l'angle opposé à ce second côté est droit.

2° *Si une hauteur d'un triangle est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur le côté où elle tombe, l'angle opposé à ce côté est droit.*

1° Soit AB, un côté du triangle ABC, faisant avec BC l'angle aigu B, et BD la projection de AB. Si l'on a :

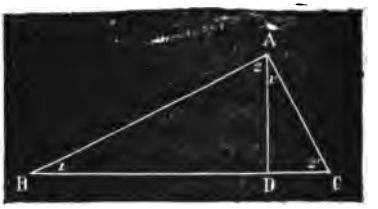


FIG. 235.

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD},$$

je dis que l'angle BAC opposé au côté BC est droit.

En effet, AB étant, par hypothèse, plus grand que BD, il en résulte que l'on a $BC > AB > BD$. Puisque BC est plus grand que BD, le point D est entre B et C. D'ailleurs, les triangles BAC, BAD ayant l'angle commun B compris entre côtés proportionnels sont semblables. Mais l'angle BDA du second est droit, donc son homologue BAC du premier est également droit.

2° Soit dans le triangle ABC la perpendiculaire AD telle que :

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}.$$

Je dis que l'angle BAC opposé au côté BC est droit.

La perpendiculaire AD forme les deux triangles rectangles BDA, ADC qui sont semblables comme ayant chacun un angle droit compris entre côtés proportionnels : donc les angles 1 et 1′, 2 et 2′ sont égaux. Or, la somme des angles 1 et 2 vaut un droit, par conséquent l'angle BAC formé des angles 1′ et 2 vaut aussi un droit.

THÉORÈME DE PYTHAGORE

336. — *Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.*

Soit le triangle ABC rectangle en A. Menons AD perpendiculaire à BC; nous avons (330)

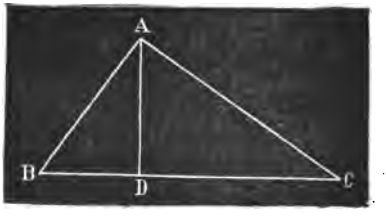


FIG. 236.

$$\overline{AB}^2 = BC \times BD$$
$$\overline{AC}^2 = BC \times DC.$$

Ajoutant membre à membre ces deux égalités et mettant le facteur BC en évidence, nous obtiendrons :

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC(BD + DC).$$

Mais

$$BD + DC = BC,$$

donc

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC \times BC = \overline{BC}^2 \text{ ou } \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2.$$

337. Corollaire I. — *Connaissant deux côtés d'un triangle rectangle, on peut calculer le troisième.*

Car si, dans un triangle rectangle en A, on représente par a, b, c les côtés opposés aux angles A, B, C, on a, d'après le théorème, la relation

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

qui permet de calculer l'une de ces trois quantités lorsque les deux autres sont connues. Ainsi $b^2 = a^2 - c^2$ et $c^2 = a^2 - b^2$.

338. Corollaire II. — *Le rapport de la diagonale d'un carré au côté de ce carré est le nombre incommensurable* $\sqrt{2}$.

Car la diagonale AC du carré ABCD donne :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AB}^2.$$

Divisant les deux membres de cette égalité par $\overline{AB}^2$, il vient :

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = 2,$$

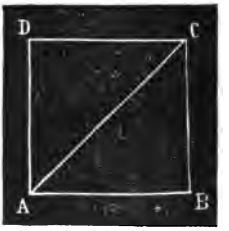


FIG. 237.

et, si l'on extrait la racine carrée de chaque membre, on a l'égalité qu'il fallait trouver

$$\frac{AC}{AB} = \sqrt{2}.$$

Application numérique.

339. — *Dans le triangle rectangle* ABC, *on donne* c = 12 *et* b = 5 : *calculer* a, c', b' *et* h.

D'après les théorèmes précédents, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2;\ b^2 = ab';$$
$$c^2 = ac';\ h^2 = b'c'.$$

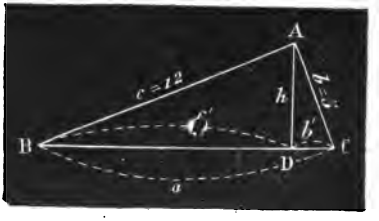


FIG. 238.

Substituant aux lettres leurs valeurs respectives, on a successivement :

$$a^2 = b^2 + c^2 = 5^2 + \overline{12}^2 = 25 + 144 = 169, \text{ d'où } a = \sqrt{169} = 13;$$

$$b^2 = ab' = 25 = 13 \times b', \text{ d'où } b' = \frac{25}{13} = 1{,}923;$$

$$c^2 = ac' = 144 = 13 \times c', \text{ d'où } c' = \frac{144}{13} = 11{,}077,$$

$$h^2 = b'c' = 1{,}923 \times 11{,}077 = 21{,}3, \text{ d'où } h' = \sqrt{21{,}3} = 4{,}615.$$

Comme vérification, on a :

$$b' + c' = 1{,}923 + 11{,}077 = 13 = a.$$

THÉORÈME

340. — *Le carré d'un côté d'un triangle, opposé à un angle aigu ou obtus, est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins ou plus deux fois le produit de l'un de ces côtes par la projection de l'autre sur lui.*

1° Soient, dans le triangle ABC (*fig.* 239), le côté AB opposé à l'angle aigu C et AD perpendiculaire sur BC.

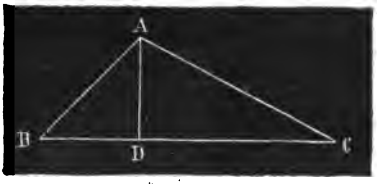


FIG. 239.

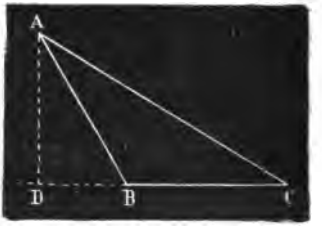


FIG. 240.

Il faut démontrer que

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,BC \times DC.$$

En effet, le triangle rectangle ABD donne :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2; \qquad (1$$

mais

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{DC}^2;$$

d'ailleurs,

$$BD = BC - DC;$$

par suite,

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DC}^2 - 2\,BC \times DC.$$

Remplaçant dans la relation (1) $\overline{AD}^2$ et $\overline{BD}^2$ par leurs valeurs respectives, il vient, après simplification, l'égalité qu'il fallait trouver, c'est-à-dire :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,BC \times DC.$$

Si comme dans la figure 240 la perpendiculaire tombe en dehors du triangle, on a encore la même relation, car

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2;$$

mais

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2;$$

d'ailleurs,

$$BD = CD - BC;$$

par suite,

$$\overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,BC \times DC.$$

Si l'on remplace $\overline{AD}^2$ et $\overline{BD}^2$ par leurs valeurs, on obtient aussi, après simplification,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,BC \times DC.$$

2° Soient, dans le triangle ABC, le côté AB opposé à l'angle obtus C et AD perpendiculaire sur le prolongement de BC.

Il faut démontrer que

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,BC \times CD.$$

Le triangle rectangle ABD donne :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2; \qquad (1)$$

mais

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2;$$

d'ailleurs,

$$BD = BC + CD;$$

par suite,

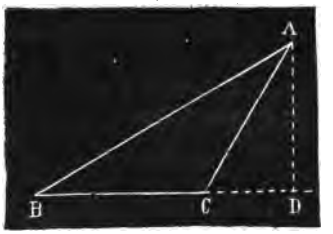


FIG. 241.

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2\,BC \times CD.$$

Remplaçant dans la relation (1) $\overline{AD}^2$ et $\overline{BC}^2$ par leurs valeurs, il vient, après simplification, l'égalité qu'il fallait trouver, c'est-à-dire :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,BC \times CD.$$

341. Corollaire I. — *Le carré d'un côté d'un triangle est inférieur ou supérieur ou égal à la somme des carrés des deux autres côtés, suivant que l'angle opposé à ce côté est aigu ou obtus ou droit.*

342. Corollaire II. — *Connaissant les côtés d'un triangle, on peut calculer la projection d'un côté sur un autre.*

Appelons a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle, et proposons-nous de calculer x, projection du côté b sur le côté c.

Si l'angle A est aigu, nous aurons (340) :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx,$$

d'où

$$2cx = b^2 + c^2 - a^2$$

et

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Si l'angle A est obtus, nous aurons :

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx,$$

d'où

$$2cx = a^2 - b^2 - c^2$$

et

$$x = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}.$$

PROBLÈME

343. — *Calculer les hauteurs d'un triangle en fonction des côtés.*

Soient a, b, c les côtés d'un triangle, h la hauteur abaissée du sommet A sur BC et x la projection du côté b sur le côté a. La figure donne

$$h^2 = b^2 - x^2.$$

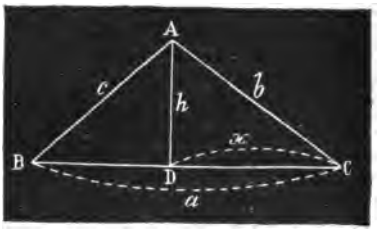


FIG. 242.

Or, si C est aigu, on a (342) :

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a},$$

et si C est obtus

$$x = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2a};$$

mais ces deux valeurs de x, égales en valeur absolue, ont des carrés égaux. Donc, dans tous les cas, on a :

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2.$$

Le problème est résolu, car on a la valeur de h en fonction des côtés du triangle ; mais on peut donner une forme plus commode à

cette valeur. Il est, en effet, facile de voir que la valeur précédente peut être remplacée par celle-ci :

$$h^2 = \frac{4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}.$$

Le numérateur étant la différence de deux carrés, il vient (329, 4°)

$$h^2 = \frac{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}{4a^2};$$

mais

$$2ab+a^2+b^2 = (a+b)^2 \text{ et } 2ab-a^2-b^2 = -(a-b)^2,$$

donc :

$$h^2 = \frac{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}{4a^2};$$

appliquant aux deux différences de carrés la même transformation que plus haut on a :

$$h^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(c-a+b)}{4a^2}.$$

Si l'on fait le périmètre du triangle égal à $2p$, on a :

$$\begin{aligned} a+b+c &= 2p \\ a+b-c &= 2p-2c = 2(p-c) \\ a+c-b &= 2p-2b = 2(p-b) \\ b+c-a &= 2p-2a = 2(p-a); \end{aligned}$$

par suite

$$h^2 = \frac{2p \times 2(p-c) \times 2(p-b) \times 2(p-a)}{4a^2},$$

ou encore

$$h^2 = \frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4a^2};$$

extrayant la racine carrée de chaque membre, on trouve enfin :

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

On aurait de même pour les hauteurs h' et h'' issues des sommets B et C :

$$h' = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h'' = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

THÉORÈME

344. — 1° *La somme des carrés de deux côtés d'un triangle égale deux fois le carré de la médiane correspondant au troisième côté, plus deux fois le carré de la moitié de ce troisième côté.*

2° *La différence des carrés de deux côtés d'un triangle égale deux fois le produit du troisième côté par la projection sur ce côté de la médiane qui lui correspond.*

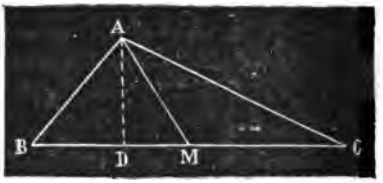


FIG. 243.

1° Soit M le milieu du côté BC dans le triangle ABC.

On doit avoir :

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AM}^2 + 2\overline{BM}^2 .$$

En effet, menons AD perpendiculaire à BC. L'angle AMB étant aigu, le triangle BAM donne (340) :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 - 2BM \times MD ; \qquad (1)$$

d'autre part, l'angle AMC étant obtus, le triangle AMC donne :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{CM}^2 + 2CM \times MD. \qquad (2)$$

Ajoutant membre à membre ces deux égalités et remarquant que CM = BM, il vient :

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AM}^2 + 2\overline{BM}^2 .$$

2° Si l'on suppose AC > AB, on veut prouver que l'on a :

$$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = 2BC \times MD.$$

Pour cela, il suffit de retrancher membre à membre l'égalité (1) de l'égalité (2) ; car on a successivement :

$$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = 2BM \times MD + 2CM \times MD,$$

$$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = (2BM + 2CM) \times MD,$$

$$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = 2BC \times MD.$$

345. Corollaire I. — *Connaissant les côtés d'un triangle, on peut calculer les médianes.*

En effet, soient a, b, c les côtés et m, m' m'' les médianes correspondantes.

D'après le 1° du théorème, on a successivement :

$$b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2},$$

$$2m^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2},$$

$$m^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4},$$

d'où

$$m = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2}.$$

On trouverait de même les médianes m' et m''.

346. Corollaire II. — *La somme des carrés des côtés d'un quadrilatère est égale à la somme des carrés des diagonales augmentée de quatre fois le carré de la droite qui joint les milieux des diagonales.*

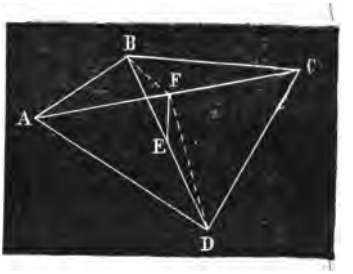


FIG. 244.

Ainsi, dans le quadrilatère ABCD qui a AC et BD pour diagonales et dont EF joint les milieux de ces diagonales, on aura :

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{EF}^2$$

En effet, les triangles ABC et ADC donnent (344) :

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{BF}^2 + 2\overline{AF}^2$$

et

$$\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = 2\overline{DF}^2 + 2\overline{AF}^2.$$

Additionnant membre à membre, il vient :

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = 2\overline{BF}^2 + 2\overline{DF}^2 + 4\overline{AF}^2. \quad (1)$$

D'autre part, le triangle BDF donne :

$$\overline{BF}^2 + \overline{DF}^2 = 2\overline{EF}^2 + 2\overline{DE}^2,$$

ou, en multipliant les deux membres de cette dernière égalité par 2,

$$2\overline{BF}^2 + 2\overline{DF}^2 = 4\overline{EF}^2 + 4\overline{DE}^2.$$

Si l'on remplace dans l'égalité (1) $2\overline{BF}^2 + 2\overline{DF}^2$ par la valeur $4\overline{EF}^2 + 4\overline{DE}^2$, on obtient :

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = 4\overline{EF}^2 + 4\overline{DE}^2 + 4\overline{AF}^2 ; \qquad (2)$$

mais

$$4\overline{DE}^2 = \overline{BD}^2 \text{ et } 4\overline{AF}^2 = \overline{AC}^2.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'égalité (2), on a enfin la relation demandée :

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{EF}^2 .$$

347. Corollaire. — *La somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des diagonales.*

Car, dans ce cas EF est égal à zéro.

348. Réciproquement, *si la somme des carrés des côtés d'un quadrilatère est égale à la somme des carrés des diagonales, la figure est un parallélogramme.*

En effet, dans ce cas 4EF se trouve égal à zéro, c'est donc que les diagonales se coupent en parties égales et que, par conséquent, la figure est un parallélogramme.

THÉORÈME

349. — *Le lieu des points d'un plan dont la somme des carrés des distances à deux points fixes de ce plan a une valeur donnée, est un cercle dont le centre est au milieu de la droite qui joint les deux points donnés.*

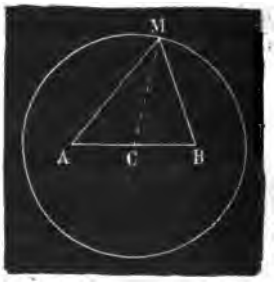


FIG. 245.

Soient A et B les deux points fixes, K^2 la valeur donnée et M un point du lieu tel que :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = K^2.$$

Si l'on joint le point M au milieu C de AB, le triangle MAB donne (344)

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\overline{MC}^2 + 2\overline{AC}^2 ;$$

par suite,

$$2\overline{MC}^2 + 2\overline{AC}^2 = K^2 :$$

d'où

$$\overline{MC}^2 = \frac{K^2}{2} - \overline{AC}^2.$$

Les valeurs $\frac{K^2}{2}$ et $\overline{AC}^2$ étant constantes, il en est de même de $\overline{MC}^2$

Donc tous les points du lieu sont sur un cercle décrit du centre C et dont le rayon R est égal à MC ou tel que

$$R = \sqrt{\frac{K^2}{2} - \overline{AC}^2}.$$

350. Réciproquement, tout point M de ce cercle fait partie du lieu, c'est-à-dire satisfait à la relation :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = K^2 .$$

En effet, le triangle MAB donne :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\overline{MC}^2 + 2\overline{AC}^2 ;$$

mais MC est le rayon, et l'on vient de trouver que

$$\overline{MC}^2 = \frac{K^2}{2} - \overline{AC}^2$$

Cette valeur de $\overline{MC}^2$ substituée dans la relation précédente donne :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = K^2.$$

Discussion. — Puisqu'on a : $R = \sqrt{\frac{K^2}{2} - \overline{AC}^2}$, pour que le problème soit possible, il faut que l'on ait :

$$\frac{K^2}{2} \geq \overline{AC}^2 \text{ ou } K^2 \geq 2\overline{AC}^2$$

Si $K^2 = 2\overline{AC}^2$ le radical s'annule et l'on a $R = 0$; le lieu se réduit alors au point C. Si $K^2 = 4\overline{AC}^2$, il vient $R = \sqrt{\frac{4\overline{AC}^2}{2} - \overline{AC}^2} = AC$; dans ce cas, le lieu est le cercle ayant AB pour diamètre.

THÉORÈME

351. — *Le lieu des points d'un plan dont la différence des carrés des distances à deux points de ce plan a une valeur donnée, est une droite perpendiculaire à la distance des deux points donnés.*

Soient A et B les deux points fixes, K^2 la valeur donnée et M un point du lieu tel que :

$$\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = K^2.$$

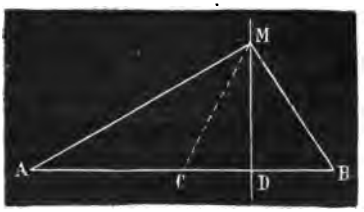


FIG. 246.

Si l'on joint les points A et B et que l'on mène la médiane MC et la perpendiculaire MD, le triangle MAB donne (344, 2°) :

$$\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = 2AB \times CD,$$

d'où $2AB \times CD = K^2$ et $CD = \frac{K^2}{2AB}$.

Mais K^2 et 2AB sont constants, par suite CD est aussi constant : donc tous les points du lieu sont sur la perpendiculaire à AB en un point D tel que : $CD = \frac{K^2}{2AB}$.

352. Réciproquement. — Tout point M de MD fait partie du lieu, c'est-à-dire satisfait à la relation : $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = K^2$.

On a, en effet, pour ce point M l'égalité $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = 2AB \times CD$,

mais $CD = \frac{K^2}{2AB}$, d'où $2AB \times CD = K^2$, donc $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = K^2$.

Tout point M de MD fait donc bien partie du lieu.

CHAPITRE VI

Lignes proportionnelles dans le cercle. — Puissance d'un point par rapport à un cercle. — Axe radical. — Centre radical.

§ Ier. — LIGNES PROPORTIONNELLES DANS LE CERCLE

THÉORÈME

353. — *Les cordes qui passent par un même point intérieur à un cercle sont divisées en segments additifs dont le produit est constant.*

Ainsi, pour le point intérieur A qui divise les cordes BE et DCen segments additifs, on aura :

$$AB \times AE = AC \times AD.$$

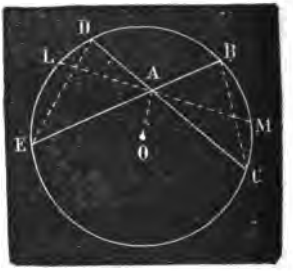


FIG. 247.

En effet, si nous menons les droites BC et DE, nous formons deux triangles ABC, ADE dans lesquels les angles B et D, C et E sont égaux chacun à chacun comme ayant même mesure : donc ces deux triangles sont semblables. Leur similitude donne

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}, \text{ d'où } AB \times AE = AC \times AD.$$

Corollaire. — *La demi-corde perpendiculaire à un diamètre en un point* A (*fig.* 247) *est moyenne proportionnelle entre les deux segments de toute corde passant par ce même point* A.

En effet, si nous menons la corde LM perpendiculaire à OA, le point A est le milieu de LM (194), et par suite on a :

$$\overline{AL}^2 = AB \times AE.$$

354. Problème. — *Calculer la longueur de la bissectrice* α *de l'angle* A *d'un triangle, en fonction des trois côtés* a, b, c *de ce triangle.*

Soit ABC le triangle donné ; construisons le cercle circonscrit. Prolongeons la bissectrice $AD = \alpha$ jusqu'en E ; joignons EC par une droite.

Les triangles DBA, CEA sont semblables, car ils ont leurs angles en A $1 = 1'$: de plus les angles inscrits B et E sont égaux.

On peut poser : $\frac{\alpha}{b} = \frac{c}{\alpha + DE}$, d'où $bc = \alpha^2 + \alpha \times DE$,

Mais, $\alpha \times DE = DB \times DC$, ce qui donne : $\alpha^2 = bc - DB \times DC$.

Or, on a vu (279) que $DB = \frac{ac}{c+b}$;

$$DC = \frac{ab}{c+b}.$$

Donc finalement : $\alpha^2 = bc - \frac{a^2bc}{(c+b)^2}$.

Nous tronverons plus loin (421) le même résultat, ainsi que la longueur α_1 de la bissectrice extérieure.

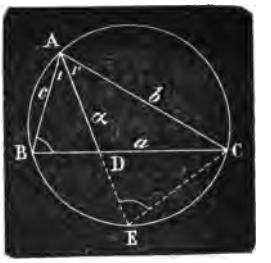


FIG. 247 *bis*.

THÉORÈME (*réciproque*).

355. — *Si deux droites sont partagées par un même point en segments additifs, dont les produits sont égaux, les extrémités de ces droites sont sur un même cercle.*

Si les droites BE, CD sont partagées par le point A de telle sorte que

$$AB \times AE = AC \times AD,$$

les quatre points B, C, E, D sont sur un même cercle.

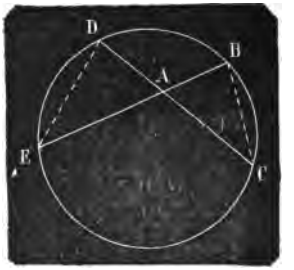


FIG. 248.

En effet, menons les droites BC et DE. Les triangles ABC, ADE ont des angles égaux en A comme opposés au sommet. D'autre part, l'hypothèse $AB \times AE = AC \times AD$ donne :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}.$$

Donc les deux triangles ABC, ADE sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels. Par suite, le cercle passant par les trois points B, C, E passera aussi par le sommet D de l'angle EDC, car cet angle étant égal à l'angle B doit avoir la même mesure, c'est-à-dire la moitié de l'arc EC.

THÉORÈME

356. — *Deux sécantes issues d'un même point, extérieur à un cercle, déterminent en le rencontrant des segments soustractifs dont le produit est constant.*

Ainsi pour le point A, extérieur au cercle O, si l'on mène les sécantes ABF, ACD, on aura :

$$AB \times AF = AC \times AD.$$

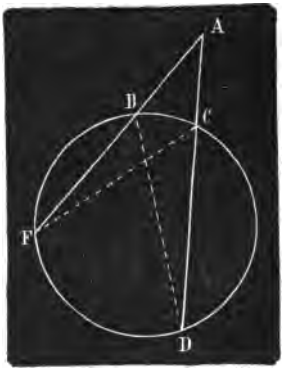


FIG. 249.

Pour le démontrer, joignons par des droites les points B et D, C et F, nous formons ainsi deux triangles AFC et ABD, dans lesquels l'angle A est commun et les angles F et D égaux, comme ayant l'un et l'autre pour

mesure la moitié de l'arc BC : donc ces deux triangles sont semblables, et leurs côtés homologues donnent :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AF}, \text{ d'où } AB \times AF = AC \times AD. \text{ C. q. f. d.}$$

357. Corollaire. — *Si d'un point extérieur à un cercle on lui mène une tangente et une sécante, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.*

En effet, le théorème est vrai quelle que soit la position de la sécante ACD : donc il est encore vrai à la position limite de cette sécante, c'est-à-dire lorsque les points C et D se confondent et que la sécante ACD est devenue la tangente AT, alors on a :

$$\overline{AT}^2 = AB \times AF.$$

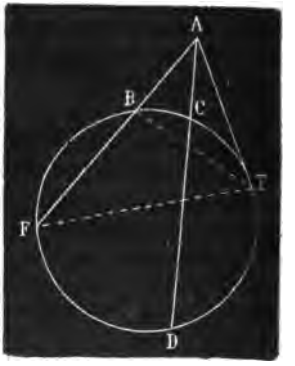


FIG. 250.

On arrive d'ailleurs au même résultat, en considérant les triangles ABT et AFT ; car ces triangles ont l'angle A de commun, et les angles F et ATB égaux comme ayant l'un et l'autre pour mesure la moitié de l'arc BCT : donc ils sont semblables, et leurs côtés homologues donnent :

$$\frac{AB}{AT} = \frac{AT}{AF}, \text{ d'où } \overline{AT}^2 = AB \times AF.$$

THÉORÈME (*réciproque*).

358. — *Si deux droites issues d'un même point sont partagées en segments soustractifs dont les produits sont égaux, les quatre extrémités de ces segments, en dehors du point commun, sont sur un même cercle.*

Soient les droites ABE et ACD issues du point A et partagées de telle sorte que :

$$AB \times AF = AC \times AD \qquad (1)$$

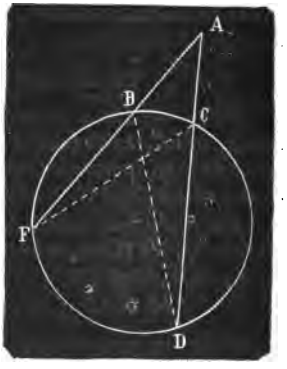


FIG. 251.

Je dis que les quatre points B, C, D, F sont sur un même cercle.

Pour le démontrer, joignons les points B et D, C et F. Les deux triangles ABD et ACF que nous formons ainsi ont l'angle A de commun compris entre côtés proportionnels ; car la relation (1) donne :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AF};$$

ces deux triangles sont donc semblables. Par suite, la circonférence passant par les trois points B, C, F passera aussi par le sommet D de l'angle BDC, car cet angle étant égal à l'angle F devra avoir la même mesure, c'est-à-dire la moitié de l'arc BC.

PREMIER THÉORÈME DE PTOLÉMÉE

359. — *Dans un quadrilatère inscriptible, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.*

Pour démontrer ce théorème, considérons un quadrilatère inscrit ABCD dont les diagonales sont AC et BD.

Formons un triangle BCE de manière que les angles 2 et 2′ soient respectivement égaux ainsi que les angles DCA et BCE.

La similitude des triangles ACD et BEC donne :

$$(1)\quad \frac{AD}{BE} = \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{CE}.$$

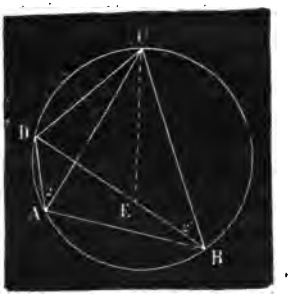


FIG. 253.

Des deux premiers rapports, on déduit :

$$(2)\qquad AD \times BC = AC \times BE.$$

D'autre part, les triangles ABC et CDE sont également semblables ; car ils ont les angles ACB et DCE égaux comme formés de deux angles égaux, augmentés du même angle ACE, et ces angles sont compris entre côtés proportionnels, comme le montrent les deux derniers rapports de la relation (1). Par suite de la similitude de ces triangles, on a :

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CD},$$

d'où

$$AB \times CD = AC \times DE. \qquad (3)$$

Ajoutant (2) et (3) membre à membre, il vient :

$$AB \times CD + AD \times BC = AC\,(BE + DE) \qquad (4)$$

On a donc :

$$AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD. \qquad (5)$$

DEUXIÈME THÉORÈME DE PTOLÉMÉE

360. — *Dans un quadrilatère inscriptible, le rapport des diagonales est égal au rapport des sommes des produits des côtés aboutissant aux extrémités de ces diagonales.*

Ainsi, pour le quadrilatère inscriptible ABCD, on aura la

relation : $$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \times AD + CB \times CD}{BA \times BC + DA \times DC}.$$

En effet, prenons sur l'arc AMB, l'arc AE égal à l'arc BC, l'arc BF égal à l'arc AD ; puis menons les droites AE, DE, DF, CE, CF, BF et appliquons le théorème précédent aux deux quadrilatères AECD et BCDF. Nous aurons :

$$AC \times DE = CE \times AD + AE \times CD, \qquad (1)$$
$$BD \times CF = DF \times BC + BF \times DC. \qquad (2)$$

D'autre part, on sait que dans un même cercle aux arcs égaux correspondent des cordes égales, donc

$$CE = AB = DF,\ DE = CF,$$
$$AE = CB,\ BF = DA.$$

Fig. 254.

Si l'on divise membre à membre les égalités (1) et (2), et que l'on tienne compte des égalités précédentes, on obtient la relation cherchée, c'est-à-dire :

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \times AD + CB \times CD}{BA \times BC + DA \times DC}.$$

361. Application. — *Connaissant les côtés a, b, c, d d'un quadrilatère inscriptible, calculer les diagonales α et β.*

Les deux théorèmes de Ptolémée donnent les équations :

$$(1) \quad \alpha\beta = ac + bd. \qquad (2) \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

d'où l'on tire en multipliant et divisant (1) et (2) membre à membre :

$$\alpha^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd},$$
$$\beta^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}.$$

THÉORÈME

362. — *Le produit de deux côtés d'un triangle égale le produit du diamètre du cercle circonscrit par la hauteur relative au troisième côté.*

Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Menons le diamètre AD et la perpendiculaire AH ; il s'agit de prouver que :

$$AB \times AC = AD \times AH.$$

En effet, les triangles rectangles ABD et ACH ayant chacun un angle aigu égal, 1 et 1', sont semblables. Leur similitude donne :

$$\frac{AB}{AH} = \frac{AD}{AC},$$

d'où l'égalité cherchée

$$AB \times AC = AD \times AH.$$

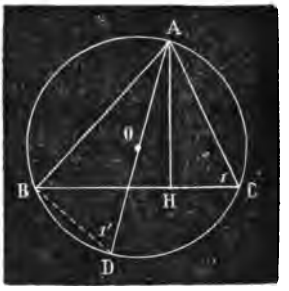


FIG. 255.

363. Corollaire. — *Connaissant les côtés d'un triangle, on peut calculer le rayon du cercle circonscrit.*

En effet, soient a, b, c les côtés d'un triangle et R le rayon du cercle circonscrit. On a :

$$bc = 2R \times AH;$$

mais (343)

$$AH = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

par suite,

$$2R \times \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = bc;$$

d'où

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

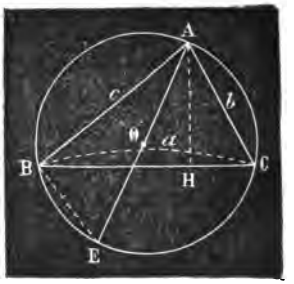


FIG. 256.

§ II. — PUISSANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UN CERCLE. AXE RADICAL. — CENTRE RADICAL.

364. Définition. — On appelle *puissance d'un point* A, par rapport au cercle O, le produit constant AB × AC donné par toute sécante ABC issue du point A.

Ce produit est *positif* ou *négatif* selon que le point A est *extérieur* ou *intérieur* au cercle.

Considérons, par exemple, la sécante AEF passant par le centre O, et appelons R le rayon du cercle et d la distance AO. Nous aurons, lorsque le point A est *extérieur :*

$$AE \times AF = (d - R)(d + R) = d^2 - R^2,$$

et si le point A est *intérieur*

$$AE \times AF = (d + R)(R - d) = R^2 - d^2 = -(d^2 - R^2)$$

Si le point A était sur le cercle, sa puissance serait évidemment nulle, car dans ce cas on a : $d - R = 0$.

Donc dans tous les cas, *la puissance d'un point par rapport à un cercle est égale, en grandeur et en signe, à l'excès du carré de la distance de ce point au centre sur le carré du rayon.*

Si le point A est extérieur, on a :

$$AE \times AF = \overline{AT}^2.$$

Donc, *la puissance d'un point extérieur au cercle est égale au carré de la tangente menée de ce point.*

Donc, *le lieu des points d'égale puissance par rapport à un cercle est un autre cercle concentrique.*

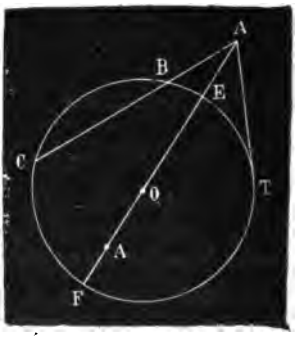


FIG. 257.

THÉORÈME

365. — *Le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux cercles est une droite perpendiculaire à la ligne des centres.*

En effet, soient O et O′ les deux cercles, R et R′ leurs rayons et M un point du lieu.

Menons MO, MO′, puis MP perpendiculaire à OO′. Les puissances du point M par rapport au cercle O et O′ sont par définition

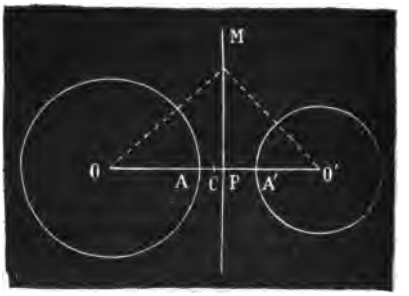


FIG. 258.

$$\overline{MO}^2 - R^2 \text{ et } \overline{MO'}^2 - R'^2 ;$$

et ces puissances devant être égales, on a :

$$\overline{MO}^2 - R^2 = \overline{MO'}^2 - R'^2$$

ou

$$\overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2 = R^2 - R'^2.$$

Le lieu cherché est donc celui des points tels que la différence des carrés de leurs distances aux deux points fixes O et O′ soit égale à la quantité constante $R^2 - R'^2$; or, nous avons vu (351) que ce lieu est une perpendiculaire MP à OO′.

Ce lieu a été nommé **axe radical** des deux cercles.

366. — Il est facile de trouver à quelle distance du milieu de la

ligne des centres cette perpendiculaire doit être menée; car si C est le milieu de OO', on a (344, 2°) :

$$\overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2 = 2OO' \times CP = R^2 - R'^2,$$

d'où

$$CP = \frac{R^2 - R'^2}{2OO'}. \qquad (2)$$

367. — De ce théorème, on déduit les conséquences suivantes :

1° *L'axe radical de deux cercles égaux est également distant des centres;* car la relation (2) donne

$$CP = \frac{R^2 - R'^2}{2OO'} = \frac{0}{2OO'} = 0.$$

2° *Si deux cercles n'ont aucun point de commun, leur axe radical ne les rencontre ni l'un ni l'autre;* car le point où il rencontrerait l'un étant de puissance nulle par rapport à ce cercle devrait aussi se trouver sur l'autre, alors les cercles auraient un point de commun, ce qui est contre l'hypothèse.

3° *Si les cercles se coupent, l'axe radical est la droite qui passe par les deux points communs;* car les points communs étant de puissance nulle par rapport aux deux cercles appartiennent à l'axe radical et le déterminent.

4° *Si les deux cercles sont tangents intérieurement ou extérieurement, leur axe radical est la tangente commune à ces cercles;* car le point commun a une puissance nulle par rapport à chacun des cercles.

5° *La partie de l'axe radical extérieure aux deux cercles est le lieu des points d'où l'on peut mener à ces cercles des tangentes égales;* car la puissance d'un point par rapport à un cercle est égale au carré de la tangente menée de ce point.

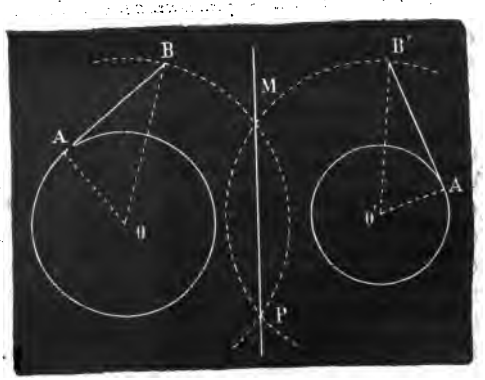


FIG. 259.

De là un moyen très simple de construire l'axe radical de deux cercles extérieurs; il suffit de *mener une perpendiculaire à la ligne des centres par le milien de la partie d'une tangente commune comprise entre les points de contact.*

On obtiendra encore l'axe radical, *en joignant les milieux des segments de deux tangentes communes compris entre les points de contact.*

6° *L'axe radical de deux cercles extérieurs ne change pas, si l'on fait varier leurs rayons* R *et* R′ *de telle sorte que la différence* $R^2 - R'^2$ *reste constante.*

Soient les cercles O et O′, dont les rayons sont R et R′. Menons à ces cercles des tangentes égales, AB et A′B′, assez longues pour que les cercles décrits des points O et O′ comme centres avec les rayons OB et O′B′, se coupent. Il faut prouver que l'axe radical MP des deux cercles OB et O′B′ est aussi celui des cercles dont les rayons sont R et R′.

En effet, on a :

$$\overline{OB}^2 = R^2 + \overline{AB}^2,$$

$$\overline{O'B'}^2 = R'^2 + \overline{A'B'}^2;$$

en remarquant que $\overline{AB}^2 = \overline{A'B'}^2$, on a :

$$\overline{OB}^2 - \overline{O'B'}^2 = R^2 - R'^2.$$

La différence des carrés des rayons étant la même pour les deux premiers cercles que pour les deux derniers, il en résulte que les deux couples de cercles ont le même axe radical : d'où un moyen facile de trouver l'axe radical de deux cercles O et O′ qui ne se coupent pas, puisque les deux cercles OB et O′B′ qui se coupent ont le même axe radical, et que celui de ces derniers est leur corde commune MP.

THÉORÈME

368. — *Les axes radicaux de trois cercles considérés deux à deux, et dont les centres ne sont pas en ligne droite, concourent au même point.*

En effet, soit D le point de concours de l'axe radical M des cercles O et O′ et de l'axe radical N des cercles O et O″. Le point D est d'égale puissance par rapport aux trois cercles, donc il se trouve sur l'axe radical P des cercles O′ et O″.

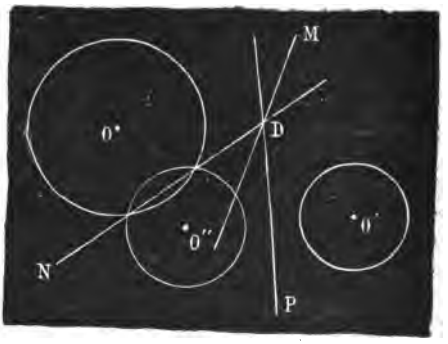


FIG. 260.

Le point D de concours des trois axes radicaux est connu sous le nom de **centre radical des trois cercles.**

369. Remarque. — Le théorème précédent donne une méthode très simple pour construire l'axe radical de deux cercles extérieurs ou intérieurs l'un à l'autre. Il suffit pour cela de décrire

un troisième cercle O″ rencontrant les deux premiers O et O′ respectivement aux points A et B, C et D. Les cordes communes AB et

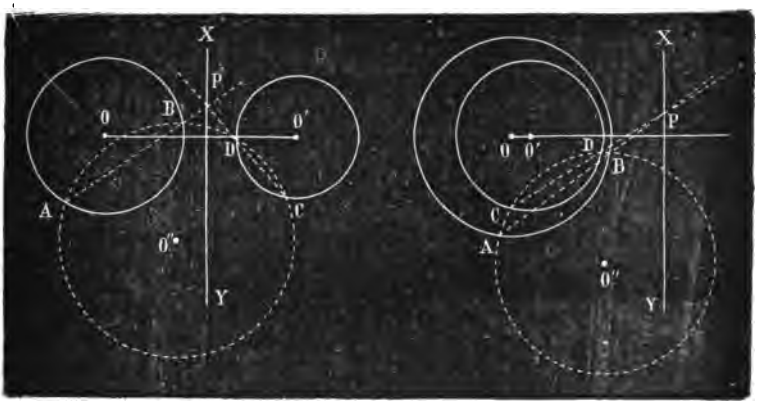


FIG. 261. FIG. 262.

CD se couperont au centre radical des trois cercles, O, O′, O″; il n'y aura plus qu'à abaisser de leur point de rencontre P une perpendiculaire XY sur OO′ : elle sera l'axe radical des deux cercles O et O′.

CHAPITRE VII

Problèmes sur les droites proportionnelles. — Problèmes relatifs aux cercles tangents à des droites ou tangents entre eux. — Construction de formules algébriques.

---

§ I. — PROBLÈMES SUR LES DROITES PROPORTIONNELLES

PROBLÈME

370. — *Diviser une droite en parties proportionnelles à des droites données.*

Soit à diviser la droite AB en parties proportionnelles aux longueurs données M, N, P.

Par le point A menons une droite AL faisant avec AB un angle quelconque.

Sur la droite AL, à partir de A, portons les longueurs AC = M, CD = N, DE = P : joignons E et B, puis par les points D et C menons les parallèles DF, CG à BE : les parties AG, GF, FB de AB seront proportionnelles aux droites données M, N, P.

FIG. 263.

En effet, le triangle ABE donne (324) :

$$\frac{AG}{AC} = \frac{GF}{CD} = \frac{FB}{DE}$$

ou

$$\frac{AG}{M} = \frac{GF}{N} = \frac{FB}{P}.$$

371. Remarque. — Si l'on voulait partager AB en parties égales, on prendrait les longueurs AC, CD, DE égales entre elles et l'on achèverait la construction de la même manière.

PROBLÈME

372. — *Construire une quatrième proportionnelle à trois longueurs données.*

Soit à trouver la quatrième proportionnelle aux trois longueurs données M, N, P. La droite demandée étant représentée par x, on doit avoir :

$$\frac{M}{N} = \frac{P}{x}.$$

Menons les droites indéfinies AB, AC faisant entre elles un angle quelconque. A partir de A, prenons sur AB des longueurs AD = M, AE = N, et sur AC une longueur AF = P; joignons par une droite les points D et F, puis menons EG parallèle à DF : AG = x, ou est la quatrième proportionnelle demandée.

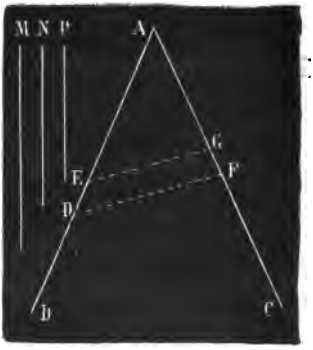


FIG. 264.

En effet, le triangle DAF donne

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AF}{AG};$$

mais AD = M, AE = N, AF = P et, par suite, AG = x, donc, on a :

$$\frac{M}{N} = \frac{P}{x}.$$

373. Remarque. — Cette proportion donne $x = \frac{P \times N}{M}$.

et si l'on a $P = N$, il vient $x = \frac{P^2}{M}$. Alors x est une troisième proportionnelle entre P et M.

PROBLÈME

374. — ***Construire une moyenne proportionnelle à deux longueurs données.***

Soient M et N les longueurs données et x la moyenne proportionnelle à construire. On doit avoir :

$$\frac{M}{x} = \frac{x}{N} \text{ ou } x^2 = M \times N.$$

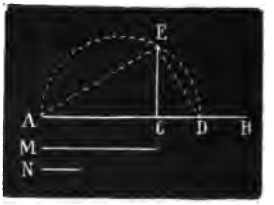


FIG. 265.

1re *Solution.* — Sur une droite indéfinie AB prenons les longueurs AC = M, CD = N. Avec AD comme diamètre décrivons une demi-circonférence, et au point C élevons la perpendiculaire CE. Cette droite est la moyenne proportionnelle demandée.

En effet, si l'on mène les cordes AE et ED, on obtient un triangle AED, rectangle en E. Or, ce triangle donne (330) :

$$\frac{AC}{EC} = \frac{EC}{CD};$$

mais AC = M, et CD = N, on a par conséquent

$$\frac{M}{EC} = \frac{EC}{N} \text{ ou } \frac{M}{x} = \frac{x}{N}.$$

2e *Solution.* — Sur une droite indéfinie AB, portons, à partir du point A, et dans le même sens, AC = M et AD = N; puis, avec AC comme diamètre, décrivons une demi-circonférence, et au point O élevons une perpendiculaire qui rencontre en E la demi-circonférence; menons enfin AE qui sera la moyenne proportionnelle cherchée; car le triangle AEC donne :

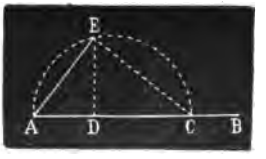


FIG. 266.

$$\overline{AE}^2 = AC \times AD \text{ ou } x^2 = M \times N.$$

PROBLÈME

375. — *Construire deux lignes connaissant leur somme et leur produit.*

1° Soient x, y les lignes inconnues, p leur somme, et q une ligne dont le carré soit égal au produit donné.

Il résulte de là les deux équations :

$$x+y=p \text{ et } xy=q^2.$$

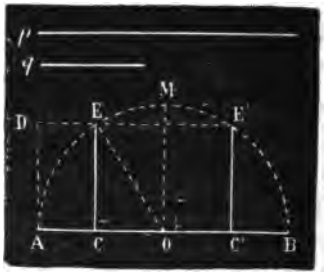


FIG. 267.

Sur une droite AB $= p$, comme diamètre, décrivons une demi-circonférence; au point A élevons une perpendiculaire AD à AB et prenons AD $= q$; puis par le point D menons DEE' parallèle à AB; enfin des points E, E' abaissons sur AB les perpendiculaires EC, E'C', lesquelles détermineront sur AB les segments AC et CB, C'B et C'A qui sont les lignes demandées x et y; car on a :

$$AC+CB=p \text{ et } AC \times CB = \overline{CE}^2 = q^2.$$

On a de même

$$C'B+C'A=p \text{ et } C'B \times C'A = \overline{C'E'}^2 = q^2.$$

Discussion. — Le problème n'est possible que si q est au plus égal au rayon OM ou à $\frac{p}{2}$. Dans le cas où q a sa plus grande valeur $\frac{p}{2}$, les segments AC et CB sont égaux aussi à $\frac{p}{2}$. Alors le produit AC $\times$ CB ou $\frac{p}{2} \times \frac{p}{2}$ ou encore $\frac{p^2}{4}$ étant égal à q^2 est le plus grand possible. Donc, *le produit de deux facteurs dont la somme est constante est maximum lorsque ces facteurs sont égaux.*

376. Remarque. — On trouve aisément, à l'aide de la figure, les longueurs cherchées x et y; car on a

$$x = AC = AO - CO$$
$$y = CB = AO + CO.$$

Or, AO $= \frac{p}{2}$, et, à cause du triangle rectangle COE, on a :

$$\overline{CO}^2 = \overline{OE}^2 - \overline{CE}^2 = \frac{p^2}{4} - q^2,$$

d'où

$$CO = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2};$$

par suite,

$$x = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}$$

et

$$y = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}.$$

PROBLÈME

377. — ***Construire deux lignes connaissant leur différence et leur produit.***

Soient x et y, les lignes inconnues, p leur différence et q^2 leur produit. On a, par suite, les deux équations :

$$x - y = p \text{ et } xy = q^2.$$

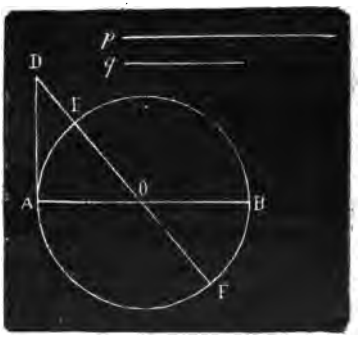


FIG. 268.

Sur une droite AB = p, comme diamètre, décrivons une circonférence; au point A, élevons sur AB une perpendiculaire AD = q; puis, du point D, tirons la sécante DEF passant par le centre O. Les segments DF, DE de cette sécante sont les lignes demandeés x et y; car

$$DF - DE = AB = p \text{ et } DF \times DE = \overline{AD}^2 = q^2.$$

Ce problème est toujours possible, attendu que cette construction peut toujours avoir lieu; il n'admet d'ailleurs qu'une solution.

378. Remarque. — On peut facilement, à l'aide de la figure, trouver les longueurs cherchées, x et y, car on a :

$$x = DF = DO + OA$$
$$y = DE = DO - OA.$$

Or

$$OA = \frac{p}{2}.$$

D'autre part, le triangle rectangle ADO donne :

$$\overline{DO}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AD}^2 = \frac{p^2}{4} + q^2, \text{ d'où } DO = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q^2}.$$

On a, par suite,

$$x = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q^2} + \frac{p}{2} \text{ et } y = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q^2} - \frac{p}{2}.$$

PROBLÈME

379. — *Partager une droite en moyenne et extrême raison.*

On dit qu'une portion de droite AB est partagée par le point M en moyenne et extrême raison, quand l'un des segments déterminés par le point M est moyen proportionnel entre AB et l'autre segment, de telle sorte que l'on doit avoir :

FIG. 269.

$$\frac{AB}{MA} = \frac{MA}{MB}.$$

Nous allons voir qu'il existe deux points sur la droite X Y qui jouissent de cette propriété.

Supposons le problème résolu. Soient M et M′ les deux points de la droite indéfinie XY qui partagent la droite AB en moyenne et extrême raison, le point M entre A et B et le point M′ à gauche de A. Alors, on a :

$$\frac{AB}{M'A} = \frac{M'A}{M'B} \text{ et } \frac{AB}{MA} = \frac{MA}{MB}$$

Nous allons montrer que la détermination des points M et M′ se ramène à la construction de deux lignes connaissant leur différence et leur produit (377); car on va voir que

$$M'A - MA = AB \text{ et } M'A \times MA = \overline{AB}^2.$$

En effet, les deux égalités

$$\frac{AB}{M'A} = \frac{M'A}{M'B} \text{ et } \frac{AB}{MA} = \frac{MA}{MB}$$

donnent

$$\overline{M'A}^2 = AB \times M'B$$

et

$$\overline{MA}^2 = AB \times MB;$$

retranchant membre à membre, il vient

$$\overline{M'A}^2 - \overline{MA}^2 = AB\,(M'B - MB)$$

ou

$$(M'A + MA)\,(M'A - MA) = AB \times MM',$$

mais

$$M'A + MA = MM',$$

donc, pour que l'égalité précédente subsiste encore, il faut que

$$M'A - MA = AB.$$

On déduit de cette valeur

$$M'A - AB = MA. \qquad (\alpha)$$

D'autre part, de

$$\frac{AB}{M'A} = \frac{M'A}{M'B},$$

on tire

$$\frac{AB}{M'A - AB} = \frac{M'A}{M'B - M'A},$$

d'où, en tenant compte du résultat déjà obtenu (α) et d'après la figure,

$$\frac{AB}{MA} = \frac{M'A}{AB},$$

donc

$$M'A \times MA = \overline{AB}^2.$$

De là cette construction : au point B on élève une perpendiculaire à AB, et sur cette ligne on prend BC = AB ; avec BC comme diamètre, on décrit une circonférence O ; puis on mène la sécante ADOE ; enfin, on porte sur AB, AM = AD et sur AX, AM′ = AE : les points M et M′ ainsi déterminés sont les points cherchés.

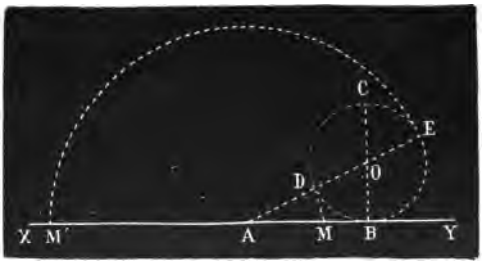


FIG. 270.

Il est du reste facile de voir que chacun des points M et M′ partage AB en moyenne et extrême raison; car la figure donne pour le point M :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AD};$$

et de cette égalité, on tire :

$$\frac{AE - AB}{AB} = \frac{AB - AD}{AD},$$

d'où

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MB}{AM}.$$

Donc AM est moyenne proportionnelle entre AB et MB

Pour le point M' on a de même

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AD} \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB},$$

cette égalité donne

$$\frac{AE+AB}{AE} = \frac{AB+AD}{AB},$$

d'où on tire aisément

$$\frac{M'B}{M'A} = \frac{MA}{AB}.$$

Donc M'A est moyenne proportionnelle entre AB et M'B.

380. Remarque I. — Les segments MA et MB dont la somme est AB sont additifs, tandis que les segments M'A, M'B dont la différence est AB, sont soustractifs; il est d'ailleurs évident que MA est le grand segment additif et M'B le grand segment soustractif de la droite AB divisée en moyenne et extrême raison.

381. Remarque II. — Représentons la longueur AB par a, et cherchons à évaluer en fraction de a les quatre segments MA, M'A, MB, M'B. On a :

$$MA = AD = AO - OD$$
$$M'A = AE = AO + OD.$$

Or,
$$OD = \frac{a}{2}$$

et $\overline{AO}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{OB}^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = 5\frac{a^2}{4}$, d'où $AO = \frac{a}{2}\sqrt{5}$:

donc
$$MA = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$$

et
$$M'A = \frac{a}{2}\sqrt{5} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1).$$

Par suite,

$$MB = AB - MA = a - \frac{a}{2}\sqrt{5} + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2} - \frac{a}{2}\sqrt{5} = \frac{a}{2}(3-\sqrt{5})$$

et

$$M'B = AB + M'A = a + \frac{a}{2}\sqrt{5} + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5} = \frac{a}{2}(3+\sqrt{5}).$$

§ II. — PROBLÈMES RELATIFS AUX CERCLES TANGENTS A DES DROITES OU TANGENTS ENTRE EUX

PROBLÈME

382. — *Mener par deux points donnés* A *et* B *un cercle tangent à une droite donnée* MN.

Supposons le problème résolu et soit O le cercle demandé. Si le point de contact D était connu, il n'y aurait plus qu'à faire passer une circonférence par les trois points A, B, D. La seule difficulté du problème consiste donc à trouver le point D. Or, si l'on prolonge AB jusqu'à sa rencontre en C avec MN, la tangente CD est moyenne proportionnelle entre la sécante AC et BC. D'où cette construction : On prolonge AB jusqu'à sa rencontre en C avec MN, puis on détermine la moyenne proportionnelle entre AC et BC, cette longueur portée à partir de C, dans le sens CN, donne le point D qui est le point de contrat du cercle cherché. On a une seconde solution, en portant la longueur CD en CD'; alors le cercle passe par les trois points A, B, D'.

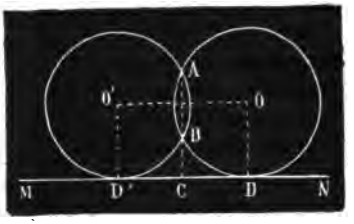


FIG. 271.

Discussion. — Il est évident que le problème n'est possible que si les points A et B sont du même côté de MN. Dans ce cas, il y a deux solutions si AB rencontre MN, les cercles O et O'. Il n'y a plus qu'une solution si AB est parallèle à MN et le point de contact D est à la rencontre de la tangente MN et du diamètre ED perpendiculaire au milieu de la corde AB.

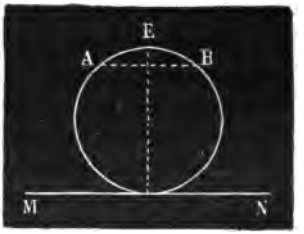


FIG. 272.

PROBLÈME

383. — *Mener par deux points donnés* A *et* B *un cercle tangent à un cercle donné* O.

Supposons le problème résolu. Soit O' le cercle demandé tangent au cercle O en T. Si le point T était connu, il n'y aurait plus qu'à faire passer une circonférence par les trois points A, B, T. Toute la difficulté du problème consiste donc à trouver le point T. Mais la tangente commune menée par le point T rencontre la droite AB en un point C de cette droite. Or, si l'on connaissait ce point C, on déterminerait le point T en menant la tangente CT au cercle O. Cherchons donc à déterminer le point C. Pour cela, imaginons par ce point et un autre point quelconque D, pris sur le cercle O, une sécante CDE, on aura :

$$CT^2 = CA \times CB = CE \times CD.$$

Il résulte de là que les quatre points A, B, D, E sont sur un même cercle (358). Mais le point D a été pris arbitrairement : donc si l'on fait passer par les points A et B une circonférence quelconque qui coupe le cercle O, la corde commune DE passera par le point fixe C de AB.

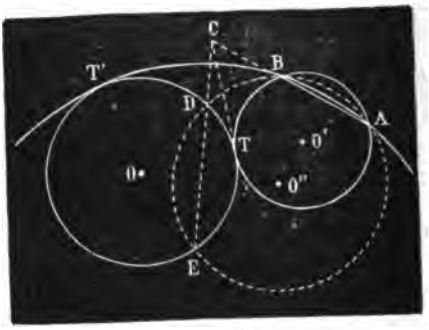


FIG. 273.

D'où cette construction : On fait passer par les points A et B une circonférence quelconque qui coupe le cercle O, on mène la corde commune jusqu'à sa rencontre au point C avec AB; par le point C, on mène une tangente au cercle O; le point T où cette tangente touche le cercle O appartient aussi au cercle cherché, qui est alors déterminé par les trois points A, B, T.

Discussion. — Il y a une seconde solution, le cercle A B T', parce qu'on peut, en général, mener du point C deux tangentes au cercle O. Si l'un des points donnés est sur le cercle O, le problème n'a plus qu'une solution. Le centre O' est à la rencontre du rayon OA et de la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB. Si, lorsque le point A est sur le cercle O, la droite AB est perpendiculaire à OA, il est facile de voir que le centre O' se trouve rejeté à l'infini et le problème n'a plus de solution. Si les points A et B étaient à l'intérieur du cercle O, le même raisonnement conduirait encore à deux solutions, et à une seulement si l'un des points était sur la circonférence. Enfin, il est évident que le problème n'aurait aucune solution, si l'un des points donnés était à l'intérieur et l'autre à l'extérieur du cercle O.

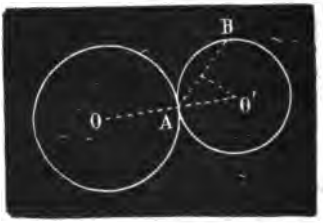


FIG. 274.

384. Remarque. — Le point C est (369) le centre radical des cercles O, O' et O'' (*fig.* 273).

Il résulte d'ailleurs de la démonstration précédente que : *les cordes communes à une circonférence fixe et à toutes les circonférences qui, passant par deux points, coupent la première, concourent en un point fixe de la droite qui joint les deux points fixes.*

PROBLÈME

385. — *Mener par un point* A *un cercle tangent à deux droites données* KL, MN.

Le cercle demandé a son centre sur la bissectrice de l'angle LON, et passant par le point A il passera aussi par le point A′, symétrique de A. On est donc ramené au problème précédent, c'est-à-dire à mener par deux points A et A′ un cercle tangent à l'une des droites données.

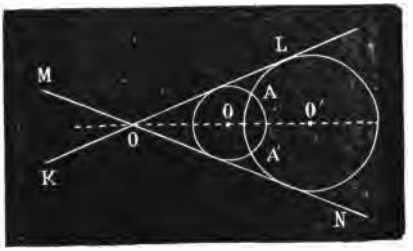


FIG. 275.

Tant que le point A est entre les deux droites, il y a deux solutions, les cercles O et O′, il n'y a plus qu'une seule solution, si le point A est sur l'une des droites données.

PROBLÈME

386. — ***Mener par un point*** **D** ***un cercle tangent à une droite*** **MN** ***et à un cercle*** **O** ***donnés.***

Le cercle cherché peut être tangent *extérieurement* ou *intérieurement* au cercle O. De là deux solutions.

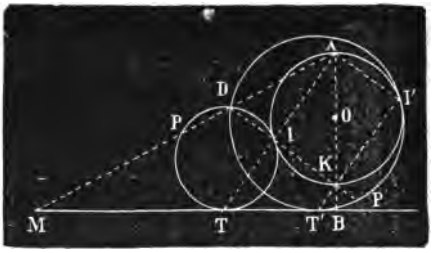


FIG. 276.

1re *solution.* — Supposons le problème résolu. Si l'on mène par le centre O la perpendiculaire OB à MN et qu'on la prolonge jusqu'à sa rencontre en A avec le cercle O, la figure donne :

$$AP.AD = AT.AI.$$

D'autre part, si l'on tire IK, la similitude des triangles rectangles ABT, AIK donne :

$$\frac{AB}{AI} = \frac{AT}{AK},$$

par suite,

$$AB.AK = AT.AI = AP.AD,$$

d'où

$$AP = \frac{AB.AK}{AD}.$$

Ainsi, AP est une 4e proportionnelle aux trois droites connues AB, AK, AD. Les points P et D sont alors connus, de sorte qu'on est ramené au problème du n° 383.

2e *solution*. — Supposons encore le problème résolu et joignons le point K au point D et au point de contact I'. On a :

$$KP'.KD = KT'.KI'.$$

D'autre part, la similitude des triangles rectangles KBT', KAI' donne :

$$\frac{AK}{KT'} = \frac{KI'}{KB};$$

par suite,

$$AK.KB = KT'.KI' = KP'.KD,$$

d'où

$$KP' = \frac{AK.KB}{KD}.$$

Cette relation donne un second point P' et ramène le problème à celui du n° 383.

Il est facile de voir que le problème n'aurait aucune solution, si le centre O et le point D étaient de chaque côté de la droite MN ou si le point D était intérieur au cercle O ; mais, dans tous les autres cas, on a, comme plus haut, à faire passer un cercle par un point donné D et par deux autres points à trouver, l'un sur le cercle O et l'autre sur la droite MN, ce qui donne deux solutions à chaque position nouvelle que prend le point D.

§ III. — CONSTRUCTION DE FORMULES ALGÉBRIQUES

387. — Construire des formules algébriques, c'est substituer aux calculs à faire pour trouver les inconnues, des constructions graphiques dont le but est de déterminer des lignes inconnues à l'aide de celles qui sont données. Nous prendrons, pour exemples, les expressions qui suivent et dans lesquelles les lettres $x, a, b, c, d...$ représentent des lignes droites.

1° *Construire* $x = a \pm b$.

La ligne x est la somme ou la différence des lignes a et b.

2° *Construire* $x = \frac{ab}{c}$.

x est une quatrième proportionnelle aux trois lignes a, b, c.

3° *Construire* $x = \frac{a^2}{b}$.

x est une troisième proportionnelle aux lignes a et b.

4° *Construire* $x = \frac{abcd...}{mnp...}$

On a : $x = \frac{ab}{m} \cdot \frac{c}{n} \cdot \frac{d}{p}$; et si l'on fait $\alpha = \frac{ab}{m}$, il vient $x = \alpha \cdot \frac{c}{n} \cdot \frac{d}{p}$. Si l'on pose maintenant $6 = \frac{\alpha c}{n}$, on a enfin $x = \frac{6d}{p}$. La ligne x est alors une quatrième proportionnelle aux lignes 6, d, p. On procéderait d'une manière analogue quel que soit le nombre des lettres.

5° *Construire* $x = \sqrt{ab}$.

On a $x^2 = ab$: donc x est une moyenne proportionnelle entre les lignes a et b.

6° *Construire* $x = \sqrt{\frac{abcd}{mn}}$.

On peut poser : $\alpha = \frac{ab}{m}$ et $6 = \frac{cd}{n}$, de sorte qu'on a :

$$x = \sqrt{\alpha 6}.$$

Alors x est une moyenne proportionnelle entre α et 6.

7° *Construire* $x = \frac{abc + def}{gh}$.

On a $x = \frac{abc}{gh} + \frac{def}{gh}$. On pose $y = \frac{abc}{gh}$ et $z = \frac{def}{gh}$; puis on construit y et z comme on a construit x dans un exemple précédent (4°).

8° *Construire* $x = \frac{abc + def}{gh - kl}$.

On pose $gh = dy$ et $kl = dz$, d'où

$$x = \frac{abc + def}{dy - dz} = \frac{abc + def}{d(y - z)}.$$

Or, de $gh = dy$ et de $kl = dz$, on tire

$$y = \frac{gh}{d} \text{ et } z = \frac{kl}{d},$$

y et z sont des quatrièmes proportionnelles aux quantités connues g, h, d, k, l, d. Si l'on fait leur différence égale à m, il vient :

$$x = \frac{abc + def}{d(y - z)} = \frac{abc + def}{dm}.$$

Cette dernière valeur de x se trouve comme au numéro précédent.

9° *Construire* $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

x est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont a et b.

10° *Construire* $x=\sqrt{a^2+b^2-c^2}$.

On pose $\alpha^2=a^2+b^2$; alors α est comme plus haut l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont a et b ; par suite

$$x=\sqrt{\alpha^2-c^2}\ ;$$

x est un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'autre côté est c et l'hypoténuse α.

11° *Construire* $x=\sqrt{ab+cd-ef}$.

On pose $\alpha^2=ab$, $6^2=cd$, $\gamma^2=ef$, alors on a : $x=\sqrt{\alpha^2+6^2-\gamma^2}$, formule que l'on sait construire.

12° *Construire* $x=a\sqrt{2}$ et $y=a\sqrt{5-\sqrt{3}}$.

On a : 1° $x=a\sqrt{2}=\sqrt{2a^2}=\sqrt{2a\times a}$, la ligne x est par conséquent moyenne proportionnelle entre $2a$ et a.

2° $y=a\sqrt{5-\sqrt{3}}=\sqrt{5a^2-a\sqrt{3a^2}}$; or, $\sqrt{3a^2}=\sqrt{3a\times a}=\alpha$, moyenne proportionnelle entre $3a$ et a, alors on a : $y=\sqrt{5a^2-a\alpha}$, expression que l'on sait construire.

13° *Construire* $x=\sqrt{ab+\frac{cde}{b}-\frac{m^4}{n^2}}$.

On pose $\alpha^2=ab$, $6^2=\frac{cde}{f}$, $\gamma^2=\frac{m^4}{n^2}$: α est une moyenne proportionnelle entre a et b, 6 une moyenne entre c et la quatrième proportionnelle à $\frac{de}{f}$ et γ une troisième proportionnelle à m et n.

Remplaçant les valeurs sous le radical par celles qui leur correspondent, on a : $x=\sqrt{\alpha^2+6^2-\gamma^2}$, expression que l'on sait construire.

14° *Construire les racines de l'équation complète du second degré.*

Le terme x^2 étant toujours positif, cette équation ne peut se présenter que sous l'une des quatre formes suivantes :

$$x^2-px+q^2=0 \qquad (1)$$
$$x^2-px-q^2=0 \qquad (2)$$
$$x^2+px+q^2=0 \qquad (3)$$
$$x^2+px-q^2=0. \qquad (4)$$

Si, dans la troisième et la quatrième équation, on change x en $-x$, elles deviennent identiques aux deux premières. Il suffit donc de construire les racines des équations (1) et (2).

1° Soit d'abord l'équation (1)

$$x^2-px+q^2=0.$$

Les deux racines de cette équation ont le même signe, puisque leur produit q^2 est positif; elles sont d'ailleurs positives, leur somme étant égale à p. Si on les désigne par x' et x'', on a :

$$x'+x''=p$$
$$x'x''=q^2.$$

Il s'agit donc de construire deux longueurs dont on connaît la somme et le produit. Or, ce problème a été résolu (375).

La condition de réalité des racines de l'équation (1) étant

$$\frac{p^2}{4} \geqslant q^2 \text{ ou } \frac{p}{2} \geqslant q,$$

puisque p et q sont ici des nombres positifs. On voit que la condition de possibilité de construction (375) est la même que la condition de réalité des racines.

2° Soit l'équation (2)

$$x^2-px-q^2=0.$$

Les deux racines de cette équation sont de signes contraires, puisque leur produit est q^2. Il est d'ailleurs à remarquer que la plus grande est positive, attendu que leur somme est p. Si donc on désigne par x' celle qui est positive et par x'' celle qui est négative, on a :

$$x'-x''=p$$
$$x'\times(-x'')=-q^2$$
ou
$$x'x''=q^2.$$

Il s'agit donc de construire deux longueurs dont on connaît la différence et le produit. C'est le problème du numéro 377.

CHAPITRE VIII

Polygones réguliers. — Inscription des polygones réguliers dans le cercle. — Longueur d'un arc de cercle. — Rapport de la circonférence au diamètre. — Calcul du rapport de la circonférence au diamètre.

---

§ Ier. — POLYGONES RÉGULIERS

Définitions.

388. — Une *ligne brisée est régulière* lorsque tous ses côtés sont égaux ainsi que tous ses angles.

Un polygone est dit *régulier* lorsqu'il a tous ses côtés égaux et

tous ses angles égaux. Le polygone régulier est donc une ligne brisée régulière fermée.

Un polygone régulier concave est dit *étoilé*.

THÉORÈME

389. — ***Un polygone régulier est à la fois inscriptible et circonscriptible.***

FIG. 277.

Soit le polygone régulier ABCDE.

1° Ce polygone est inscriptible.

En effet, soit O le centre d'un cercle passant par les trois sommets A, B, C; il faut montrer qu'il passera aussi par les autres sommets du polygone. Pour cela, abaissons OI perpendiculaire sur BC et menons OA, OD. Les deux quadrilatères OIBA, OICD sont superposables, car les angles en I sont droits, les côtés IC et IB sont égaux (le point I étant le milieu de BC), les angles C et B sont égaux ainsi que les côtés CD et BA, puisque le polygone est régulier : donc OD = OA, et le cercle décrit avec OA pour rayon et O pour centre passera aussi par le point D. On prouverait de même qu'il passera par les autres sommets, quel qu'en soit le nombre.

Le polygone est donc inscrit dans le cercle O.

2° Ce polygone est circonscriptible.

Car, dans le cercle circonscrit, les côtés AB, BC, CD,... du polygone régulier sont des cordes égales : par suite, les droites telles que OI qui mesurent la distance au centre de chacun des côtés de la figure sont égales entre elles. Donc si, du point O comme centre et avec OI pour rayon, on décrit un cercle, il sera tangent à chacun des côtés du polygone en son milieu, et le polygone sera alors circonscrit à ce cercle.

La démonstration serait identiquement la même s'il s'agissait d'une ligne brisée régulière.

390. Définitions. — Le *centre* d'un polygone régulier ou d'une ligne brisée régulière est le centre des cercles inscrit ou circonscrit.

On nomme *rayon* et *apothème* d'un polygone régulier les rayons des cercles circonscrit et inscrit.

On appelle *angle au centre* d'un polygone régulier l'angle EOD (*fig.* 277) de deux rayons consécutifs.

Cet angle est évidemment constant pour un même polygone, de sorte que, si l'on désigne par n le nombre des côtés du polygone, la valeur de son angle au centre sera $\frac{4}{n}$, l'angle droit étant pris pour

unité. Par exemple, l'angle au centre du pentagone régulier vaut $\frac{4}{5}$ d'un angle droit.

On appelle *angle du polygone* l'angle formé par deux côtés consécutifs du polygone.

Il est facile de trouver la valeur d'un angle d'un polygone régulier convexe de n côtés; car la valeur de tous ses angles égaux étant $(2n-4)$ droits, la valeur d'un seul sera $\frac{2n-4}{n}$. Par exemple, la valeur d'un angle de l'hexagone est égal à

$$\frac{2\times 6-4}{6}=\frac{4}{3}.$$

L'angle d'un polygone régulier convexe de n *côtés et son angle au centre sont supplémentaires;* car on a :

$$\frac{2n-4}{n}+\frac{4}{n}=\frac{2n}{n}-\frac{4}{n}+\frac{4}{n}=2 \text{ droits.}$$

THÉORÈME

391. — *Si l'on divise une circonférence en* n *parties égales :* 1° *Les cordes qui joignent les points de division consécutifs forment un polygone régulier;* 2° *les tangentes aux mêmes points forment un polygone régulier.*

Soit la circonférence O partagée en n parties égales aux points A, B, C, D...

1° Le polygone inscrit ABCDE... est régulier.

En effet, ses côtés sont égaux, puisqu'ils sous-tendent des arcs égaux; ses angles sont égaux aussi, car chacun d'eux est inscrit, et il intercepte la même fraction $\frac{n-2}{n}$ de la circonférence.

FIG. 278.

2° Le polygone A'B'C'D'... formé par les tangentes aux points de division est un polygone régulier.

En effet, deux triangles isocèles, tels que AA'B, BB'C, ont les bases AB, BC égales et les angles adjacents à ces bases égaux comme formés par une corde et une tangente interceptant des arcs égaux, donc ces triangles sont égaux. Il en résulte : 1° que les angles A', B'... du polygone sont égaux; 2° que le point de contact de chaque côté est le milieu de ce côté; 3° que les côtés A'B', B'C'... sont égaux, puisque les moitiés de ces côtés sont égales : le polygone A'B'C'D',... ayant ses angles égaux et ses côtés égaux, est régulier.

392. Corollaire. — *Il existe des polygones réguliers convexes d'un nombre quelconque de côtés*, car on peut toujours concevoir une circonférence partagée en un nombre aussi grand que l'on veut de parties égales, ce qui permettra de construire un polygone du même nombre de côtés. Donc, *le nombre des polygones réguliers convexes est illimité.*

THÉORÈME

393. — *Une circonférence étant partagée en* m *parties égales, si l'on joint les points de division de* n *en* n, *chaque corde sous-tend* n *divisions, et le polygone régulier qui en résulte a un nombre de côtés égal à* $\frac{m}{d}$, d *étant le plus grand commun diviseur entre* m *et* n.

Soit une circonférence partagée en m parties égales. Si, à partir d'un point de division, et dans un sens déterminé, on joint les points de division de n en n, il est évident qu'on forme une ligne brisée régulière. Pour revenir au point de départ, c'est-à-dire pour fermer la ligne brisée régulière, il faut que le nombre des divisions parcourues, qui est évidemment un multiple de n, soit aussi un multiple de m, puisque la circonférence contient m divisions. Par conséquent, on reviendra pour la première fois au point de départ, lorsqu'on aura parcouru un nombre de divisions égal au plus petit multiple commun à m et à n. Or, d étant par hypothèse le plus grand commun diviseur entre m et n, il en résulte que le plus petit multiple commun à m et à n est égal à $\frac{mn}{d}$. Mais chaque côté sous-tend n arcs, le nombre des côtés est donc $\frac{mn}{d} : n$ ou $\frac{m}{d}$. C. q. f. d.

394. Remarque I. — Le polygone régulier sera convexe ou étoilé, selon que la somme des arcs sous-tendus par ses côtés sera égale ou supérieure à une circonférence. Or, cette somme contient $\frac{mn}{d}$ divisions et la circonférence en contient m, donc le polygone est connexe ou étoilé, selon que $\frac{n}{d}$ est égal ou supérieur à 1.

395. Remarque II. — Chaque côté du polygone étoilé, formé en joignant les points de division de n en n, sous-tend deux arcs, l'un de n divisions et l'autre de $m - n$ divisions. Donc on aura le même polygone étoilé en joignant les points de division de n en n ou en les joignant de $m - n$ en $m - n$.

Le polygone ainsi formé à m côtés, dans le cas où l'on a $\frac{m}{d} = m$, alors d est égal à 1, et, par suite, m et n sont des nombres premiers entre eux.

On aura donc tous les polygones réguliers de m côtés, si l'on fait successivement n égal à chacun des nombres premiers avec m et inférieurs à $\frac{m}{2}$. *Il y a donc autant de polygones réguliers de* m *côtés qu'il se trouve de nombres premiers avec* $\frac{m}{2}$. Le polygone qui correspond à $n = 1$ est le seul convexe. Si l'on fait successivement m égal à 3, 4, 5,... on obtient facilement le nombre de polygones réguliers correspondant à m. Si, par exemple, on pose $m = 15$, on voit que les seuls nombres premiers avec 15 et inférieurs à $\frac{15}{2}$ sont 1, 2, 4, 7. Il y a donc 4 pentédécagones réguliers : 1 convexe et 3 étoilés. Un côté du premier sous-tend $\frac{1}{15}$ de la circonférence, et chaque côté de l'un des trois autres sous-tend $\frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{7}{15}$ de la circonférence.

On verrait de même qu'il n'y a qu'un triangle équilatéral, un carré et un hexagone régulier, mais qu'il y a deux pentagones réguliers, un convexe et un étoilé : un côté du premier sous-tend $\frac{1}{5}$ et un du second $\frac{2}{5}$ de la circonférence.

Il y a deux octogones réguliers, un convexe et un étoilé; un côté du premier sous-tend $\frac{1}{8}$ et un côté du second $\frac{3}{8}$ de la circonférence.

Il y a deux décagones, un convexe et un étoilé : un côté du premier sous-tend $\frac{1}{10}$ et un côté du second $\frac{3}{10}$ de la circonférence.

Il y a aussi deux dodécagones, un convexe et un étoilé : un côté du premier sous-tend $\frac{1}{12}$ et un côté du second $\frac{5}{12}$ de la circonférence.

THÉORÈME

396. — 1° *Deux polygones réguliers convexes d'un même nombre de côtés sont semblables;* 2° *le rapport des périmètres est égal au rapport des rayons et au rapport des apothèmes.*

Soient AB, A'B' deux côtés de polygones réguliers convexes de n côtés, P et P' leurs périmètres, O et O' leurs centres.

1° Les angles de ces polygones sont égaux par hypothèse, de plus les rapports des côtés correspondants, $\frac{AB}{A'B'}, \frac{BC}{B'C'}, \ldots$ sont aussi

égaux, puisque les numérateurs de ces rapports sont égaux ainsi que les dénominateurs : donc ces polygones sont semblables.

2° Les deux triangles isocèles AOB, A'O'B' sont semblables, car les angles au centre des deux polygones ont l'un et l'autre la même valeur $\frac{4}{n}$; par suite, les triangles rectangles AOI, A'O'I' sont aussi semblables. Alors on a :

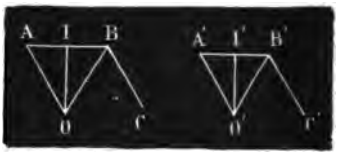


FIG. 279.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{O'A'} = \frac{OI}{O'I'},$$

ou, en représentant les rayons par R, R' et les apothèmes par a, a',

$$\frac{AB}{A'B'}, = \frac{nAB}{nA'B'} = \frac{R}{R'} = \frac{a}{a'}.$$

Mais nAB et nA'B' sont les périmètres P et P' des deux polygones. Donc, on a enfin

$$\frac{P}{P'} = \frac{R}{R'} = \frac{a}{a'}.$$ C. q. f. d.

§ II. — INSCRIPTION DES POLYGONES RÉGULIERS DANS LE CERCLE

PROBLÈME

397. — *Inscrire dans un cercle un carré, un octogone régulier et calculer les côtés de ces polygones.*

1° Pour inscrire le carré dans le cercle O, joignons les extrémités des diamètres perpendiculaires AC, BD, et le quadrilatère ABCD sera un carré.

En effet, les angles au centre O étant égaux interceptent des arcs égaux, lesquels sont sous-tendus par des cordes égales, donc :

$$AB = BC = CD = DA.$$

D'ailleurs, chacun des angles ABC, BCD... est droit comme inscrit dans une demi-circonférence.

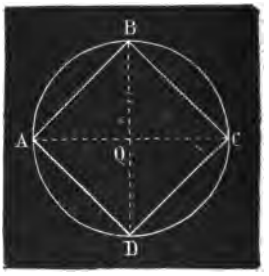


FIG. 280.

La valeur du côté du carré se déduit du triangle rectangle ABO, car ce triangle donne :

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = 2\overline{OA}^2,$$

R étant le rayon du cercle circonscrit, il vient

$$\overline{AB}^2 = 2R^2,$$

d'où

$$AB = R\sqrt{2}.$$

Si d'une manière générale nous désignons par C_m^n le côté d'un polygone régulier formé en joignant de n en n les points de division de la circonférence partagée en m parties égales, le côté du carré sera C_4^1, de sorte que

$$C_4^1 = R\sqrt{2}.$$

Ainsi, *le côté du carré inscrit dans un cercle est égal au rayon de ce cercle multiplié par la racine carrée de* 2.

2° Si dans le cercle O de rayon R, on mène au côté AB du carré inscrit la perpendiculaire OE, cette perpendiculaire divisera l'arc AB au point E en deux parties égales; de sorte que la corde AE est le côté de l'octogone régulier convexe. Or, on a par suite du triangle rectangle AEI :

$$\overline{AE}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{IE}^2;$$

mais

$$AI = \frac{AB}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2},$$

et, comme dans le triangle AOI, l'angle I est droit et que l'angle IOA vaut 45°, ce triangle est isocèle; par suite, on a :

$$IE = OE - OI = R - \frac{AB}{2} = R - \frac{R\sqrt{2}}{2},$$

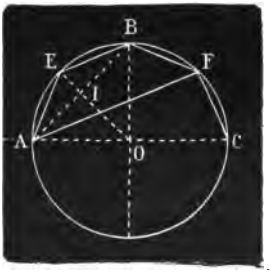


FIG. 281.

donc

$$\overline{AE}^2 = \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(R - \frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2.$$

Effectuant et simplifiant, il vient

$$AE = C_8^1 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Outre l'octogone régulier convexe, il y a l'octogone régulier étoilé (395) dont le côté AF (*fig.* 281) sous-tend $\frac{3}{8}$ de la circonférence. Il est

facile de calculer la valeur de ce côté, car le triangle rectangle AFC donne :

$$\overline{AF}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CF}^2 ;$$

mais

$$AC = 2R \text{ et } CF = R\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

donc

$$\overline{AF}^2 = 4R^2 - \left(R\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\overline{AF}^2 = 4R^2 - 2R^2 + R^2\sqrt{2}$$

$$\overline{AF}^2 = R^2\left(2+\sqrt{2}\right),$$

d'où

$$AF = C_8^1 = R\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

FIG. 282.

La figure 282 représente l'octogone régulier étoilé.

398. Remarque. — On sait partager un arc en deux parties égales; donc, si une circonférence est partagée en 4 parties égales, on saura la partager en 8, en 16, en 32,... en 2^n parties égales. Par suite, on sait inscrire dans un cercle les polygones de 2^n côtés.

PROBLÈME

399. — *Inscrire dans un cercle un hexagone régulier, un triangle équilatéral, un dodécagone régulier et calculer les côtés de ces polygones.*

1° Supposons le problème résolu et soit AB le côté de l'hexagone inscrit dans un cercle O de rayon R. Menons les rayons OA, OB. L'angle AOB vaut

$$\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ,$$

les deux autres angles du triangle AOB valent donc ensemble

$$180^\circ - 60^\circ = 120^\circ;$$

mais ces deux angles sont égaux, car OA = OB, chacun d'eux vaut par conséquent 60°, et le triangle AOB est équiangle et équilatéral, donc

$$AB = C_6^1 = OA = R.$$

FIG. 283.

2° Pour inscrire le triangle équilatéral, il suffit de joindre de deux en deux les sommets de l'hexagone; car les cordes BF, FD, BD qu'on obtient ainsi sont égales comme sous-tendant des arcs égaux : le triangle BFD dont elles sont les côtés est donc équilatéral.

Il est facile de trouver la valeur du côté, car le triangle rectangle ABD donne :

$$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AB}^2 ;$$

mais

$$AD = 2R \text{ et } AB = R,$$

donc

$$\overline{BD}^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2 :$$

d'où

$$BD = C_3^1 = R\sqrt{3}.$$

Ainsi, *le côté du triangle équilatéral inscrit dans un cercle est égal au rayon de ce cercle multiplié par la racine carrée de* 3.

3° Soit le cercle O de rayon R. Si l'on mène le diamètre AD et OE perpendiculaire au côté AB de l'hexagone, le point E sera le milieu de l'arc AB, et la corde AE sera le côté cherché du dodécagone. Ce côté est facile à déterminer, car le triangle rectangle AEI donne :

$$\overline{AE}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{IE}^2 ; \qquad (1)$$

or,

$$AI = \frac{R}{2} \text{ et } IE = R - OI ;$$

mais

$$\overline{OI}^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}, \text{ d'où } OI = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Substituant ces valeurs dans (1), il vient :

$$\overline{AE}^2 = \frac{R^2}{4} + (R - OI)^2 = \frac{R^2}{4} + \left(R - \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\overline{AE}^2 = \frac{R^2}{4} + R^2 + \frac{3R^2}{4} - R^2\sqrt{3} = 2R^2 - R^2\sqrt{3} = R^2(2 - \sqrt{3}),$$

d'où

$$AE = C_{12}^1 = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Outre le dodécagone régulier convexe, il y a le dodécagone étoilé, dont le côté ED (*fig.* 284) sous-tend $\frac{5}{12}$ de la circonférence. On calcule ce côté au moyen du triangle rectangle ADE, lequel donne :

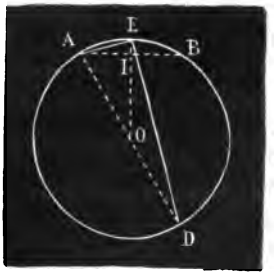


FIG. 284.

$$\overline{ED}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AE}^2 ;$$

or,

$$AD = 2R \text{ et } AE = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Si l'on substitue ces valeurs, on a :

$$\overline{ED}^2 = 4R^2 - 2R^2 + R^2\sqrt{3} = R^2(2 + \sqrt{3}),$$

d'où

$$ED = C_{12}^{5} = R\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

400. Remarque I. — Si l'on tire OB, OF (*fig.* 283), le quadrilatère ABOF, dont les quatre côtés sont égaux, est un losange : ses diagonales se coupent à angle droit et en parties égales. Donc, le côté du triangle équilatéral inscrit dans un cercle divise en deux parties égales le rayon qui lui est perpendiculaire, par suite, l'apothème du triangle équilatéral est égal à la moitié du rayon du cercle circonscrit.

401. Remarque II. — On sait partager la circonférence en trois parties égales : donc on saura la partager en 6, en 12, en 24,... en 3×2^n parties égales. Par suite, on sait inscrire dans un cercle les polygones réguliers de 3×2^n côtés.

PROBLÈME

402. — ***Inscrire dans un cercle un décagone régulier ; un pentagone régulier et calculer les côtés de ces polygones.***

1° Nous savons qu'on peut inscrire dans un cercle un décagone régulier convexe et un décagone régulier étoilé (395), et que le côté du premier sous-tend un arc de $\frac{1}{10}$ de la circonférence et le côté du second un arc de $\frac{3}{10}$. Si donc nous supposons la circonférence O, de rayon R, partagée en 10 parties égales aux points A, B, C, D, E, F, G,... il arrive que les cordes AB et AD sont les côtés des deux décagones. Menons les rayons OA, OB, OD, et soit I le point de rencontre de OB avec AD. Le prolongement de AO partage évidemment la circonférence en deux parties égales et passe par conséquent par la cinquième division F; de même le prolongement de BO passe au point G.

FIG. 285.

Or, il est facile de voir que les quatre angles 1, 2, 3, 4 sont égaux comme ayant tous pour mesure la même fraction, $\frac{2}{10}$, de la circonférence; pour la même raison, les angles 5, 6 et 7 sont aussi égaux. De là ces deux égalités :

$$AB = AI = OI$$
$$ID = OD = R.$$

La différence entre les côtés des deux décagones est donc :

$$AD - AB = AD - AI = ID = OD = R.$$

D'autre part, les triangles isocèles AOD, AOI sont semblables et donnent :

$$\frac{AD}{OA} = \frac{OA}{AI};$$

d'où, en remplaçant AI par son égal AB,

$$AD \times AB = \overline{OA}^2 = R^2.$$

Connaissant la différence R des côtés des deux décagones et le produit R^2 de ces mêmes côtés, il est facile de les construire (377).

On mène le rayon OA′ (*fig.* 286) perpendiculaire au rayon OA et, sur OA′ comme diamètre, on décrit une circonférence ; puis par le point A on tire une sécante APN passant par le centre du cercle, les droites AP et AN sont les longueurs cherchées. La plus petite AP est égale au côté AB du décagone convexe et la plus grande AN au côté AD du décagone étoilé.

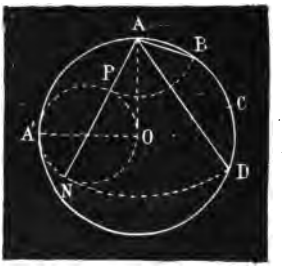


FIG. 286.

La moyenne géométrique R de ces deux côtés étant égale à leur différence, il en résulte (380) que AB est le plus grand segment additif du rayon divisé en moyenne et extrême raison, et que AD est le plus petit segment soustractif du même rayon divisé en moyenne et extrême raison.

Si donc on inscrit dans la circonférence et consécutivement dix cordes égales à AB, on aura le décagone régulier convexe et, si l'on joint de 3 en 3 les sommets du décagone convexe, on obtiendra le décagone régulier étoilé.

Il est d'ailleurs facile d'obtenir la valeur de chaque côté de ces décagones ; car (381), on a :

$$AB = C_{10}^1 = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$$

$$AD = C_{10}^3 = \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1).$$

2° Nous avons vu qu'il y a deux pentagones réguliers : l'un convexe, dont le côté sous-tend $\frac{1}{5}$ ou $\frac{2}{10}$ de la circonférence (*fig.* 287),

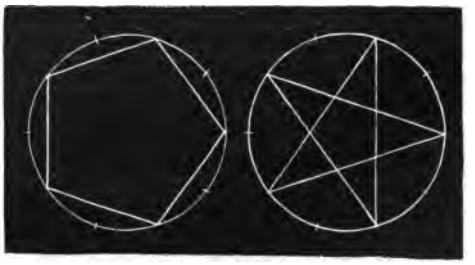


FIG. 287. FIG. 288.

l'autre étoilé, dont le côté sous-tend $\frac{2}{5}$ ou $\frac{4}{10}$ de la circonférence (*fig.* 288).

Donc, si l'on joint de 2 en 2 les sommets du décagone régulier convexe, on aura le pentagone convexe et si on les joint de 4 en 4, on aura le pentagone étoilé.

Cherchons maintenant la valeur de chaque côté de ces pentagones.

Déterminons d'abord la valeur de AC (*fig.* 289), côté du pentagone régulier convexe inscrit. Le triangle rectangle ACF donne :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AF}^2 - \overline{CF}^2 ;$$

mais

$$AF = 2R \text{ et } CF = AD = C_{10}^3 = \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1) :$$

donc

$$\overline{AC}^2 = \overline{4R}^2 - \frac{R^2}{4}(5+2\sqrt{5}+1) = \frac{R^2}{4}(10-2\sqrt{5}),$$

d'où

$$AC = C_5^1 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

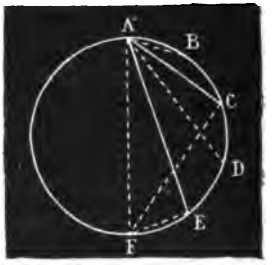


FIG. 289.

Il est également facile de trouver la valeur de AE, côté du pantagone étoilé ; car le triangle rectangle AEF donne :

$$\overline{AE}^2 = \overline{AF}^2 - \overline{EF}^2 ;$$

mais

$$AF = 2R \text{ et } EF = AB = C_{10}^1 = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) :$$

donc

$$\overline{AE}^2 = 4R^2 - \frac{R^2}{4}(5-2\sqrt{5}+1) = \frac{R^2}{4}(10+2\sqrt{5}),$$

d'où

$$AE = C_5^2 = \frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

403. Remarque II. — On sait partager la circonférence en 5 parties égales : donc on saura la partager en 10, en 20,... en 5×2^n parties égales. Par suite, on sait inscrire dans un cercle les polygones de 5×2^n côtés.

PROBLÈME

404. — *Inscrire dans un cercle un pentédécagone régulier et calculer le côté de ce polygone.*

Nous avons vu (395) qu'il y a quatre espèces de pentédécagones réguliers, et que les côtés de ces polygones inscrits dans un cercle sous-tendent $\frac{1}{15}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{7}{15}$ de la circonférence du cercle. Pour

inscrire l'un quelconque de ces polygones, il suffit donc de connaître et $\frac{1}{15}$ de la circonférence. Or, il est facile de voir que

$$\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}.$$

Si donc d'un point A de la circonférence O, et du même côté, on porte une première corde AC égale au côté de l'hexagone, puis une seconde corde AB egale au côté du décagone régulier convexe, l'arc BC, différence des arcs AC et AB, sera égal à $\frac{1}{6}$ moins $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{15}$ de la circonférence.

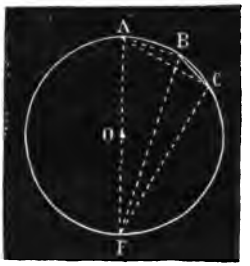


FIG. 290.

La corde qui sous-tend l'arc BC est donc égale au côté du pentédécagone inscrit. Or, d'après ce que nous avons vu plus haut (399 et 402), il est facile de construire cette figure et, par suite, les trois pentédécagones réguliers étoilés.

Calculons les côtés C_{15}^1, C_{15}^2.

1° *Calcul de* $C_{15}^1 = BC$. Nous venons de voir comment on peut trouver BC. Pour en calculer la valeur, menons le diamètre AF, le quadrilatère inscrit, dont les sommets sont A,B,C,F, donne (359),

$$AC \times BF = BC \times AF + AB \times CF,$$

d'où

$$BC \times AF = AC \times BF - AB \times CF;$$

or,

$$BC = C_{15}^1,\ AF = 2R,\ AC = C_6^1 = R,$$

$$BF = C_5^2 = \frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}},\ AB = C_{10}^1 = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1),\ CF = C_3^1 = R\sqrt{3}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la seconde égalité, il vient :

$$C_{15}^1 \times 2R = \frac{R^2}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \frac{R^2}{2}\sqrt{3}(\sqrt{5}-1),$$

d'où

$$C_{15}^1 = \frac{R}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\right]$$

2° *Calcul de* $C_{15}^2 = BC$. On a :

$$\frac{2}{15} = \frac{2}{6} - \frac{2}{15} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

Si donc on prend dans le même sens les arcs AC et AB égaux à $\frac{1}{3}$ et à $\frac{1}{5}$ de la circonférence, l'arc BC, différence de ces

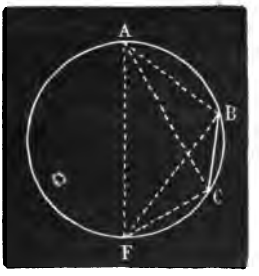


FIG. 291.

deux arcs, sera les $\frac{2}{15}$ de la circonférence, et la corde BC sera le côté demandé. Menons le diamètre AF. Le quadrilatère ABCF donne :

$$AC \times BF = BC \times AF + AB \times CF,$$

d'où

$$BC \times AF = AC \times BF - AB \times CF;$$

or,

$$BC = C_{15}^2,\ AF = 2R,\ AC = C_3^1 = R\sqrt{3},\ BF = C_{10}^3 = \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1),$$

$$AB = C_5^1 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}},\ CF = C_6^1 = R.$$

Substituant ces valeurs dans la seconde égalité et réduisant, il vient

$$C_{15}^2 = \frac{R}{4}\left[\sqrt{3}\,(\sqrt{5}+1) - \sqrt{10-2\sqrt{5}}\right]$$

En procédant d'une manière analogue, on trouverait C_{15}^4 et C_{15}^7.

§ III. — LONGUEUR D'UN ARC DE CERCLE. — RAPPORT DE LA CIRCONFÉRENCE AU DIAMÈTRE

405. — On sait que mesurer une longueur, c'est chercher le rapport de cette longueur à une autre choisie pour unité. Or, cette unité est une portion de droite; mais, comme une ligne droite et une ligne courbe ne sont pas superposables, il en résulte qu'elles ne sont pas rigoureusement comparables; de telle sorte qu'il est nécessaire de définir ce qu'on entend par longueur d'un arc de cercle.

On appelle longueur d'un arc de cercle la limite vers laquelle tend le périmètre d'une ligne polygonale régulière convexe inscrite, terminée aux extrémités de cet arc, lorsqu'on double indéfiniment le nombre des côtés de cette ligne.

On définit de la même manière la longueur d'une circonférence; il suffit simplement de supposer que la ligne polygonale est fermée au lieu d'être ouverte.

Nous allons démontrer l'existence de la limite dont il vient d'être question au moyen du théorème suivant.

THÉORÈME

406. — *Les périmètres de deux polygones réguliers semblables, l'un inscrit, l'autre circonscrit à un cercle, tendent vers une limite commune lorsqu'on double indéfiniment le nombre de leurs côtés.*

Soit O un cercle de rayon R; soient aussi AB et BC deux côtés cosécutifs du polygone régulier inscrit de n côtés, A'B' et B'C' les côtés correspondants du polygone semblable circonscrit, OI et OD les apothèmes de ces polygones, OB et OB' leurs rayons, P et P' leurs périmètres. On a (396) :

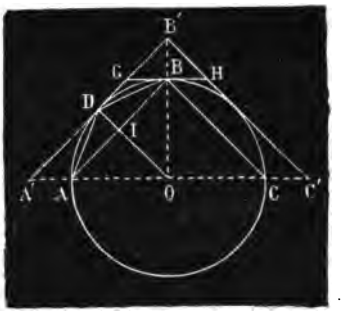


FIG. 292.

$$\frac{P'}{P} = \frac{OD}{OI} = \frac{R}{OI}.$$

Mais, quel que soit n, on a toujours $R > OI$, et, par suite, le périmètre circonscrit P' est toujours plus grand que le périmètre inscrit P. Or, si l'on double n, le périmètre inscrit P grandit, car chaque côté, tel que AB, est remplacé par une ligne brisée AD + DB évidemment plus longue que lui; au contraire, le périmètre circonscrit P' diminue; car chaque ligne brisée, telle que GB' + B'H, est remplacée par la droite GH qui est moindre qu'elle.

D'autre part, les côtés du polygone inscrit étant devenus plus petits, leur distance au centre ou l'apothème du polygone grandit, tandis que l'apothème du polygone circonscrit reste toujours égal au rayon.

Si l'on double ainsi indéfiniment le nombre des côtés des deux polygones, les périmètres des polygones inscrits vont sans cesse en augmentant, mais de telle façon que chacun reste toujours moindre que le périmètre P' du polygone circonscrit du même nombre de côtés, donc ces périmètres tendent vers une limite moindre que P'. Au contraire, les périmètres circonscrits vont sans cesse en diminuant, mais de telle façon que chacun d'eux reste toujours supérieur au périmètre P du polygone inscrit du même nombre de côtés : donc ces périmètres tendent vers une limite supérieure à P. Nous aurons montré que ces limites sont égales si nous prouvons qu'on peut attribuer à n une valeur assez grande pour que la différence P' — P soit aussi rapprochée de zéro qu'on voudra. Or l'égalité

$$\frac{P'}{P} = \frac{R}{OI}$$

donne

$$\frac{P' - P}{P'} = \frac{R - OI}{R} = \frac{ID}{R},$$

d'où

$$P' - P = \frac{ID}{R} \times P'.$$

Mais, quand on double n indéfiniment, le côté du polygone inscrit

tend vers zéro, et *a fortiori* ID, qui est moindre que ce côté, tend aussi vers zéro ; et comme R est constant le rapport $\frac{ID}{R}$ tend vers zéro ; le facteur P′ étant d'ailleurs fini, il en résulte que la différence P′ — P a zéro pour limite. Par conséquent, les limites vers lesquelles tendent les périmètres P′ et P sont égales quand on double n indéfiniment. C'est cette limite commune à P′ et à P qui est la longueur de la circonférence. Cette démonstration s'applique évidemment à la ligne polygonale régulière. Les définitions données au n° 405 sont donc rigoureuses.

THÉORÈME

407. — *Le rapport de deux circonférences est égal au rapport de leurs rayons.*

Soient deux circonférences quelconques C et C′ dont les rayons sont R et R′. Si l'on inscrit dans ces circonférences deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés, et qu'on désigne par P et P′ les périmètres de ces polygones, on a (396) :

$$\frac{P}{P'} = \frac{R}{R'}.$$

Or, cette égalité a lieu quel que soit le nombre des côtés des polygones, donc elle subsistera encore si l'on double indéfiniment ce nombre ; mais les périmètres P et P′ ont pour limites respectives C et C′, donc à la limite on a :

$$\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'}.$$

408. Corollaire. — *Le rapport de deux arcs de cercle semblables est égal au rapport des rayons.*

Soient A et A′ deux arcs semblables, c'est-à-dire deux arcs correspondant à des angles au centre égaux l'un et l'autre au même angle α. Désignons par R et R′ les rayons des deux cercles et par C et C′ leurs circonférences. On sait (221) que le rapport de deux arcs d'une même circonférence est égal au rapport des angles au centre correspondant. On a, par suite,

$$\frac{A}{C} = \frac{\alpha}{4^{dr}} \text{ et } \frac{A'}{C'} = \frac{\alpha}{4^{dr}}.$$

d'où

$$\frac{A}{C} = \frac{A'}{C'};$$

ce dernier rapport donne l'égalité cherchée

$$\frac{A}{A'} = \frac{C}{C'} = \frac{R}{R'}.$$

THÉORÈME

409. — *Le rapport d'une circonférence à son diamètre est un nombre constant.*

En effet, soient C et C′ deux circonférences dont les rayons sont R et R′, on a :

$$\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'} = \frac{2R}{2R'}$$

d'où

$$\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'};$$

donc le rapport $\frac{C}{2R}$ est constant.

410. Remarque. — Ce rapport constant est un nombre *incommensurable* qu'on représente ordinairement par la lettre grecque π, de sorte qu'on a :

$$\frac{C}{2R} = \pi .$$

Le nombre π étant incommensurable ne peut être calculé qu'approximativement. On connaît aujourd'hui les 500 premières décimales de π.

Archimède a donné pour π la valeur approchée $\frac{22}{7}$, commode dans les applications et ne différant qu'à la 3e décimale de la vraie valeur de π.

Adrien Métius a trouvé la valeur approchée $\frac{355}{113}$ facile à retenir, car il suffit d'écrire le nombre 113355 et de le séparer en deux groupes de trois chiffres dont on forme les termes du rapport, qui a d'ailleurs 6 décimales exactes.

Voici la valeur de π avec 12 décimales : $\pi = 3{,}141\ 592\ 653\ 589...$

Dans la pratique, on fait généralement : $\pi = 3{,}1416$.

411. I. Calcul de la longueur d'une circonférence C, connaissant le rayon R. — La formule $\frac{C}{2R} = \pi$ donne :

$$C = 2\pi R.$$

Donc, *la longueur d'une circonférence égale le double de son rayon multiplié par le nombre π.*

412. II. Calcul du diamètre 2R connaissant la circonférence C. — La formule $\frac{C}{2R} = \pi$ donne :

$$\frac{C}{\pi} = 2R.$$

Donc, *le diamètre d'une circonférence égale le quotient de cette circonférence par le nombre* π.

413. III. Calcul de la longueur d'un arc. — La longueur d'un arc d'un degré est évidemment $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$, et par suite la longueur l d'un arc de n degrés est :

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

La longueur l' d'un arc de n' grades serait : $l' = \frac{\pi R n'}{200}$.

Ces formules permettent de calculer l'une des trois quantités l, n, R ou l', n', R quand on connaît les deux autres.

§ IV. — CALCUL DU RAPPORT DE LA CIRCONFÉRENCE AU DIAMÈTRE

414. — La méthode pour déterminer le nombre π ne saurait être exposée dans un cours élémentaire de géométrie, mais nous allons indiquer comment on *pourrait* calculer π avec une approximation déterminée.

La formule $\pi = \frac{C}{2R}$ fournit deux méthodes pour déterminer π.

1° On peut se donner la circonférence C et chercher une valeur approchée de R, c'est la méthode des isopérimètres.

2° On peut se donner le rayon R et chercher une valeur approchée de la circonférence C, c'est la méthode des périmètres. Nous ne nous occuperons que de cette dernière méthode.

415. Calcul de π par la méthode des périmètres. — Cette méthode se présente à l'esprit plus naturel-

lement que l'autre ; c'est celle qui a été suivie par Archimède.

Si l'on pose $2R = 1$, la formule $\frac{C}{2R} = \pi$ devient $C = \pi$, et comme de $2R = 1$ on tire $R = \frac{1}{2}$, il en résulte que le rapport π est égal à la circonférence qui a $\frac{1}{2}$ pour rayon.

D'après ce qu'on a vu plus haut (406), les périmètres de tous les polygones réguliers inscrits seront des valeurs de π approchées par défaut, et, au contraire, les périmètres de tous les polygones réguliers circonscrits seront des valeurs de π approchées par excès.

Si, par exemple, on part de l'hexagone régulier inscrit et circonscrit et qu'on double successivement le nombre des côtés de l'un et de l'autre polygone, on obtiendra deux séries de valeurs qui auront l'une et l'autre le nombre π pour limite, les premières en approcheront par défaut et les secondes par excès. Si donc après un certain nombre d'opérations on s'arrête au périmètre P_n d'un polygone régulier inscrit de n côtés, et au périmètre P'_n du polygone régulier circonscrit correspondant, il arrive que P_n est approché du nombre π par défaut, tandis que P'_n en est approché par excès. Puisque le nombre π, qui est dans ce cas la longueur de la circonférence, est compris entre P_n et P'_n, nous aurons sa valeur avec une erreur moindre que $P'_n - P_n$.

Avant de pouvoir calculer π, il faut savoir résoudre les deux problèmes suivants.

PROBLÈME

416. — *Connaissant le périmètre* P_n *d'un polygone régulier de* n *côtés inscrit dans un cercle de rayon* R, *calculer le périmètre* P_{2n} *d'un polygone régulier de* 2n *côtés inscrit dans le même cercle.*

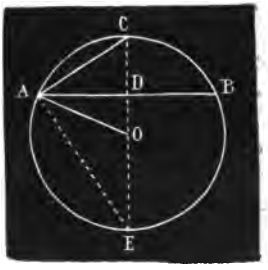


FIG. 293.

Soit AB le côté du polygone régulier de n côtés. Menons le diamètre CE perpendiculaire au côté AB et tirons la corde AC : cette corde est le côté du polygone régulier de $2n$ côtés ; car l'arc ABC est divisé au point C en deux parties égales. Or, le triangle rectangle ACE donne :

$$\overline{AC}^2 = CE \times CD;$$

mais

$$CE = 2R \text{ et } CD = R - OD = R - \sqrt{R^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4}},$$

d'où

$$\overline{AC}^2 = 2R\left[R - \sqrt{R^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4}}\right].$$

D'ailleurs le polygone P_n ayant n côtés égaux à AB, nous avons :

$$P_n = n.AB \text{ et } P_n^2 = n^2 \cdot \overline{AB}^2$$

$$P_{2n} = 2n.AC \text{ et } P_{2n}^2 = 4n^2.\overline{AC}^2;$$

mais

$$P_n^2 = n^2.\overline{AB}^2$$

donne

$$\frac{P_n^2}{n^2} = \overline{AB}^2 \text{ et } \frac{P_n^2}{4n^2} = \frac{\overline{AB}^2}{4} :$$

donc

$$P_{2n}^2 = 4n^2\overline{AC}^2 = 4n^2.2R\left[R - \sqrt{R^2 - \frac{P_n^2}{4n^2}}\right]$$

ou successivement

$$P_{2n}^2 = 8n^2.R\left[R - \frac{\sqrt{4n^2R^2 - P_n^2}}{2n}\right]$$

$$P_{2n}^2 = 4nR\left[2nR - \sqrt{4n^2R^2 - P_n^2}\right]$$

Si l'on fait 2R, ou le diamètre du cercle, égal à 1, la formule précédente devient

$$P_{2n}^2 = 2n\left[n - \sqrt{n^2 - P_n^2}\right].$$

PROBLÈME

417. — *Connaissant le périmètre* P_n *d'un polygone régulier de* n *côtés inscrit dans un cercle de rayon* R, *calculer le périmètre* P'_n *d'un polygone régulier du même nombre de côtés circonscrit au même cercle.*

Soient AB et A'B' deux côtés correspondants des polygones réguliers de n côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit à la circonférence O. Menons les apothèmes OI et OI'. Les périmètres de ces polygones étant dans le même rapport que leurs apothèmes, on a :

FIG. 294.

$$\frac{P'_n}{P_n} = \frac{OI'}{OI} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4}}};$$

mais (420)

$$P_n^2 = n^2.\overline{AB}^2, \text{ d'où } \frac{\overline{AB}^2}{4} = \frac{P_n^2}{4n^2},$$

donc

$$\frac{P'_n}{P_n}=\frac{R}{\sqrt{R^2-\frac{P_n^2}{4n^2}}}=\frac{R}{\frac{\sqrt{4n^2R^2-P_n^2}}{2n}}=\frac{2nR}{\sqrt{4n^2R^2-P_n^2}},$$

d'où

$$P'_n=P_n\times\frac{2nR}{\sqrt{4n^2R^2-P_n^2}}.$$

Si l'on fait 2R, ou le diamètre du cercle, égal à 1, la formule précédente devient

$$P'_n=P_n\times\frac{n}{\sqrt{n^2-P_n^2}}.$$

Cette formule permet de calculer le côté a d'un polygone régulier inscrit, connaissant le côté A du polygone régulier circonscrit, qui lui est semblable, ainsi que le rayon R du cercle.

418. Application au calcul de π. — On peut facilement appliquer les formules précédentes à la détermination de π. Si, par exemple, on part de l'hexagone régulier inscrit, le côté est égal au rayon, ou égal à $\frac{1}{2}$, dans le cas où l'on a $2R=1$; par suite le périmètre P de l'hexagone est $6\times\frac{1}{2}$ ou 3. Alors on a (416) :

$$P_6^2=9$$

$$P_{12}^2=12\left[6-\sqrt{6^2-P_6^2}\right]$$

. . . . . .

Si l'on continue de calculer ainsi les périmètres des polygones réguliers inscrits de 24, 48... côtés et qu'on s'arrête au polygone de 384 côtés, on trouve

$$P_{384}=3{,}1415$$

et

$$P'_{384}=P_{384}\times\frac{384}{\sqrt{384^2-P_{384}^2}}=3{,}1416.$$

La différence $P'_{384}-P_{384}$ n'étant que de un dix-millième, il arrive que l'on a, à moins de un dix-millième

$$\pi=3{,}1415.$$

SUPPLÉMENT AU LIVRE III

CHAPITRE PREMIER

Usage des signes en géométrie. Théorème de Stewart. — Division harmonique. Faisceaux harmoniques.

§ Ier. — USAGE DES SIGNES EN GÉOMÉTRIE

419. — En vue de généraliser et de simplifier les démonstrations, on a introduit en géométrie l'usage des signes + et —.

Si, par exemple, on veut, sans le secours de ces signes, indiquer, sur une droite XY, la position d'un point M par rapport à un point fixe A de cette droite pris pour *origine*, il faut non seulement donner la distance AM, mais il faut de plus faire connaître si le point M est à *droite* ou à *gauche* de A. Or, sans donner ces indications, on peut parfaitement préciser la position du point M, il suffit, pour cela, de désigner par des signes contraires, + et —, des distances comptées dans des sens opposés à partir de l'origine. Si donc on convient de regarder comme *positives*, ce qui d'ailleurs est facultatif, les distances portées de gauche à droite à partir de l'origine, celles qui seront portées de droite à gauche de la même origine seront *négatives*. De sorte que si AM a une longueur de 2 centimètres et AM′ une longueur de 3 centimètres, il suffira, pour préciser les positions des points M et M′, d'écrire :

FIG. 295.

$$AM = +2 \text{ et } AM' = -3.$$

420. — En général, sur une droite indéfinie XY, plusieurs segments étant déterminés par les points A, B, C,..., on convient d'indiquer l'origine de chaque segment par sa première lettre, et, en outre, de lui donner le signe + ou le signe —, selon qu'il est parcouru à partir de son origine dans le sens adopté pour celui des segments positifs ou dans le sens contraire.

FIG. 296.

Il résulte de ces conventions que les segments AB et BA ont même longueur et des directions opposées, par suite

$$AB = -BA,$$

d'où

$$AB + BA = 0.$$

Si l'on considère les trois points A, B, C, on a de même

$$AB + BC + CA = 0;$$

et cette relation est vraie quelle que soit d'ailleurs la position relative des trois points sur la droite AB.

Si nous nous reportons au théorème du n° 271 et que nous tenions compte de ces conventions, il arrive que si le point M se trouve sur XA, les segments MA et MB sont de même sens, de sorte que le rapport $\frac{MA}{MB}$ est

FIG. 297.

positif; par suite ce rapport prend toutes les valeurs comprises entre 1 et 0.

Si M vient en M' entre A et B, les segments M'A et M'B sont de sens contraires, de sorte que le rapport $\frac{M'A}{M'B}$ est négatif; par suite ce rapport prend toutes les valeurs négatives comprises entre 0 et l'infini.

De B à Y les segments M''A, M''B sont de même sens, de sorte que le rapport $\frac{M''A}{M''B}$ est positif; par suite ce rapport prend toutes les valeurs positives comprises entre l'infini et 1.

Donc :

Sur une droite indéfinie XY, *passant par deux points donnés*, A *et* B, *il y a un point* M *et un seul, tel que le rapport* $\frac{MA}{MB}$ *soit égal, en valeur absolue et en signe, à un rapport donné.*

Le point M *est entre* A *et* B, *si le rapport donné est négatif; il est sur la portion* XA *s'il est positif et plus petit que* 1; *il est sur la portion* BY, *s'il est positif et plus grand que* 1.

THÉORÈME DE STEWART.

421. — *Les distances d'un point* O *à trois points* ABC *en ligne droite satisfont à la relation* :

$$\overline{OA}^2 \times BC + \overline{OC}^2 \times AB - \overline{OB}^2 \times AC = AB \times BC \times AC.$$

En effet, menons OD perpendiculaire à AC. Les deux triangles OAB et OBC donnent (340) :

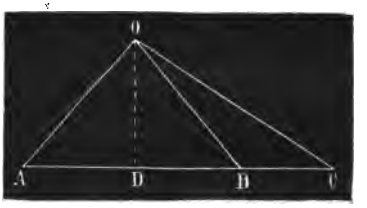


FIG. 297 *bis*.

$$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{AB}^2 - 2AB \times DB$$
$$\overline{OC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times DB.$$

Pour éliminer DB entre ces deux égalités, multiplions la première par BC et la seconde par AB, puis ajoutons-les membre à membre, alors nous aurons successivement :

$$\overline{OA}^2 \times BC + \overline{OC}^2 \times AB = \overline{OB}^2 \times BC + \overline{AB}^2 \times BC + \overline{OB}^2 \times AB + \overline{BC}^2 \times AB,$$
$$\overline{OA}^2 \times BC + \overline{OC}^2 \times AB = \overline{OB}^2 (BC + AB) + AB \times BC (AB + BC),$$
$$\overline{OA}^2 \times BC + \overline{OC}^2 \times AB = \overline{OB}^2 \times AC + AB \times BC \times AC,$$

d'où enfin la relation cherchée :

$$\overline{OA}^2 \times BC + \overline{OC}^2 \times AB - \overline{OB}^2 \times AC = AB \times BC \times AC.$$

Ce théorème a une grande importance. Il va nous servir ici à résoudre la question suivante.

PROBLÈME

On donne les trois côtés a, b, c *d'un triangle : calculer la distance du sommet* A *au point* D *qui divise* BC *en segments proportionnels à* m *et* n.

1° Il s'agit de calculer la distance AD telle que : $\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}$. (1)

Or, le théorème donne : $b^2 \times BD + c^2 \times DC - x^2a = BD \times DC \times a$. (2)

Mais, par suite de la relation (1), on a :

$$\frac{BD}{BD + DC} = \frac{m}{m+n}, \text{ d'où } BD = \frac{ma}{m+n}.$$

La même relation (1) donne encore :

$$\frac{DC}{BD + DC} = \frac{n}{m+n}, \text{ d'où } DC = \frac{na}{m+n}.$$

Substituant ces valeurs dans la relation (2), il vient :

$$b^2 \frac{ma}{m+n} + c^2 \frac{na}{m+n} - x^2a = \frac{mna^2}{(m+n)^2} :$$

d'où, en résolvant par rapport à x^2 et en divisant les deux membres par a, on a :

$$x^2 = \frac{mb^2 + nc^2}{m+n} - \frac{mna^2}{(m+n)^2}. \qquad (3)$$

La valeur de x est donc égale à la racine carrée du second membre de l'égalité (3) où toutes les quantités sont connues.

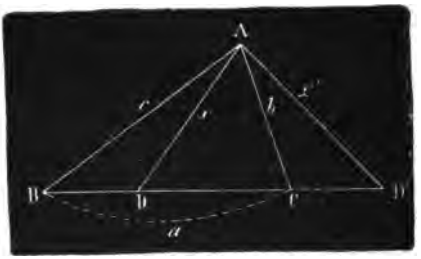


FIG. 297 *ter*.

2° Si les segments, au lieu d'être additifs ($BD + DC = a$), sont soustractifs ($BD' - CD' = a$), on a :

$$\frac{BD'}{D'C} = \frac{m}{n}.$$

Comme ici D'C est négatif, la formule (2) se change alors en celle-ci :

$$b^2 \times BD' + c^2 \times - D'C - x'^2a = BD' \times - D'C \times a$$

ou

$$b^2 \times BD' - c^2 \times D'C - x'^2a = - BD' \times D'C \times a.$$

Si l'on détermine comme plus haut les valeurs de BD' et D'C, on arrive à la relation

$$x'^2 = \frac{mb^2 - nc^2}{m-n} + \frac{mna^2}{(m-n)^2}. \qquad (4)$$

Cette valeur de x'^2 ne diffère de celle de x^2 que par le signe de n qui, de positif qu'il était dans x^2, est devenu négatif dans x'^2.

Remarque. — *Calcul de la bissectrice et de la médiane issues du sommet* A *d'un triangle* ABC.

1° En faisant $m = c$, $n = b$, l'équation (3) fournit la valeur de la *bissectrice intérieure* AD en fonction des côtés du triangle : $\alpha^2 = bc - \frac{a^2bc}{(c+b)^2}$.

La formule (4) fournit la longueur α_1 de la *bissectrice extérieure* AD'.

$$\alpha_1^2 = \frac{a^2bc}{(c-b)^2} - bc.$$

2° En faisant $m = n$, la formule (3) fournit la valeur de la *médiane*

$$m^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

§ II. — DIVISION HARMONIQUE

422. — Un segment de droite AB est divisé *harmoniquement* par deux points C et D, lorsque les rapports des distances des points C et D aux points A et B sont égaux en *valeur absolue*.

FIG. 298.

Par conséquent, on a, d'après cette définition :

$$\left|\frac{CA}{CB}\right| = \left|\frac{DA}{DB}\right| \qquad \text{en } \textit{valeur absolue}.$$

Mais si l'on tient compte des signes, le premier membre de cette égalité est négatif et le second est positif. En changeant les signes des deux membres, on peut donc écrire :

$$(1) \qquad \frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}.$$

Les points C et D sont dits *conjugués harmoniques* par rapport aux points A et B.

Réciproquement, les points A et B sont conjugués harmoniques par rapport aux points C et D ; car la relation (1) donne, en changeant les moyens de place,

$$\frac{CA}{DA} = -\frac{CB}{DB},$$

ou encore :

$$\frac{AC}{AD} = -\frac{BC}{BD}.$$

Or, cette relation est bien celle que nous devions trouver ; car elle montre que les rapports des distances des points A et B aux points C D sont égaux en valeur absolue.

On dit aussi que les quatre points A, B, C, D forment une *division harmonique*.

423. — Comme exemple de division harmonique, nous citerons les points A et B de la base AB d'un triangle AOB et les points C et D d'intersection de cette base avec les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle O.

FIG. 299.

On a, en effet, $\frac{CA}{CB} = \frac{OA}{OB}$ et $\frac{DA}{DB} = \frac{OA}{OB}$,

d'où

$$\left|\frac{CA}{CB}\right| = \left|\frac{DA}{DB}\right| \qquad \text{en } \textit{valeur absolue},$$

et en tenant compte des signes

$$\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}.$$

Comme second exemple de division harmonique, on peut dire que les centres de similitude O et O′ de deux cercles C et C′ divisent harmoniquement le segment CC′, limité par les centres de ces cercles ; en effet, les rapports $\frac{OC}{OC'}$ et $\frac{O'C}{O'C'}$ sont de signes contraires et leur valeur absolue est $\frac{R}{R'}$ (306).

424. Remarque I. — Si l'on prend pour origine des segments le milieu O de deux points conjugués A et B, la relation (1) prend une forme particulière.

En effet, le point O étant l'origine des segments, on a (420) :

$$CA = OA - OC,$$
$$CB = OB - OC,$$
$$DA = OA - OD,$$
$$DB = OB - OD.$$

FIG. 300.

En substituant ces valeurs dans la relation (1) elle devient :

$$\frac{OA - OC}{OB - OC} = -\frac{OA - OD}{OB - OD}$$

ou

$$(OA - OC)(OB - OD) = -(OB - OC)(OA - OD);$$

en remplaçant OB par — OA et en changeant les signes, on a :

$$(OA - OC)(OA + OD) = -(OA + OC)(OA - OD);$$

effectuant les produits et réduisant, il vient enfin :

$$\overline{OA}^2 = OC \times OD. \qquad (2)$$

Le produit $OC \times OD$ étant égal à $\overline{OA}^2$ est toujours positif, d'où il résulte que les points C et D sont d'un même côté par rapport au point O.

D'autre part, comme ce produit est constant, il arrive que si l'un des facteurs décroît l'autre croît : si donc l'un décroît jusqu'à *zéro* l'autre croît jusqu'à l'*infini*. Donc, le conjugué du point O, milieu de AB, est à l'infini, et, réciproquement, le conjugué d'un point à l'infini est le milieu de AB.

425. Remarque II. — Les deux points C et D sont généralement distincts ; s'ils se confondaient, on aurait OC = OD, et, par suite,

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2,$$

d'où

$$OC = \pm OA.$$

Cette égalité fait connaître que le point C doit être en A ou en B.

Dans le cas particulier où les points A et B se confondent, si les points C et D restent conjugués harmoniques par rapport aux points A et B, les points intérieurs O et C se confondent également avec A et B et le point D est alors indéterminé ; car dans la relation

$$OC \times OD = \overline{OA}^2$$

les valeurs OC et OA sont nulles, par suite OD est quelconque.

426. Remarque III. — La relation $\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}$ (1) peut encore prendre cette forme particulière

$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{AC} = \frac{2}{AB}.$$

En effet, on sait que :

$$CA = -AC \quad \text{et} \quad -DA = AD;$$

d'autre part,

$$CB = AB - AC \quad \text{et} \quad DB = AB - AD.$$

Substituant ces valeurs dans la relation (1), on a :

$$\frac{-AC}{AB - AC} = \frac{AD}{AB - AD},$$

ou

$$AC(AB - AD) = -AD(AB - AC)$$

et, en effectuant et transposant,

$$AC \times AB + AD \times AB = 2AC \times AD,$$

d'où, en divisant les deux membres par le produit $AB \times AC \times AD$,

$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{AC} = \frac{2}{AB}.$$

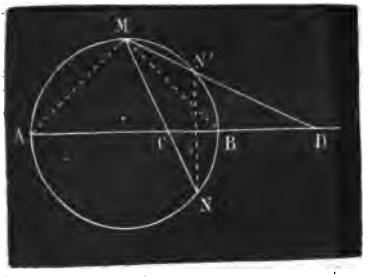


FIG. 301.

427. Remarque IV. — Voici une méthode de construire le point D conjugué harmonique d'un point C d'une droite AB, par rapport aux deux points A et B. On décrit une circonférence sur AB comme diamètre, on mène par le point C une corde quelconque MN, et la sécante MN'D, passant par le point N', symétrique de N, rencontre AB en un point D qui est le point cherché. En effet, BM est bissectrice de l'angle *intérieur* M, car les arcs BN et BN' sont égaux, d'autre part, AM étant perpendiculaire en M à MB est bissectrice de l'angle *extérieur* en M ; donc les quatre points A, B, C, D forment une division harmonique.

§ III. — FAISCEAUX HARMONIQUES

Définitions.

428. — On appelle *faisceau harmonique* l'ensemble de quatre droites passant par un même point O et par quatre points A, B, C, D formant une division harmonique. Le point O est le *centre* du faisceau O.ABCD et les droites OA, OB, OC, OD en sont les *rayons*. Les rayons OC et OD sont dits *conjugués harmoniques* par rapport aux deux autres rayons OA et OB ; de même les rayons OA et OB sont conjugués harmoniques par rapport aux rayons OC et OD. On dit encore que les rayons OC et OD divisent harmoniquement (423) l'angle AOB et que les rayons OA et OB divisent harmoniquement l'angle COD.

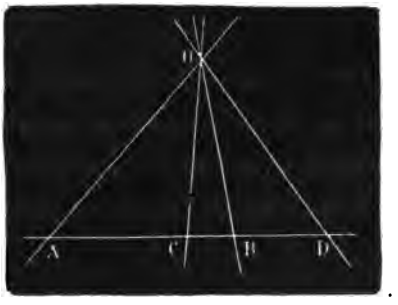


FIG. 302.

THÉORÈME

429. — *Toute sécante est divisée harmoniquement par les quatre rayons d'un faisceau harmonique.*

Soit la sécante A'B'C'D'.

On a par hypothèse (1) $\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}$; il faut démontrer qu'on a aussi

$$\frac{C'A'}{C'B'} = -\frac{D'A'}{D'B};$$

menons, par le point B' et par le point B, E'B'F' et EBF parallèles à OA.

A cause des triangles semblables AOC, BEC et DOA, DFB, on a en grandeur et en signe :

(2) $\frac{CA}{CB} = \frac{AO}{BE}$

(3) et $\frac{DA}{DB} = \frac{AO}{BF}$.

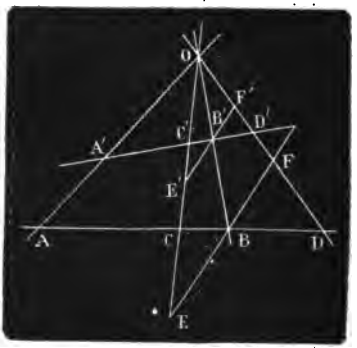


FIG. 303.

Comme par hypothèse

$$\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}$$

on a aussi $\frac{AO}{BE} = -\frac{AO}{BF}$,

d'où $BE = -BF$.

A cause des triangles semblables A'OC', B'E'C' et D'OA', D'F'B', on a en grandeur et en signe :

(4) $\frac{C'A'}{C'B'} = \frac{A'O}{B'E'}$

et (5) $\frac{D'A'}{D'B'} = \frac{A'O}{B'F'}$.

Mais $\frac{BE}{BF} = \frac{B'E'}{B'F'}$; et comme $BE = -BF$ on aura : $B'E' = -B'F'$; donc les seconds membres des rapports (4) et (5) sont égaux et de signes contraires, et on aura finalement la relation $\frac{C'A'}{C'B'} = -\frac{D'A'}{D'B'}$. Les points C', D' sont conjugués harmoniques par rapport aux points A' et B'. C. Q. F. D.

CHAPITRE II

Notions sur les lignes trigonométriques Sinus, cosinus, tangente et cotangente des angles compris entre 0 et deux droits.

430. — Un triangle se compose de six éléments : trois angles et trois côtés. On a vu comment on peut construire un triangle avec trois éléments, pourvu qu'il y ait au moins une longueur parmi les données.

Cette méthode rigoureuse en théorie ne l'est pas toujours en pratique, et les constructions graphiques ne permettent pas de déterminer le degré d'approximation des résultats obtenus. La trigonométrie vient parer à ces inconvénients.

La trigonométrie est une science qui enseigne à substituer le calcul numérique aux procédés que l'on emploie en géométrie pour résoudre les triangles.

Résoudre un triangle c'est en déterminer les parties inconnues à l'aide de celles qui sont connues.

Afin de pouvoir remplacer les constructions graphiques par le calcul, on devra d'abord exprimer en *nombres* les données de la question. Dès lors on atteindra dans la résolution des triangles l'exactitude que l'on désirera, puisque toujours on est libre de pousser le calcul au degré de précision que l'on veut.

Remarque I. — N'oublions pas qu'un angle a pour mesure l'arc de cercle compris entre ses côtés et décrit de son sommet contre centre, avec un rayon arbitraire. D'ailleurs la mesure d'un arc étant celle de l'angle correspondant, on peut employer le mot *arc* pour celui *d'angle*. On a vu (411) que la longueur d'une circonférence $C = 2\pi R$. Si l'on prend le rayon pour unité de longueur, $R = 1$, $C = 2\pi$. Dans ce cas, l'angle de $360^\circ = 400^\gamma$ a pour mesure 2π. Celui de $180^\circ = 200^\gamma$ a pour mesure π. Enfin celui de $90^\circ = 100^\gamma$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$. On dit alors que l'arc est exprimé en *radians*.

Remarque II. — Deux angles ou deux arcs sont dits *complémentaires* ou compléments l'un de l'autre lorsque leur somme égale 90° ou 100 grades, ou encore $\frac{\pi}{2}$, dans le cercle de rayon égal à l'unité. Ils sont *supplémentaires* ou suppléments l'un de l'autre, si leur somme égale 180° ou 200 grades, ou π. Le complément d'un arc a est $90^\circ - a$, ou $100^\gamma - a$ ou $\frac{\pi}{2} - a$ et son supplément est $180^\circ - a$ ou $200^\gamma - a$ ou $\pi - a$.

§ Ier. — Fonctions circulaires ou lignes trigonométriques.

431. — La difficulté d'établir les relations qui existent entre les côtés d'un triangle et les arcs qui mesurent ses angles, a conduit les géomètres à remplacer les arcs par des lignes dont la longueur dépend de la grandeur des arcs, de sorte que, les arcs étant donnés, ces droites le sont aussi, et réciproquement. Ces fonctions des arcs (1) sont désignées sous le nom de *fonctions circulaires* ou *rapports trigonométriques*, ou *lignes trigonométriques*. Elles sont au nombre de six : le *sinus*, le *cosinus*, la *tangente*, la *cotangente*, la *sécante* et la *cosécante*. Nous ne nous occuperons que des quatre premières. Il nous suffit de savoir que la *sécante* est l'inverse du *cosinus* et la *cosécante* l'inverse du *sinus*.

(1) On sait que deux quantités sont dites *fonctions* l'une de l'autre, lorsque la variation de l'une entraîne la variation de l'autre.

Décrivons d'abord une circonférence avec un rayon OA et prenons le point A comme origine commune des *angles* ou *arcs* comptés dans le sens positif ABA'B'; enfin menons perpendiculairement les diamètres AA', BB' (fig. 304).

On définit ainsi les fonctions circulaires.

Sinus. — Considérons un arc quelconque AM = a, et du point M abaissons sur le diamètre AA' la perpendiculaire MP. Le sinus de l'arc AM est *le rapport* de la perpendiculaire MP au rayon :

$$\sin a = \frac{MP}{R},$$

ou *la mesure* de la ligne MP, si l'on fait R = 1. *Le sinus est donc un rapport, un nombre abstrait et non véritablement une ligne.* Il en est de même des autres fonctions. Dans ce cas, on peut encore dire que le sinus est l'*ordonnée* du point M, lorsque OA et OB sont pris pour axes de coordonnées.

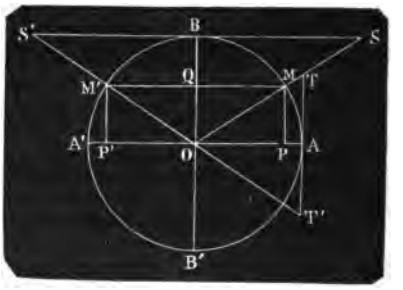


FIG. 304.

Tangente. — Par l'extrémité A de l'arc, menons une tangente et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en T avec le rayon prolongé passant par l'autre extrémité M de l'arc. La tangente de l'arc AM est *le rapport* de la ligne AT au rayon :

$$tg\ a = \frac{AT}{R},$$

ou *la mesure* de la ligne AT, si l'on fait R = 1.

Le point A est l'origine des tangentes.

Cosinus. — Le cosinus est le sinus de l'arc complémentaire; le cosinus de l'arc AM est *le rapport* de la ligne OP = QM au rayon :

$$\cos a = \frac{OP}{R},$$

ou *la mesure* de OP, si l'on fait R = 1. On dit encore que le cosinus est l'*abscisse* du point M.

Cotangente. — La cotangente est la tangente de l'arc complémentaire. La cotangente est *le rapport* de la ligne BS au rayon :

$$cot\ a = \frac{BS}{R},$$

ou *la mesure* de BS, si l'on fait R = 1. Le point B est l'origine des cotangentes.

Signes des lignes trigonométriques.

432. — Un point déterminé étant sur une ligne quelconque, droite ou courbe, on convient, en général, d'affecter du *même signe* toutes les distances comptées dans le *même sens* à partir de ce point, et de *signes contraires* les distances comptées en *sens opposé*.

Les sinus et les tangentes considérées comme ordonnées au-dessus du diamètre AA' sont positifs. Au-dessous de ce même diamètre les sinus et les tangentes sont négatifs. Par conséquent la tangente AT, de l'arc AM est positive et la tangente AT' de l'arc ABM' est négative.

Les sinus MP, M'P' sont l'un et l'autre positifs.

Les cosinus et les cotangentes considérés comme des abscisses sont positifs à droite du diamètre BB' et négatifs à gauche ; par conséquent, le cosinus OP et la cotangente BS de l'arc AM sont positifs, tandis que le cosinus OP' et la cotangente BS' sont négatifs.

Il résulte de ces conventions que :

1° Les arcs moindres qu'un quadrant ou encore les angles compris entre 0° et 90° ont toutes leurs lignes trigonométriques positives.

2° Les arcs ou les angles du 2e quadrant compris entre 90° et 180° ont leur cosinus, leur tangente et leur cotangente négatifs.

Variation des lignes trigonométriques.

433. — Dans les applications exclusives des formules trigonométriques à la résolution des triangles, il ne s'agit que d'arcs moindres qu'une demi-circonférence, puisque les angles d'un triangle sont chacun plus petits que deux angles droits. Il suffit donc de considérer les variations des lignes trigonométriques dans ces limites.

1° L'angle, ou l'arc qui le mesure, *augmente de* 0° à 90°. Lorsque le rayon OM (fig. 305) est couché sur OA, l'arc AM est nul, le sinus est nul, la tangente est nulle, et le cosinus est égal au rayon. Quant à la cotangente, elle est infinie, car elle croît à mesure que OM se rapproche de OA, et elle peut dépasser toute limite.

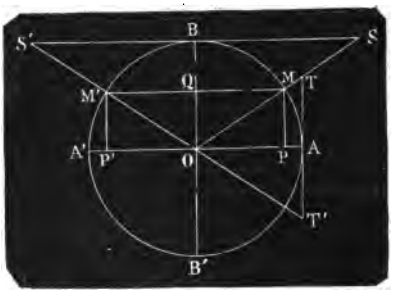


FIG. 305.

Donc pour un arc de 0°, si l'on fait le rayon égal à 1, on a :

$$Sin\ 0° = 0, \qquad tg\ 0° = 0,$$
$$Cos\ 0° = 1, \qquad cot\ 0° = \infty.$$

Si le rayon OM se détache de OA et s'élève vers la position OB, il est facile de voir que le sinus et la tangente augmentent, tandis que le cosinus et la cotangente diminuent. Lorsque le point M est arrivé en B, le sinus est égal à OB, la tangente est infinie, le cosinus OP est nul, la cotangente BS est également nulle.

Donc pour un arc de 90°, on a :

$$Sin\ 90° = 1, \qquad tg\ 90° = \infty,$$
$$Cos\ 90° = 0, \qquad cot\ 90° = 0.$$

Ces dernières valeurs étaient faciles à prévoir, car les arcs 0° et 90° étant complémentaires, on doit avoir :

$$Sin\ 90° = cos\ 0°, \qquad tg\ 90° = cot\ 0°,$$
$$Cos\ 90° = sin\ 0°, \qquad cot\ 90° = tg\ 0°.$$

Il résulte de ce qui précède que pour un arc de 0° à 90°, les lignes trigonométriques varient, pour le sinus, de 0 à 1 ; pour la tangente, de 0 à ∞ ; pour le cosinus, de 1 à 0 et pour la cotangente, de ∞ à 0.

2° *L'angle augmente de* 90° *à* 180°. Lorsque le rayon OM' est couché sur OB, l'arc ABM' est égal à 90°, nous venons de déterminer les lignes trigonométriques de cet arc.

Si le rayon OM' se détache de OB et descend vers la position OA', il est facile de voir que le sinus et la tangente diminuent, tandis que le cosinus et la cotangente augmentent en valeur absolue. Ainsi, le sinus, d'abord égal au rayon lorsque le point M' est au point B, devient nul lorsque le point M' se confond avec A' ; la tangente égale à $+\infty$, lorsque le point M' est au point B, *saute brusquement* à $-\infty$, lorsque le point M' se détache du point B, et diminue

en valeur absolue jusqu'à devenir égale à 0. Il est facile de faire des considérations analogues pour les autres lignes trigonométriques, donc :

$$\sin 180^\circ = 0, \qquad tg\ 180^\circ = 0,$$
$$\cos 180^\circ = -1, \qquad \cot 180^\circ = -\infty.$$

On conclut, de ce qui précède, que pour un arc de 90 à 180°, les lignes trigonométriques varient pour le sinus de 1 à 0, pour la tangente de $-\infty$ à 0 ; pour le cosinus de 0 à -1 et pour la cotangente de 0 à $-\infty$.

Remarque. — Les lignes trigonométriques pouvant devenir infinies ont deux valeurs qu'il faut toujours prendre avec le double signe ±. Ex. $tg\ 90^\circ = \pm\infty$, car elle est à la fois la limite des *tg* positives des angles croissants de 0° à 90° et celle des *tg* négatives des angles décroissants de 180° à 90°.

433 *bis.* **Théorème.** — *Deux arcs supplémentaires ont des sinus égaux et de même signe, mais leurs cosinus, tangentes et cotangentes sont égaux et de signes contraires.*

Donnons la même origine A aux deux arcs, et, pour cela, menons par le point M une parallèle MM′ au diamètre AA′ : les deux arcs AM, A′M′ sont évidemment égaux et, par conséquent, l'arc AM est le supplément de l'arc ABM′, aussi bien que l'arc A′M′. Si l'on désigne l'arc AM par a, l'arc ABM′ sera égal à $\pi - a$. Comparons à présent les lignes trigonométriques de ces arcs. Leurs sinus MP, M′P′ sont évidemment égaux et de mêmes signes ; leurs tangentes AT, AT′ sont égales et de signes contraires ; leurs cosinus OP et OP′, leurs cotangentes BS et BS′ sont égaux et de signes contraires ; ces relations sont exprimées dans les équations ci-dessous :

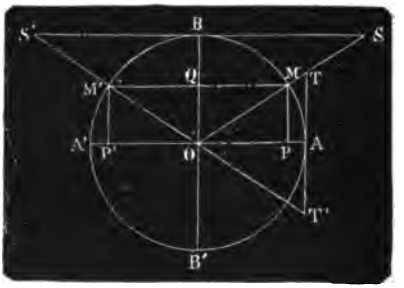


FIG. 306.

$$\sin(\pi - a) = \sin a;\ tg(\pi - a) = -tg\ a;$$
$$\cos(\pi - a) = -\cos a;\ \cot(\pi - a) = -\cot a.$$

§ II. — Relations entre les lignes trigonométriques d'un même angle.

434. — Il existe entre les six lignes trigonométriques d'un même arc cinq relations que nous allons établir.

Soit l'arc AM que nous représenterons par a ; si nous construisons ses lignes trigonométriques, nous aurons :

$$MP = \sin a;\ AT = tg\ a;\ OT = séc\ a;$$
$$OP = \cos a;\ BS = \cot a;\ OS = cosec\ a;$$

Le triangle rectangle OMP donne

$$\overline{MP}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2;$$

ou (rayon = 1)

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1. \tag{1}$$

d'où : $\sin a = \pm\sqrt{1 - \cos^2 a}$ et $\cos a = \pm\sqrt{1 - \sin^2 a}$.

Il est évident que, pour l'arc égal à $\frac{a}{2}$, on aurait encore

$$\sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} = 1.$$

La similitude des triangles OMP, OAT donne

$$\frac{AT}{MP} = \frac{OA}{OP}, \text{ ou } \frac{tg\ a}{\sin a} = \frac{1}{\cos a},$$

d'où

$$tg\ a = \frac{\sin a}{\cos a}. \tag{2}$$

On considère les deux triangles semblables OBS et OMQ, pour la cotangente. Par suite des côtés homologues, on a

$$\frac{BS}{BO} = \frac{MQ}{OQ},$$

d'où l'on tire

$$(3) \qquad cot\ a = \frac{cos\ a}{sin\ a},$$

Les deux autres relations sont :

$$(4) \qquad OT = séc\ a = \frac{1}{cos\ a}$$

et $$(5) \qquad OS = cosec\ a = \frac{1}{sin\ a}.$$

Telles sont les formules qui permettent de calculer les lignes trigonométriques d'un arc donné, lorsqu'on connaît une de ses lignes.

Remarque. — *Le sinus d'un arc est la moitié de la corde de l'arc double.*

Ex. : sinus $AM = MP = \frac{1}{2} MM'$ (fig. 307).

FIG. 307.

Problème I. — *Trouver les lignes trigonométriques d'un arc de 30° et d'un arc de 60°.* L'arc de 60° a pour corde le rayon (399); par conséquent, on a :

$$corde\ 60° = 1 \text{ et } sin\ 30° = \frac{1}{2} = cos\ 60°.$$

Connaissant le sinus de l'arc 30°, il est facile de calculer les autres lignes trigonométriques.

La formule (1) donne

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + cos^2\ 30° = 1;$$

d'où $$cos^2\ 30° = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

par conséquent $$cos\ 30° = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = sin\ 60°.$$

Par suite des valeurs trouvées pour le sinus et le cosinus de 30°, les formules (2), (3) donnent :

$$tg\ 30° = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = cot\ 60°;$$

$$cot\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = tg\ 60°.$$

Problème II. — *Calculer les lignes trigonométriques d'un arc de 45°.* Pour l'arc de 45° le sinus est égal au cosinus.

Un angle de 45° étant lui-même son complément, de la formule (1)

$$sin^2\ 45° + cos^2\ 45° = 1,$$

on tire donc $$2\ sin^2\ 45° = 1,$$

d'où $$sin^2\ 45° = \frac{1}{2},$$

et $$sin\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = cos\ 45°,$$

on aura donc :

$$sin\ 45° = cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};\ tg\ 45° = cot\ 45° = \frac{sin\ 45°}{cos\ 45°} = 1;$$

Expressions du sinus et du cosinus en fonction de la tangente.

435. — Pour trouver les expressions du sinus et du cosinus en fonction de la tangente nous emploierons les formules (1) et (2) :

$$(1)\ \sin^2 a + \cos^2 a = 1\ ;\ tg\ a = \frac{\sin a}{\cos a},\ \text{d'où}\ (2)\ \sin a = tg\ a\ \cos a.$$

Remplaçant dans l'équation (1) $\sin a$ par sa valeur (2), il vient successivement

$$tg^2 a \times \cos^2 a + \cos^2 a = 1$$
$$\cos^2 a\,(1 + tg^2 a) = 1$$
$$\cos^2 a = \frac{1}{1 + tg^2 a},$$

d'où

$$\cos a = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 a}}$$

puisque $\sin a = tg\ a \times \cos a$;

$$\sin a = \pm \frac{tg\ a}{\sqrt{1 + tg^2 a}}.$$

Le choix du signe $\pm$ dépend de la grandeur de l'arc : dans le premier quadrant $\cos a$ est positif, on prendra le signe + ; dans le second quadrant on prendra le signe —. De même pour le sinus ; dans le premier quadrant on prendra le signe + et dans le second quadrant, on prendra le signe —, car $tg\ a$ est alors négatif, et le quotient doit être positif.

§ III. — Relations entre les côtés et les angles d'un triangle.

On désigne toujours les trois angles d'un triangle par A, B, C, et les côtés opposés par a, b, c.

Relations entre les côtés et les angles d'un triangle rectangle.

436. Théorème. — *Chaque côté de l'angle droit est égal à l'hypoténuse multipliée par le sinus de l'angle opposé, ou par le cosinus de l'angle adjacent*

$$b = a\ \sin B = a\ \cos C\ ;\ c = a\ \sin C = a\ \cos B.$$

Soit le triangle rectangle ABC.

Du sommet B, comme centre, avec l'unité linéaire pour rayon, décrivons un arc de cercle ME, compris entre les côtés de l'angle B, et menons la perpendiculaire MP ; MP = $\sin B$.

La similitude des triangles BCA, BMP donne

$$\frac{CA}{MP} = \frac{BC}{BM},\ \text{ou}\ \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{1},$$

d'où

$$b = a\ \sin B.$$

Les angles B et C étant complémentaires, $\sin B = \cos C$, on a donc :

$$b = a\ \sin B = a\ \cos C$$

et de même

$$c = a\ \sin C = a\ \cos B.$$

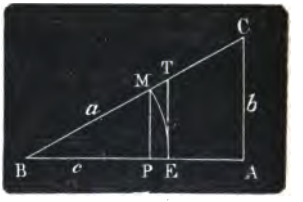


FIG. 308.

Théorème. — *Chaque côté de l'angle droit est égal à l'autre côté multiplié par la tangente de l'angle opposé, ou par la cotangente de l'angle adjacent.*

$$b = c\ tg\ B = c\ cot\ C\ ;\ c = b\ tg\ C = b\ cot\ B.$$

Soit le triangle BAC (fig. 308). Menons la tangente ET de l'angle B. La similitude des triangles BAC et BET donne :

$$\frac{AC}{ET} = \frac{BA}{BE},\ \text{ou}\ \frac{b}{tg\ B} = \frac{c}{1},$$

d'où

$$b = c\ tg\ B.$$

Les angles B et C étant complémentaires, $tg\ B = cot\ C$, on a donc :

$$b = c\ tg\ B = c\ cot\ C,\ \text{et de même}\ c = b\ tg\ C = b\ cot\ B.$$

Relations entre les côtés et les angles d'un triangle quelconque.

437. Théorème. — *Dans tout triangle rectiligne les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés.*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Soit le triangle ABC. Abaissons la perpendiculaire BD : le triangle ABD donne (436) $BD = c \sin A$, et le triangle BDC, $BD = a \sin C$. De ces deux valeurs de BD on déduit l'égalité $c \sin A = a \sin C$,

d'où $$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

Si l'on mène une perpendiculaire AD′ par un autre sommet A, on trouve de même :

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B};$$

donc enfin $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Remarque. — Si le triangle a un angle obtus, on trouve la même relation, car on a :

$BD = c \sin BAD$,
$BD = a \sin C$.

FIG. 309.

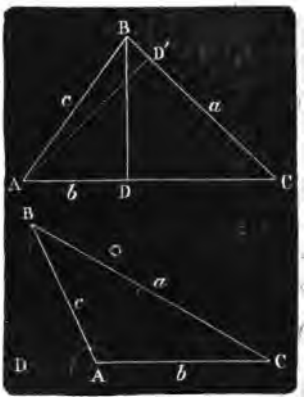


FIG. 309 *bis*.

Or, les deux angles BAD et BAC, étant supplémentaires, ont le même sinus et l'on peut dans l'égalité $BD = c \sin BAD$ remplacer *sin* BAD par *sin* BAC. Le théorème est donc vrai dans tous les cas.

438. Théorème. — *Dans tout triangle rectiligne, le carré de l'un des côtés est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins deux fois le produit de ces deux derniers par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A.$$

Soit le triangle ABC (fig. 309). Supposons l'angle A aigu et BD perpendiculaire sur AC. La géométrie donne (n° 340) :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b \times AD.$$

Or (436), $AD = c \cos A$. Remplaçant AD par sa valeur, il vient :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A.$$

Le théorème est encore vrai lorsque l'angle A est obtus (fig. 309 *bis*). Dans ce cas, la géométrie donne (340) $a^2 = b^2 + c^2 + 2b \times AD$.

Or, $AD = c \cos DAB$, mais $\cos DAB = -\cos A$, puisque les angles DAB et A sont supplémentaires; on a par conséquent $AD = c \times -\cos A = -c \cos A$. Remplaçant AD par cette valeur on obtient

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A.$$

Si l'on considère les trois angles du triangle, on trouvera les relations suivantes :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c \cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos C.$$

Ces formules permettent de calculer les trois angles A, B, C, d'un triangle dont on connaît les trois côtés a, b, c.

EXERCICES SUR LE LIVRE III

207. — Trouver une 4e proportionnelle à trois lignes qui ont 25m, 32m, 48m.

208. — Trouver une moyenne proportionnelle à deux lignes qui ont 28m et 45m.

209. — On demande une 3e proportionnelle à deux lignes qui ont 36m et 24m.

210. — Dans un triangle ABC, on a AB = 20m, AC = 22m, BC = 30m ; quels sont les deux segments déterminés sur BC par la bissectrice AD?

211. — Toute transversale DEF détermine sur les côtés d'un triangle ABC six segments tels que le produit de trois segments non consécutifs est égal au produit des trois autres.

212. — Trois points D, E, F, sont en ligne droite lorsqu'ils déterminent sur les côtés d'un triangle ABC six segments tels que le produit de trois segments non consécutifs soit égal au produit des trois autres.

213. — On joint les trois sommets A, B, C d'un triangle à un point quelconque O, et on prolonge AO, BO, CO jusqu'à la rencontre des côtés opposés. Le produit de trois segments non consécutifs est égal au produit des trois autres.

214. — Les trois côtés d'un triangle sont 120^m, 80^m, 75^m : quels seront les trois côtés d'un triangle semblable dont le côté homologue à 120^m doit avoir 90^m ?

215. — Deux obliques partant d'un même point B rencontrent deux parallèles, la 1re coupe les parallèles en D et en A, et la 2e en E et en C, de manière que $DA = 4^m$, $DE = 12^m$, $AC = 18^m$, $BC = 16^m$: on demande la valeur de BD, BE, CE.

216. — On donne les bases B et b d'un trapèze et sa hauteur h : on demande de déterminer la hauteur du triangle formé par les prolongements des côtés non parallèles du trapèze.

217. — Dans le problème précédent, calculer x pour le cas où l'on a $B = 25^m$, $b = 18^m$ et $h = 12^m20$.

218. — Des extrémités d'une droite AB partent en sens opposés deux droites parallèles AM, BN; si l'on joint par une autre droite les points M et N, la droite AB se trouvera partagée en deux segments proportionnels aux lignes AM, BN.

219. — Partager une droite AB en parties réciproquement proportionnelles à deux droites M, N, parallèles placées aux points A, B, et dirigées dans le même sens.

220. — Des droites issues du même point A déterminent sur deux droites parallèles des segments proportionnels.

221. — Inscrire dans une circonférence un triangle semblable à un triangle donné.

222. — Lorsque deux droites AB, CD, prolongées s'il est nécessaire, se coupent en un point E de manière à avoir $EA \times EB = ED \times EC$, les quatre points A, B, C, D sont situés sur la même circonférence.

223. — Dans un triangle quelconque, le produit de deux côtés est égal au produit du diamètre du cercle circonscrit par la hauteur abaissée sur le troisième.

224. — La droite qui joint les milieux des diagonales d'un trapèze est égale à la demi-différence des bases.

225. — Inscrire un carré dans un triangle donné.

226. — Le périmètre d'un triangle ABC multiplié par le rayon de la circonférence inscrite est égal au produit d'un côté quelconque par la hauteur correspondante.

227. — Dans tout quadrilatère inscrit, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.

228. — Si l'on joint un point O à tous les sommets d'un polygone ABCDE et que l'on prenne sur les droites OA, OB, OC,... des grandeurs OA', OB', OC'... de telle sorte que

$$\frac{OA'}{AO} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD} = \frac{OE'}{OE},$$

le polygone A'B'C'D'E' est semblable au polygone ABCDE.

229. — Un polygone a un périmètre de 280^m et un côté qui a 15^m; un polygone semblable a un périmètre de 160^m : on demande la longueur du côté homologue au côté de 15^m.

230. — Connaissant a et b trouver une droite x telle qu'on ait $x^2 = a^2 + b^2$.

231. — Les droites a et b étant données, trouver une autre droite x telle que $x^2 = a^2 - b^2$.

232. — Des perpendiculaires à une droite donnée AB sont telles que le carré de la longueur de chacune est égal au produit des segments qu'elle détermine sur la droite donnée : trouver le lieu des extrémités de ces perpendiculaires.

233. — On donne une ligne droite de 8^m, sur le milieu de cette ligne on élève une perpendiculaire de 2^m20 : on demande de calculer la longueur de la circonférence passant par les trois extrémités.

234. — Les carrés de deux cordes AM, AN, issues du même point A de la circonférence sont entre eux dans le même rapport que les projections de ces cordes sur le diamètre AB.

235. — Dans un cercle ayant 1^m20 de rayon, on mène une corde ayant 1^m : on demande sa distance au centre.

236. — On donne un cercle dont le rayon a 8^m, on y inscrit une corde ayant 3^m. On demande de calculer les deux segments déterminés par cette corde sur le diamètre qui lui est perpendiculaire.

237. — Connaissant les rayons AO, ao de deux cercles et la distance Oo de leurs centres, savoir $AO = 8^m$, $ao = 3^m$, $Oo = 15^m$, trouver la longueur Aa de la tangente commune menée extérieurement à ces cercles.

238. — Les rayons de deux cercles concentriques sont R et r; dans le cercle R on mène une corde tangente au cercle r : calculer la longueur de cette corde.

239. — Dans un triangle rectangle ABC un côté AB de l'angle droit a 15^m, l'hypoténuse BC a 25^m : on demande la longueur de la perpendiculaire AD abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse.

240. — Dans un triangle rectangle, un côté de l'angle droit a 3^m, le segment adjacent à ce côté, déterminé sur l'hypoténuse par la perpendiculaire qui part du sommet de l'angle droit, a 1^m80 : on demande les deux côtés inconnus.

241. — Trouver un triangle rectangle dont les trois côtés soient trois nombres entiers consécutifs.

242. — Dans un triangle rectangle les deux côtés de l'angle droit diffèrent de 7^m, l'hypoténuse a 13^m : on demande les deux côtés de l'angle droit.

243. — Dans un triangle rectangle, l'hypothénuse surpasse les côtés de l'angle droit de 1 et de 8 : quels sont les trois côtés du triangle ?

244. — L'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à 55^m, la somme des deux côtés de l'angle droit est 77^m : on demande les deux côtés.

245. — La somme des trois côtés d'un triangle rectangle est égale à 60^m, la différence entre les deux côtés de l'angle droit est 5^m : on demande les trois côtés du triangle rectangle.

246. — Trouver les trois côtés d'un triangle rectangle dont la somme des côtés égale 30^m, et la somme de leurs carrés 338^m.

247. — Dans un triangle ABC, on a $AB = 10^m$, $AC = 14^m$, $BC = 20^m$: calculer la longueur des segments du côté BC déterminés par la perpendiculaire partant du point A.

248. — Trouver les hauteurs h, h', h'', d'un triangle dont on connaît les trois côtés.

249. — Trouver le rayon du cercle circonscrit à un triangle dont on connaît les trois côtés.

250. — Trouver le rayon r du cercle inscrit en fonction des côtés a, b, c, du triangle.

251. — Dans les problèmes précédents calculer h, h', h'', R et r pour le cas où l'on a : $a = 8^m$, $b = 9^m$ et $c = 12^m$.

252. — La somme des carrés des segments formés par deux cordes qui se coupent rectangulairement est égale au carré du diamètre.

253. — Les trois côtés d'un triangle sont 8^m, 9^m, 15^m : de quelle espèce est le plus grand angle de ce triangle ?

254. — Les rayons de deux cercles sont 7^m et 8^m, la distance de leurs centres est de 12^m : on demande la longueur de la corde commune.

255. — Lorsqu'on mène la médiane AM dans un triangle ABC, on a

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = 2\overline{AM}^2 + \frac{\overline{BC}^2}{2}.$$

253. — Un triangle ABC dont les côtés sont a, b, c, et les médianes m, m' m'' (m est issue du sommet A, m' du sommet B et m'' du sommet C) donne .

$$m = \sqrt{\frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4}},\quad m' = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{b^2}{4}},$$

$$m'' = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}.$$

257. — Les côtés a, b, c, d'un triangle sont 10^m, 8^m et 9^m . calculer les trois médianes.

258. — La somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des diagonales.

259. — La somme des carrés des côtés d'un quadrilatère quelconque est égale à la somme des carrés des diagonales augmentée de quatre fois le carré de la droite qui joint les milieux des diagonales.

260. — La somme des carrés des diagonales d'un trapèze est égale à la somme des carrés des côtés non parallèles plus deux fois le produit des côtés parallèles.

261. — La somme des carrés des côtés d'un triangle est triple de la somme des carrés des lignes qui joignent ses sommets au point de concours des médianes.

262. — La somme des carrés des diagonales d'un quadrilatère est double de la somme des carrés des lignes qui joignent les milieux des côtés opposés.

263. — Deux sécantes à un cercle partent d'un même point, l'une a une longueur de 3^m, et son segment extérieur a 2^m ; l'autre a 5^m de longueur : on demande de déterminer son segment extérieur.

264. — Trouver deux droites qui se coupent de manière que le produit des deux segments de l'une soit égal au produit des deux segments de l'autre.

265. — Le produit de deux côtés AB, BC d'un triangle ABC est égal au carré de la bissectrice BD de l'angle B plus le produit des deux segments déterminés sur AC par la bissectrice.

266. — Dans un triangle ABC, on a $AB = 20^m$, $AC = 22^m$, $BC = 30^m$: quelle est la longueur de la bissectrice AD ?

267. — Dans un cercle qui a 2^m de rayon, une sécante passe par le centre, la partie extérieure de cette sécante a 5^m : on demande la longueur de la tangente qui se terminerait à l'extrémité de cette sécante.

268. — On donne un cercle de 2^m20 de rayon, on demande de déterminer sur la tangente au point A un point D, tel que si par ce point on mène une sécante passant par le centre, la partie extérieure de la sécante soit égale au diamètre du cercle.

269. — On donne une circonférence de rayon R, on mène un diamètre que l'on prolonge d'une quantité égale à $\frac{1}{5}$ R; par l'extrémité de cette droite on mène une tangente : on demande sa valeur en fonction de R dans le cas où $R = 2^m$.

270. — Étant donné un cercle, on mène un diamètre AB et la tangente au cercle au point B. Du point A avec un rayon égal au double de AB on décrit un arc qui coupe la tangente en C, on tire AC, cette ligne coupe le cercle en D : on demande la longueur du segment AD.

271 — On sait que la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante et sa partie extérieure : démontrer, d'après ce théorème, que d'un même point extérieur à un cercle on peut mener deux tangentes à ce cercle, et que les tangentes partant d'un même point sont égales.

272. — Construire une droite x telle qu'on ait $x = a \pm b$.

273. — Construire une droite dont on connaît les $\frac{4}{5}$.

274. — Construire une droite qui soit à une droite donnée dans le rapport de $\frac{2}{3}$ à $\frac{3}{4}$.

275. — Construire deux droites x, y dont on connaît la somme et la différence.

276. — Construire une droite x telle qu'on ait $x = \frac{l^2}{m}$ (l, m lignes données).

277 — Construire deux droites x, y connaissant leur rapport et leur somme.

278. — Construire deux droites x, y connaissant leur rapport et leur différence.

279. — Par un point P intérieur à un angle A, mener une droite inscrite MPN de manière que PN = $\frac{1}{3}$ PM, ou $\frac{PN}{MP} = \frac{2}{3}$.

280. — Par un point P extérieur à un angle, mener une droite PNM qui rencontre les côtés en N et en M de manière à avoir $\frac{PN}{PM} = \frac{2}{5}$.

281. — Par un point P mener une droite qui passe par le point de concours de deux droites concourantes qu'on ne peut prolonger.

282. — Décrire une circonférence passant par deux points donnés A et B et telle qu'une tangente menée par un troisième point donné C ait une longueur l.

283. — Un polygone étant donné, son périmètre P, ainsi que a un de ses côtés, construire un second polygone, semblable au premier, connaissant P' son périmètre.

284. — Par l'un des points d'intersection de deux circonférences, mener une sécante telle que les deux cordes résultantes soient entre elles dans un rapport donné.

285. — Construire un triangle connaissant deux côtés et la bissectrice de leur angle.

286. — Construire un triangle connaissant un côté, la bissectrice de l'angle opposé et le rapport des deux autres côtés.

287. — Construire une droite x telle qu'on ait $x^2 = m(m + n)$ (m et n sont des lignes données).

288. — Une droite m étant donnée, trouver une autre droite x telle que $x^2 = \frac{1}{4} m^2$.

289. — Construire une droite x telle qu'on ait $\frac{1}{4} x^2 = l^2$ (l est une ligne donnée).

290. — On donne l, m, n : trouver une autre droite x telle qu'on ait $\frac{x^2}{l^2} = \frac{m}{n}$.

291. — Construire une droite x telle qu'on ait $x^2 = \frac{l^2 m}{m+n}$ (l, m, n lignes données).

292. — Mener par un point P, intérieur à un cercle, une corde qui soit divisée à ce point dans un rapport donné $\frac{3}{5}$.

293. — Mener par un point A extérieur à un cercle une sécante de manière que la partie extérieure soit $\frac{4}{9}$ de la sécante totale.

294. — Décrire une circonférence passant par deux points donnés et tangente à une droite donnée.

295. — Décrire une circonférence passant par un point donné et tangente à deux droites données.

296. — Construire un losange dont le côté ait une longueur donnée et soit moyenne proportionnelle entre les deux diagonales.

297. — Diviser une droite a en moyenne et extrême raison et trouver les rapports de la droite aux deux segments.

298. — Diviser une ligne de 60^m en moyenne et extrême raison.

299. — Les segments de deux droites divisées en moyenne et extrême raison sont proportionnels.

300. — Connaissant AB, grand segment d'une droite divisée en moyenne et extrême raison, retrouver la droite.

301. — Inscrire dans un angle A une droite MPN telle qu'elle soit divisée au point P en moyenne et extrême raison.

302. — Par un point P extérieur à un angle, mener une droite PNM qui rencontre les côtés en N et en M, de manière que la ligne PNM soit divisée en moyenne et extrême raison au point N.

303. — Par un point P intérieur à un cercle, mener une corde qui soit divisée à ce point en moyenne et extrême raison.

304. — Par un point A extérieur à un cercle, mener une sécante qui soit divisée par la circonférence en moyenne et extrême raison.

305. — Les diagonales d'un pentagone régulier se coupent mutuellement en moyenne et extrême raison.

306. — Une diagonale d'un pentagone régulier inscrit a 4^m : calculer le côté du pentagone.

307. — Les tangentes extérieures communes à deux cercles rencontrent la ligne des centres en un même point O, et les tangentes intérieures la rencontrent aussi en un même point o.

308. — Dans deux cercles, les sécantes qui joignent les extrémités des rayons parallèles concourent en un même point O situé sur la ligne des centres.

309. — Prouver que dans un triangle équilatéral inscrit, le rayon est double de l'apothème.

310. — Un polygone régulier étant inscrit dans une circonférence, circonscrire un polygone régulier semblable.

311. — Le périmètre d'un triangle équilatéral circonscrit est double de celui du triangle équilatéral inscrit.

312. — Une circonférence est comprise entre les périmètres du carré circonscrit et de l'hexagone inscrit : démontrer d'après cette considération que le rapport de la circonférence au diamètre est compris entre 4 et 3.

313. — Calculer le côté et l'apothème du décagone régulier inscrit dans un cercle de rayon donné.

314. — Trouver le périmètre du décagone inscrit dans un cercle de 4^m de rayon.

315. — Le carré du côté d'un pentagone régulier inscrit est égal à la somme des carrés du rayon et du côté du décagone.

316. — Quel est le périmètre d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de 2^m de rayon?

317. — Les circonférences C et C′ étant données, construire une circonférence égale à $C + C'$.

318. — Les circonférences C et C′, étant données, trouver une circonférence égale à $C - C'$.

319. — Les circonférences C, C′ et C″ étant données, construire une circonférence égale à $\frac{1}{2} C + \frac{1}{4} C' - \frac{1}{8} C''$.

320. — On a une circonférence O, sur le rayon OA comme diamètre on décrit une autre circonférence et on mène un rayon quelconque OB qui coupe la petite circonférence en C. On demande de démontrer que les arcs AB et AC sont égaux.

321. — Calculer le côté et l'apothème de l'octogone régulier inscrit dans un cercle de rayon donné.

322. — Dans une circonférence, 5 degrés répondent à une longueur de 0^m20 : quelle est la longueur du rayon qui a servi à construire cette circonférence?

323. — Combien vaut en mètres une seconde du méridien?

324. — Quelle est en kilomètres la distance moyenne d'un point d'un méridien au centre de la terre?

325. — Deux arcs ont même longueur, l'un qui a $20°30'$ a été décrit avec un rayon de 0^m60, l'autre a $12°40'$: on demande la longueur du rayon qui a servi à le décrire.

LIVRE IV

MESURE DES AIRES

CHAPITRE PREMIER

Aires des polygones.

Définitions.

438. — On appelle *aire* ou *surface* d'une figure plane la partie du plan limitée par le périmètre de cette figure.

439. — Mesurer une surface, c'est chercher combien elle contient une surface connue prise pour unité.

Le *mètre carré*, ou carré d'un mètre de côté, est l'unité de surface.

Mesurer une surface, c'est donc chercher combien elle contient de mètres carrés et de parties du mètre carré.

440. — Il est utile de rappeler ici quelques définitions.

La *hauteur* d'un parallélogramme ABCD (*fig.* 311) est la perpendiculaire EF, qui mesure la distance des deux côtés BC, AD, pris pour *bases*.

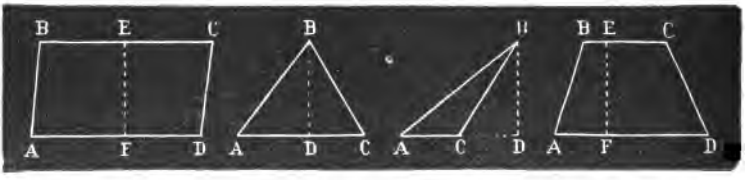


FIG. 311. FIG. 312. FIG. 313. FIG. 314.

La *hauteur* d'un triangle ABC (*fig.* 312 et *fig.* 313) est la perpendiculaire BD abaissée de l'un de ses sommets sur le côté opposé AC,

qui prend le nom de *base*. On voit que la hauteur ne tombe pas toujours dans l'intérieur des figures (*fig.* 313).

La *hauteur* d'un trapèze ABCD (*fig.* 314) est la perpendiculaire EF, qui mesure la distance des deux *bases* ou côtés parallèles BC, AD.

THÉORÈME

441. — *Deux rectangles de même base et de même hauteur sont égaux.*

En effet, ils ont tous leurs angles et tous leurs côtés égaux chacun à chacun : donc ils sont superposables.

THÉORÈME

442. — *Deux rectangles de même base sont dans le rapport des hauteurs.*

Soient R et R′ les deux rectangles ABCD, A′B′C′D′ ayant des bases AB et A′B′ égales et dont les hauteurs sont AD et A′D′. Il faut démontrer que

$$\frac{R}{R'} = \frac{AD}{A'D'}.$$

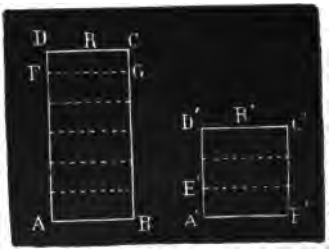


FIG. 315.

1° Supposons que les hauteurs aient une commune mesure AE, contenue, par exemple, 5 fois dans AD et 3 fois dans A′D′, nous aurons

$$\frac{AD}{A'D'} = \frac{5}{3}.$$

Si par les points de division des hauteurs, AD, A′D′, nous menons des parallèles aux bases, nous décomposerons les rectangles R et R′ en petits rectangles tous égaux entre eux comme ayant même base et même hauteur. Or, le rectangle R contient 5 de ces rectangles et R′ en contient 3, nous aurons donc

$$\frac{R}{R'} = \frac{5}{3},$$

ou, à cause du rapport commun

$$\frac{R}{R'} = \frac{AD}{A'D'}.$$

2° Supposons les hauteurs AD et A′D′ *incommensurables*. On peut faire un raisonnement analogue à celui du n° 221, 2°, ou dire : la hau-

teur A'D' contient, par exemple, n parties égales à A'E', et la hauteur AD contient m de ces parties avec un reste DF moindre que A'E'. Par suite, le rapport $\frac{AD}{A'D'}$ sera supérieur à $\frac{m}{n}$ et inférieur à $\frac{m+1}{n}$. Nous pourrons alors écrire :

$$(1) \qquad \frac{m}{n} < \frac{AD}{A'D'} < \frac{m+1}{n}.$$

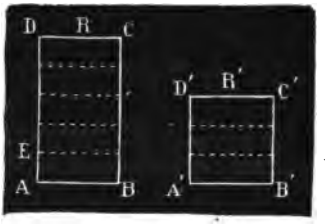


FIG. 316.

Si par les points de division des hauteurs, AD, A'D', nous menons des parallèles aux bases, nous décomposerons le rectangle R' en n petits rectangles égaux et le rectangle R en m rectangles égaux aux précédents, plus un rectangle FGCD moindre que chacun des autres, par suite le rapport $\frac{R}{R'}$ sera supérieur à $\frac{m}{n}$ et inférieur à $\frac{m+1}{n}$. Nous pourrons donc écrire :

$$(2) \qquad \frac{m}{n} < \frac{R}{R'} < \frac{m+1}{n}.$$

Les inégalités (1) et (2) montrent que les rapports $\frac{R}{R'}$ et $\frac{AD}{A'D'}$ sont compris entre deux limites $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$, dont la différence $\frac{1}{n}$ peut approcher de zéro autant que l'on veut, si l'on prend n suffisamment grand. Or, la différence entre les rapports $\frac{R}{R'}$ et $\frac{AD}{A'D'}$ étant moindre que $\frac{1}{n}$ sera *a fortiori* aussi proche de zéro que l'on voudra. De là, on peut conclure rigoureusement que ces rapports sont égaux et que, dans tous les cas, on a.

$$\frac{R}{R'} = \frac{AD}{A'D'}.$$

443. Corollaire. — *Deux rectangles de même hauteur sont dans le rapport des bases;* car on peut prendre pour base d'un rectangle l'un quelconque de ses côtés.

THÉORÈME

444. — *Deux rectangles quelconques sont dans le rapport des produits de leurs dimensions respectives.*

Soient R et R′ deux rectangles quelconques. Appelons b et b' leurs bases, h et h' leurs hauteurs. Il faut démontrer que :

$$\frac{R}{R'} = \frac{b \times h}{b' \times h'}$$

Pour cela, comparons les rectangles proposés à un rectangle auxiliaire R″ ayant pour dimensions h et b. D'après le théorème précédent, nous aurons :

$$\frac{R}{R''} = \frac{b}{b'} \text{ et } \frac{R''}{R'} = \frac{h}{h'}.$$

Multipliant ces égalités membre à membre, et supprimant le facteur R″ dans le premier membre, il vient :

$$\frac{R}{R'} = \frac{b \times h}{b' \times h'}. \qquad \text{C. q. f. d.}$$

THÉORÈME

445. — *L'aire d'un rectangle a pour mesure le produit des nombres qui mesurent ses deux dimensions, si l'on prend pour unité d'aire le carré qui a pour côté l'unité de longueur.*

Soit, en effet, le rectangle R dont la base est b et la hauteur h.

Prenons pour *unité d'aire* le carré C ayant pour côté l'*unité de longueur* qui sert à mesurer la base et la hauteur du rectangle R. Nous aurons, d'après le théorème précédent,

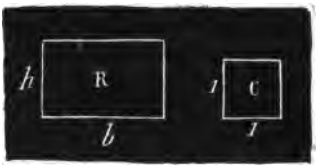


FIG. 317.

$$\frac{R}{C} = \frac{b \times h}{1 \times 1} = \frac{b}{1} \times \frac{h}{1}.$$

Or, le carré C étant l'unité d'aire, le rapport $\frac{R}{C}$ exprime la mesure du rectangle (*Arithm.* nos 4 et 5); de même, $\frac{b}{1}$ et $\frac{h}{1}$ représentent les mesures de la base et de la hauteur du rectangle. Donc, l'aire d'un rectangle est égale au produit des nombres qui expriment les mesures de sa base et de sa hauteur, ou, plus simplement, égale au produit de sa base par sa hauteur, ou encore égale au produit de ses deux dimensions.

En désignant par S l'aire d'un rectangle quelconque, par b et h sa base et sa hauteur, on a la formule

$$S = b \times h.$$

446. Corollaire. — *L'aire du carré égale le produit d'un*

côté par lui-même, ou égale le carré de son côté; car un carré est un rectangle dont les côtés sont égaux. Ainsi l'aire du carré dont le côté est a, égale $a \times a$ ou a^2.

L'expression : *carré d'un nombre*, au lieu de *seconde puissance d'un nombre*, est venue de là.

THÉORÈME

447. — *L'aire d'un parallélogramme égale le produit de sa base par sa hauteur.*

Pour le démontrer, il suffit de prouver que le parallélogramme et le rectangle de même base et de même hauteur sont équivalents.

Soient donc le parallélogramme ABCD et le rectangle AEFB de même base AB et de même hauteur AE : ces deux figures sont équivalentes; car les triangles rectangles ADE, BCF sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal.

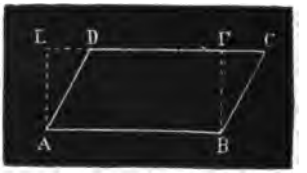


FIG. 318.

Donc, le rectangle et le parallélogramme auront même mesure; mais l'aire du rectangle AEFB est égale à AB × AE, donc l'aire du parallélogramme est aussi AB × AE, c'est-à-dire le produit de sa base par sa hauteur.

En désignant par S l'aire du parallélogramme, par b et h sa base et sa hauteur, on a la formule

$$S = b \times h.$$

448. Corollaire I. — *Deux parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équivalents.*

449. Corollaire II. — *Deux parallélogrammes de même base sont dans le rapport de leurs hauteurs. — Deux parallélogrammes de même hauteur sont dans le rapport de leurs bases.*

THÉORÈME

450. — *L'aire d'un triangle égale la moitié du produit de sa base par sa hauteur.*

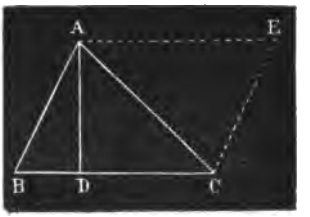


FIG. 319.

Pour le démontrer, il suffit de prouver que le triangle donné ABC est la moitié du parallélogramme ABCE de même base BC et de même hauteur AD. Or, la diagonale AC partage le parallélogram

ABCE en deux triangles égaux : donc le triangle ABC vaut la moitié du parallélogramme ABCE; mais l'aire de ce parallélogramme est $BC \times AD$, donc celle du triangle ABC est $\frac{BC \times AD}{2}$, c'est-à-dire la moitié du produit de sa base par sa hauteur.

En désignant par S l'aire d'un triangle, par b et h sa base et sa hauteur, on a la formule

$$S = \frac{b \times h}{2}.$$

451. Corollaire I. — *Deux triangles sont dans le rapport des produits de leurs dimensions.*

En effet, pour deux triangles dont les surfaces sont S, S' et les dimensions respectives b, h et b', h', on a :

$$S = \frac{b \times h}{2}$$

$$S' = \frac{b' \times h'}{2},$$

d'où, en divisant membre à membre,

$$\frac{S}{S'} = \frac{b \times h}{b' \times h'}.$$

452. Corollaire II. — *Deux triangles de même base sont dans le rapport de leurs hauteurs. — Deux triangles de même hauteur sont dans le rapport de leurs bases.*

453. Corollaire III. — *Le lieu des sommets de triangles équivalents ayant même base est une parallèle à cette base;* car ces triangles de sommets différents auront tous même base et des hauteurs égales.

454. Autres formules relatives à l'aire du triangle. — 1° *Trouver l'aire du triangle en fonction de ses côtés.*

Soient a, b, c ses côtés, h sa hauteur relative au côté a et S sa surface. On a :

$$S = \frac{a}{2} \cdot h$$

Si, dans cette expression, on remplace h par sa valeur trouvée au n° 343, il vient :

$$S = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

d'où

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Dans le cas du triangle équilatéral :

$$a = b = c \text{ et } 2p = 3a, \text{ d'où } p = \frac{3a}{2};$$

par suite

$$p - a = p - b = p - c = \frac{3a}{2} - a = \frac{a}{2}$$

donc

$$S = \sqrt{\frac{3a}{2} \times \left(\frac{a}{2}\right)^3} = \sqrt{\frac{3a^4}{16}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

2° *Trouver l'aire du triangle en fonction de ses côtés et du rayon du cercle circonscrit.*

Soient a, b, c les côtés d'un triangle, h sa hauteur relative au côté a, R le rayon du cercle circonscrit et S sa surface. On a vu (362) que :

$$bc = 2Rh. \tag{1}$$

Si l'on multiplie les deux membres par a, afin d'introduire l'aire du triangle dans le second membre, on a :

$$abc = 2Rah$$

Remplaçant ah, ou le double de la surface, par 2S, il vient :

$$abc = 4RS,$$

d'où

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

Si le triangle est équilatéral, on a, dans ce cas, $b = c = a$ et par suite,

$$S = \frac{a^3}{4R}.$$

3° *Trouver l'aire du triangle en fonction de ses côtés et de l'un des rayons des cercles inscrits ou ex-inscrits.*

Soit le triangle ABC. Si l'on joint le centre O du cercle inscrit aux trois sommets du triangle ABC, on le décompose en trois triangles OAB, OAC, OBC ayant pour hauteur le rayon r du cercle inscrit et pour bases respectives les trois côtés a, b, c. On a donc pour l'aire S :

$$S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r;$$

mais

$$a + b + c = 2p,$$

donc :

$$S = \frac{2p}{2} \cdot r = pr. \tag{1}$$

En joignant les mêmes sommets du triangle ABC au centre O_1 d'un des cercles ex-inscrits, on forme trois triangles O_1AB, O_1AC, O_1BC ayant pour hauteur le rayon r_1 du cercle ex-inscrit et pour bases respectives les mêmes côtés a, b, c. Or, l'aire du triangle ABC est équivalente à la somme de ces deux premiers triangles diminuée du troisième, de sorte qu'on a :

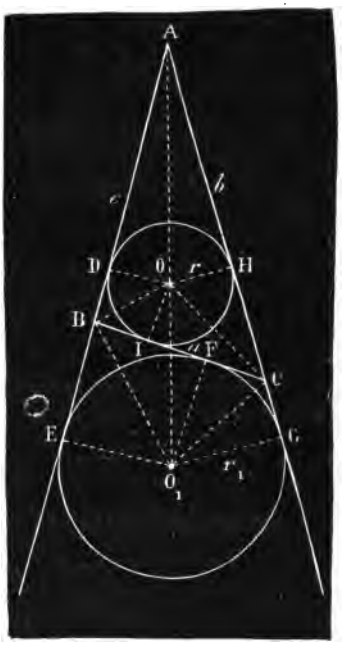


FIG. 320.

$$S=\frac{br_1}{2}+\frac{cr_1}{2}-\frac{ar_1}{2}=\frac{b+c-a}{2}\cdot r_1;$$

mais

$$b+c-a=2p-2a=2(p-a),$$

d'où

$$S=\frac{2(p-a)}{2}\cdot r_1=(p-a)r_1. \quad (2)$$

Si l'on représente par r_2, r_3 les rayons des deux autres cercles ex-inscrits, on trouve de même :

$$S=(p-b)r_2 \text{ et } S=(p-c)r_3.$$

On a donc :

$$S=pr=(p-a)r_1=(p-b)r_2=(p-c)r_3.$$

4° *Trouver l'aire du triangle en fonction des rayons des quatre cercles inscrits et ex-inscrits.*

Les quatre égalités trouvées plus haut, 3°, donnent

$$r=\frac{S}{p},\ r_1=\frac{S}{p-a},\ r_2=\frac{S}{p-b},\ r_3=\frac{S}{p-c},$$

d'où

$$rr_1r_2r_3=\frac{S^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{S^4}{S^2}=S^2.$$

Donc

$$S=\sqrt{rr_1r_2r_3}.$$

THÉORÈME

455. — *Les aires de deux triangles qui ont un angle égal ou supplémentaire, sont dans le rapport des produits des côtés qui comprennent cet angle.*

1° Soient les deux triangles ABC et A′B′C′ dans lesquels on a l'angle A = l'angle A′. Il faut prouver que :

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AB \times AC}{A'B' \times A'C'}$$

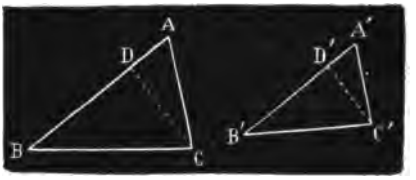


FIG. 321.

En effet, si l'on mène les hauteurs CD et C′D′ dans les deux triangles, on a :

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AB \times \frac{CD}{2}}{A'B' \times \frac{C'D'}{2}} = \frac{AB \times CD}{A'B' \times C'D'} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{CD}{C'D'}.$$

Mais les triangles rectangles ACD, A′C′D′ ayant un angle égal sont semblables; par suite,

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'}.$$

Remplaçant dans l'égalité précédente $\frac{CD}{C'D'}$ par sa valeur, il vient :

$$\frac{ABC}{A'B'C} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB \times AC}{A'B' \times A'C'}.$$

2° Si l'on suppose que dans les triangles ABC, A′B′C′ les angles A et A′ sont supplémentaires, on a encore :

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AB \times AC}{A'B' \times A'C'}.$$

En effet, si, comme plus haut, on mène les hauteurs CD, C′D′, on a :

$$\frac{ABC}{A'B'C} = \frac{AB \times CD}{A'B' \times C'D'}.$$

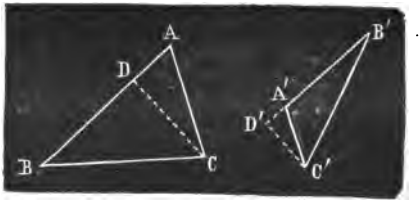


FIG. 322.

Mais les triangles rectangles ADC, A′D′C′ ayant un angle aigu égal, A = C′A′D′, sont semblables et donnent :

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{DC}{D'C'}.$$

Remplaçant dans l'égalité précédente $\frac{DC}{D'C'}$ par sa valeur, on a enfin :

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AB \times AC}{A'B' \times A'C'}.$$

THÉORÈME

456. — *L'aire d'un losange égale la moitié du produit de ses deux diagonales.*

En effet,

$$\text{losange ABCD} = 2\,\text{ABC} = 2\,\text{AC} \times \frac{\text{BO}}{2} = \text{AC} \times \text{BO} = \frac{\text{AC} \times \text{BD}}{2}.$$

En désignant l'aire d'un losange par S et ses diagonales par D et *d*, on a la formule

$$S = \frac{D \times d}{2}.$$

FIG. 323.

457. Remarque. — Un losange a aussi pour mesure le produit de l'un de ses côtés AD par la hauteur correspondante CE, car un losange est en même temps un parallélogramme.

THÉORÈME

458. — *L'aire d'un trapèze égale le produit de la demi-somme des bases par la hauteur.*

Soit le trapèze ABCD ayant DE pour hauteur. On a :

$$\text{Surface ABCD} = \text{DE}\left(\frac{\text{AB} + \text{DC}}{2}\right).$$

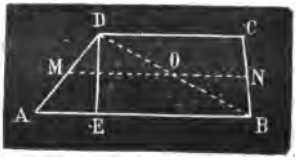


FIG. 324.

En effet, si nous menons la diagonale BD, nous aurons :

$$\text{Surface ABCD} = \text{ABD} + \text{BCD};$$

mais

$$\text{ABD} = \frac{\text{AB}}{2} \times \text{DE} \quad \text{et} \quad \text{BCD} = \frac{\text{DC}}{2} \times \text{DE}.$$

Donc

$$\text{Surface ABCD} = \frac{\text{AB}}{2} \times \text{DE} + \frac{\text{DC}}{2} \times \text{DE} = \text{DE}\left(\frac{\text{AB} + \text{DC}}{2}\right).$$

En désignant l'aire d'un trapèze par S, sa hauteur par h, et ses bases par B et b, on a la formule

$$S = \frac{h(B+b)}{2}.$$

459. Corollaire. — *L'aire d'un trapèze égale le produit de sa hauteur par la droite qui joint les milieux des côtés non parallèles.*

Pour le démontrer il suffit de prouver que cette droite est égale à la demi-somme des bases. Soit donc la droite MON (*fig.* 324) menée par les milieux des côtés non parallèles. On a (138) :

$$MO = \frac{AB}{2} \text{ et } ON = \frac{DC}{2},$$

donc

$$MO + ON = MON = \frac{AB + DC}{2}.$$

PROBLÈME

460. — *Évaluer l'aire d'un polygone.*

Pour évaluer l'aire d'un polygone ABCDEF (*fig.* 325), on le décompose en triangles en joignant l'un de ses sommets à tous les autres, on cherche l'aire de chaque triangle ainsi obtenu : la somme des aires trouvées est évidemment l'aire du polygone.

Plus généralement, on mène la plus grande diagonale AE du polygone (*fig.* 326), et l'on abaisse de tous les autres sommets des perpendiculaires sur cette diagonale. Le polygone se trouve ainsi décomposé en triangles rectangles et en trapèzes, on a par suite :

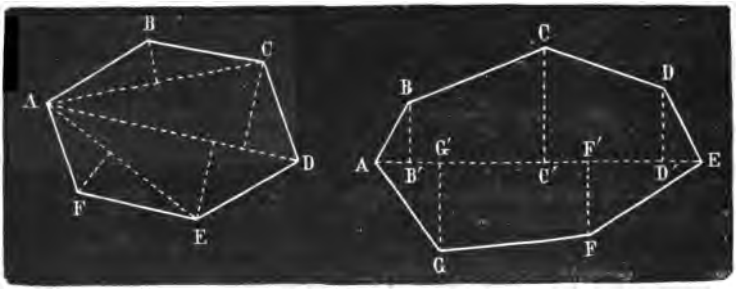


FIG. 325. FIG. 326.

Surface ABCDEFG $= \frac{1}{2}BB' \times AB' + \frac{1}{2}(BB' + CC') \times B'C' + \frac{1}{2}(CC' + DD') \times C'D' + \frac{1}{2}DD' \times D'E + \frac{1}{2}GG' \times AG' + \frac{1}{2}(GG' + FF') \times G'F' + \frac{1}{2}FF' \times F'E.$

PROBLÈME

461. — *Trouver l'aire approchée d'une figure plane limitée par une courbe quelconque.*

Dans le cas où le terrain est limité par une ligne courbe on prend sur cette ligne des points assez rapprochés pour que la courbe comprise entre deux points consécutifs s'éloigne peu de la droite qui les joint; puis on abaisse de ces différents points des perpendiculaires sur la transversale AB prise pour base. On procède pour le reste comme il a été indiqué dans l'exemple précédent.

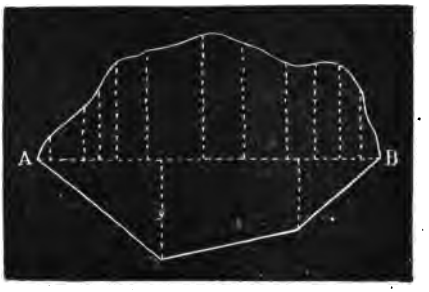


FIG. 327.

PROBLÈME

462. — *Transformer un polygone en un triangle équivalent.*

Soit le polygone ABCDE.

Menons la diagonale AD et du point E sa parallèle jusqu'à la rencontre du prolongement de BA; enfin, tirons DF qui détermine le triangle ADF équivalent au triangle ADE comme ayant même base AD et des hauteurs égales, car leurs sommets F et E se trouvent sur une même parallèle EF à la base. Nous pouvons donc remplacer le triangle ADE par le triangle ADF, et nous n'aurons plus que le quadrilatère FDCB. En appliquant la même méthode à ce quadrilatère, nous le transformerons en un triangle FDK équivalent, lequel est par conséquent équivalent au pentagone donné.

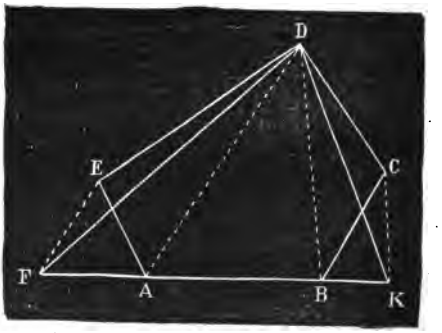


FIG. 328.

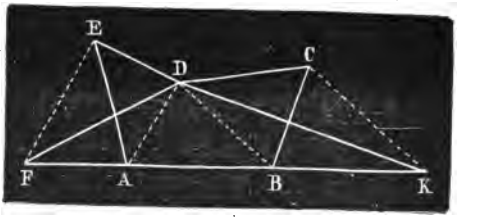


FIG. 329.

Remarque. — Dans le cas où le polygone ABCDE serait concave, on suivrait la même méthode.

Ce procédé est d'ailleurs indépendant du nombre des côtés du polygone, donc on peut transformer un polygone quelconque en un triangle équivalent.

483. Expressions trigonométriques de la surface d'un triangle, d'un parallélogramme et d'un quadrilatère quelconque.

1° *La surface d'un triangle est égale à la moitié du produit de deux côtés quelconques, par le sinus de l'angle compris entre ces côtés.*

Soit S la surface du triangle ABC ; BD étant la hauteur abaissée du sommet B sur le côté opposé, on a :

$$S = \frac{1}{2} \times b \times BD ;$$

mais $BD = c \sin A$, donc $S = \frac{1}{2} bc \sin A$.

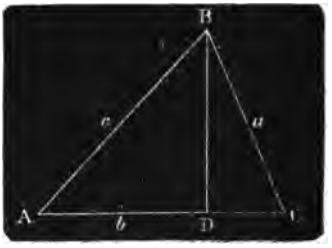


FIG. 229 *bis*.

2° La surface du *parallélogramme* de côtés c et b étant le double de l'aire du triangle ABC, aura pour expression

$$P = b \times c \sin A.$$

3° Un *quadrilatère quelconque*, dont on connaît les diagonales a et b ainsi que l'angle aigu α qu'elles forment entre elles, est égal à la moitié d'un parallélogramme de côtés a et b formant un angle aigu α ; donc sa surface est (*fig.* 229 *ter*) :

$$ABCD = \frac{1}{2} a \times b \times \sin \alpha.$$

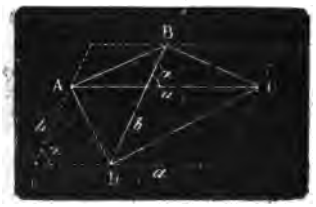


FIG. 229 *ter*.

CHAPITRE II

Relations entre les carrés construits sur les côtés d'un triangle.

484. — Les propositions contenues dans ce chapitre sont identiques à celles du n° 330 et suivants ; mais les démonstrations ne sont plus les mêmes ; celles-ci sont basées sur des constructions graphiques, de sorte que la vérité s'adresse aux yeux autant qu'à l'esprit.

THÉORÈME

485. — *Dans un triangle rectangle :* 1° *le carré construit sur un côté de l'angle droit est équivalent au rectangle construit sur l'hypoténuse et la projection de ce côté sur l'hypoténuse ;* 2° *le carré construit sur l'hypoténuse est équivalent à la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit ;* 3° *le rapport des carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit est égal au rapport des projections de ces côtés sur l'hypoténuse.*

Soit le triangle rectangle ABC. Construisons sur les trois côtés les carrés BD, BG, AI et menons du sommet A la perpendiculaire APK à l'hypoténuse.

1° Le carré M construit sur AB est équivalent au rectangle R construit sur la droite BE, égale à l'hypoténuse, et sur la projection BP du côté AB sur l'hypoténuse. En effet, menons les

droites AE, CF : les triangles ABE et BCF sont égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun, savoir : les angles ABE et FBC valent chacun l'angle α augmenté d'un droit, les côtés BE et BC sont égaux comme côtés du même carré, les côtés BA et BF sont aussi égaux pour la même raison. Or, le triangle ABE, ayant pour base BE et pour hauteur la distance BP comprise entre les côtés du rectangle R, équivaut à la moitié de ce rectangle. De même, le triangle BCF ayant pour base BF et pour hauteur la distance AB comprise entre les parallèles AG et BF, équivaut à la moitié du carré M. Donc le carré M est équivalent au rectangle R.

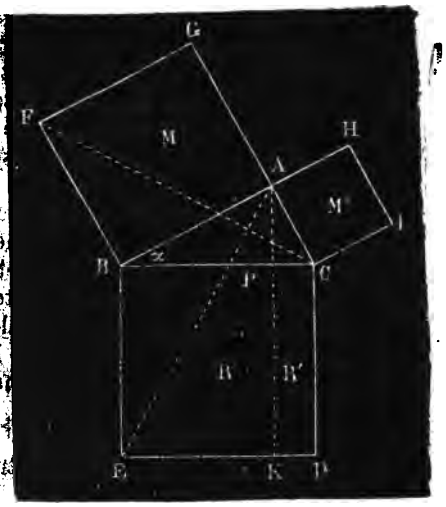


FIG. 330.

On prouverait de même que le carré M' est équivalent au rectangle R'.

2° Le carré BD construit sur l'hypoténuse est équivalent à la somme des carrés M et M' construits sur les côtés de l'angle droit. En effet, le carré BD est la somme des rectangles R, R' et ces rectangles sont respectivement équivalents aux carrés M, M'.

3° Le rapport des carrés construits sur les côtés de l'angle droit est égal au rapport des projections BP, PC de ces côtés sur l'hypoténuse. Car on a :

$$\frac{M}{M'} = \frac{R}{R'} = \frac{BP \times PK}{PC \times PK} = \frac{BP}{PC}.$$

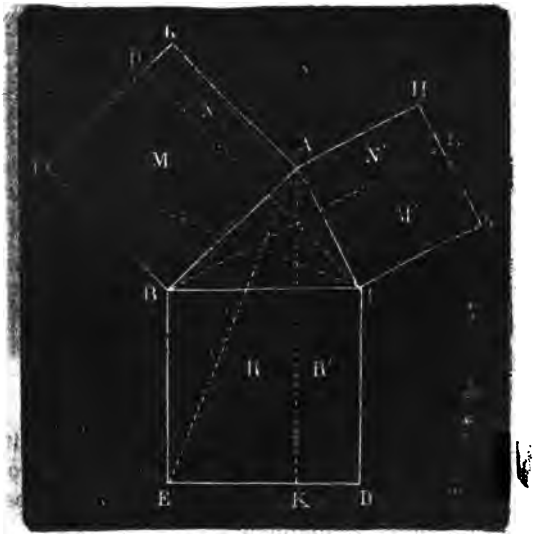


FIG. 331.

THÉORÈME

466. — *Le carré construit sur un côté d'un triangle opposé à un angle aigu ou obtus, est équivalent à la somme des carrés construits*

sur les deux autres côtés, moins ou plus deux fois le rectangle construit sur l'un de ces deux côtés et la projection de l'autre sur lui.

1° Soit, dans le triangle ABC, le côté BC opposé à l'angle aigu A. Construisons les carrés sur les côtés et menons les trois hauteurs AK, BL, CP du triangle. Ces hauteurs déterminent les six rectangles R, R′, M, N, M′, N′. On prouve, comme dans le théorème précédent, que les rectangles R, R′ sont respectivement équivalents aux rectangles M et M′.

On démontre encore de même que les rectangles N et N′ sont équivalents; il suffit pour cela de mener les diagonales CG et BH; car alors on a deux triangles ACG et ABH qui sont égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun; or, le premier de ces triangles est équivalent à la moitié du rectangle N et le second à la moitié du rectangle N′; par suite les rectangles N et N′ sont équivalents. Donc, on a comme équivalence :

$$R + R' = M + M' = M + N + M' + N' - 2N, \text{ puisque } N = N'.$$

Cette égalité est celle qu'il fallait trouver; car R + R′ est le carré construit sur BC, etc.

2° Soit, dans le triangle ABC, le côté BC opposé à l'angle obtus A. Construisons les carrés sur les côtés et menons les trois hauteurs AK, BL, CP des triangles. Ces hauteurs déterminent les six rectangles R, R′, BP, AP, CL, AL. On prouve, comme au numéro précédent, que les rectangles R et R′ sont respectivement équivalents aux rectangles BP et CL. On démontre encore de même que les rectangles AP et AL sont équivalents; il suffit pour cela de mener les diagonales CG et BH; car alors on a deux triangles ACG, ABH égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun; or, le premier de ces triangles est équivalent à la moitié du rectangle AP et le second équivalent à la moitié du rectangle AL; par suite, les rectangles AP et AL sont équivalents. Si donc on désigne comme plus haut les rectangles BG et AP par M et N et les rectangles CH et AL par M′ et N′, on a comme équivalence :

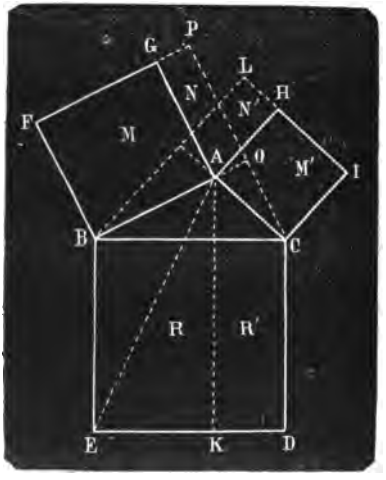


FIG. 332.

$$R + R' = M + N + M' + N' = M + M + 2N, \text{ puisque } N = N'.$$

Cette égalité est celle qu'il fallait trouver; car R + R′ est le carré construit sur BC, etc.

CHAPITRE III

Rapport des aires de deux polygones semblables. Problèmes de construction sur les aires.

---

§ Ier. RAPPORT DES AIRES DE DEUX POLYGONES SEMBLABLES

THÉORÈME

467. — *Le rapport des aires de deux polygones semblables est égal au rapport des carrés de deux côtés homologues.*

1° Soient d'abord les deux triangles semblables ABC, A′B′C′ et S, S′ leurs aires. On aura :

$$\frac{S}{S'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

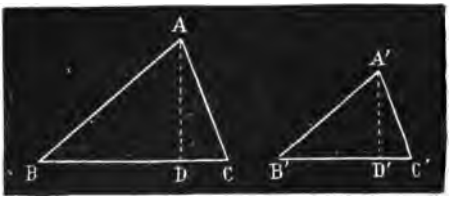


FIG. 333.

En effet, la similitude des triangles ABC, A′B′C′ donne :

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'}. \quad (1)$$

Si des sommets A et A′ on abaisse les perpendiculaires AD et A′D on obtient deux triangles rectangles ABD, A′B′D′ semblables, car les angles B′ et B sont égaux. Ces triangles donnent :

$$\frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'}. \quad (2)$$

Multipliant membre à membre (1) et (2), il vient :

$$\frac{BC \times AD}{B'C' \times A'D'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2} = \frac{2S}{2S'},$$

d'où

$$\frac{S}{S'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

2° Soient en second lieu les polygones semblables ABCDE, A'B'C'D'E' et S, S' leurs aires. On aura :

$$\frac{S}{S'} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}.$$

En effet, si l'on mène par deux sommets homologues A et A' des diagonales qui décomposent ces polygones en autant de triangles semblables on a, par suite de la similitude de ces triangles

$$\left.\begin{aligned} \frac{ABC}{A'B'C'} &= \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2} \\ \frac{ACD}{A'C'D'} &= \frac{\overline{CD}^2}{\overline{C'D'}^2} \\ \frac{ADE}{A'D'E'} &= \frac{\overline{ED}^2}{\overline{E'D'}^2}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

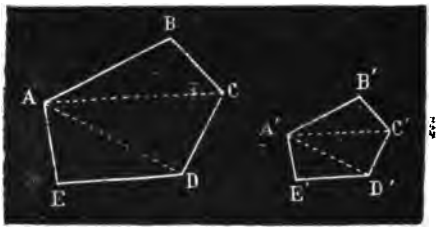


FIG. 334.

Mais, par suite de la similitude des polygones, on a :

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{ED}{E'D'} = \dots$$

Si l'on élève au carré les deux termes de chacun des rapports précédents, il vient :

$$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{C'D'}^2} = \frac{\overline{ED}^2}{\overline{E'D'}^2}$$

Cette suite d'égalités montre que les seconds membres des égalités (1) sont tous égaux ; par conséquent, il en est de même des premiers, et l'on a :

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{ACD}{A'C'D'} = \frac{ADE}{A'D'E'}$$

Mais cette suite de rapports égaux donne :

$$\frac{ABC + ACD + ADE}{A'B'C' + A'C'D' + A'D'E'} = \frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$$

ou

$$\frac{S}{S'} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}.$$

THÉORÈME

468. — *Si l'on construit trois figures semblables sur les côtés d'un triangle rectangle, en considérant ces côtés comme lignes homologues,*

la figure construite sur l'hypoténuse est équivalente à la somme des deux autres.

Soit le triangle rectangle ABC. Appelons X, Y, Z les trois polygones semblables ayant pour côtés homologues l'hypoténuse a et les côtés b, c. On a, d'après le théorème précédent :

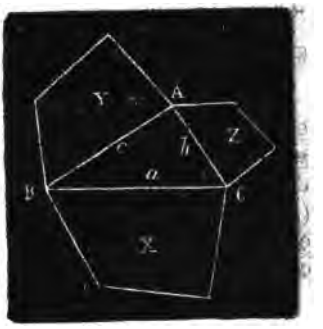


FIG. 335.

$$\frac{X}{a^2}=\frac{Y}{b^2}=\frac{Z}{c^2}=\frac{Y+Z}{b^2+c^2};$$

mais on sait (336) que :

$$a^2=b^2+c^2;$$

donc, il faut qu'on ait aussi :

$$X=Y+Z.$$

469. Corollaire. — *Si l'on décrit des circonférences ayant pour diamètres les côtés d'un triangle rectangle, le cercle construit sur l'hypoténuse est équivalent à la somme des deux autres.*

Ce corollaire est une conséquence immédiate du théorème. Mais on constate encore facilement ce fait au moyen des aires, car on a :

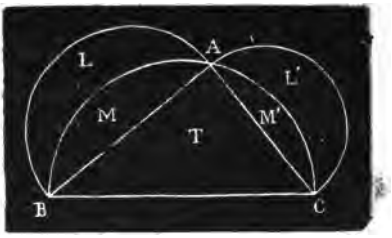


FIG. 336.

$$a^2=b^2+c^2$$

et, par suite,

$$\frac{1}{4}\pi a^2=\frac{1}{4}\pi b^2+\frac{1}{4}\pi c^2.$$

470. — Si l'on représente par T l'aire du triangle ABC (fig. 336), par M et M' les aires des segments, par L et L' celles des *lunules*, on a, d'après l'égalité précédente,

$$T+M+M'=M+L+M'+L',$$

d'où

$$T=L+L'.$$

Donc, la surface du triangle rectangle ABC est équivalente à la somme des surfaces des lunules.

§ II. — PROBLÈMES DE CONSTRUCTION SUR LES AIRES.

PROBLÈME

471. — *Construire un carré équivalent à la somme ou à la différence de deux carrés donnés.*

Soient a et b les côtés des carrés donnés et x le côté du carré demandé.

D'après l'énoncé, on a :

$$x^2 = a^2 + b^2 \text{ ou } x^2 = a^2 - b^2.$$

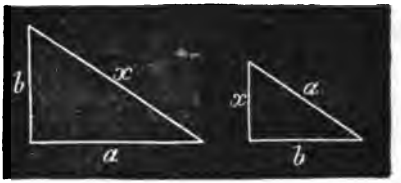


FIG. 337. FIG. 338.

Dans le premier cas x est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont a et b (*fig.* 337). Dans le second cas x est un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'autre côté est b et l'hypoténuse a (*fig.* 338).

PROBLÈME

472. — *Étant donnés deux polygones semblables,* A *et* B, *en construire un troisième,* X, *semblable aux deux premiers et équivalent à leur somme ou à leur différence.*

Il est facile de ramener ce problème au précédent. Soient, en effet, a, b, x trois côtés homologues des polygones A, B, X.

On a, par hypothèse,

$$X = A \pm B.$$

La similitude des polygones donne :

$$\frac{X}{x^2} = \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2},$$

d'où

$$\frac{X}{x^2} = \frac{A \pm B}{a^2 \pm b^2}.$$

Or, l'égalité des numérateurs entraînant celle des dénominateurs, on a :

$$x^2 = a^2 \pm b^2.$$

On est donc ramené au problème précédent. Sur la droite x, homologue de a, on construit un polygone semblable au polygone A.

PROBLÈME

473. — *Construire un carré qui soit à un carré donné dans le rapport de deux droites données.*

Si nous désignons par a le côté du carré donné, par x celui du carré demandé et par m et n les deux lignes données, on doit avoir, d'après l'énoncé,

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{m}{n}.$$

Prenons, sur une droite indéfinie, AB $= m$, BC $= n$, et sur AC

comme diamètre décrivons une demi-circonférence, au point B élevons la perpendiculaire BD ; puis tirons les cordes AD, DC ; enfin sur DC portons une longueur DE = a et par le point E menons EF parallèle à AC : DF est le côté x du carré demandé ; car la similitude des triangles DFE, DAC donne :

$$\frac{DF}{DE} = \frac{DA}{DC} \text{ ou } \frac{x}{a} = \frac{DA}{DC},$$

d'où enfin (465)

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{\overline{DA}^2}{\overline{DC}^2} = \frac{m}{n}.$$

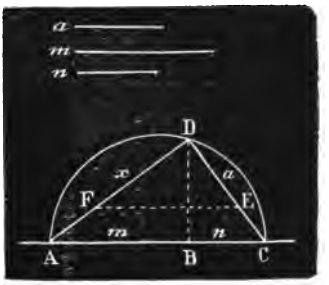


FIG. 339.

474. Remarque I. — On pourrait encore construire x comme au n° 387 ; car l'égalité

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{m}{n} \text{ donne } x^2 = a^2 \frac{m}{n},$$

de sorte que x est une moyenne proportionnelle entre a et $a\frac{m}{n}$.

475. Remarque II. — Dans le cas où le rapport des carrés doit égaler celui de deux nombres, si l'on a, par exemple, $\frac{x^2}{a^2} = \frac{3}{5}$, on prend sur une droite indéfinie une longueur AB égale à 3 fois une unité arbitraire et une longueur BC égale à 5 fois la même unité ; puis on achève la construction comme plus haut.

PROBLÈME

476. — *Construire un polygone* X *semblable à un polygone donné* A *et tel que le premier soit au second dans le rapport de deux droites données* m *et* n.

Soient x et a deux côtés homologues des polygones X et A. On a d'après l'énoncé :

$$\frac{X}{A} = \frac{m}{n};$$

mais les polygones X et A étant semblables, on a aussi :

$$\frac{X}{A} = \frac{x^2}{a^2}$$

d'où

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{m}{n}.$$

La question est donc ramenée au problème précédent. Lorsque x

sera déterminé, il suffira de construire sur cette ligne un polygone semblable au polygone donné A, en se rappelant, toutefois, que la droite x est homologue du côté a.

477 Remarque. — Dans le cas où le rapport de deux polygones doit égaler celui de deux nombres, on détermine deux lignes m et n qui soient dans le même rapport que les nombres, et on opère comme il vient d'être indiqué.

PROBLÈME

478. — *Partager un triangle par des parallèles à l'un des côtés : 1° en parties équivalentes ; 2° en parties proportionnelles à des longueurs données.*

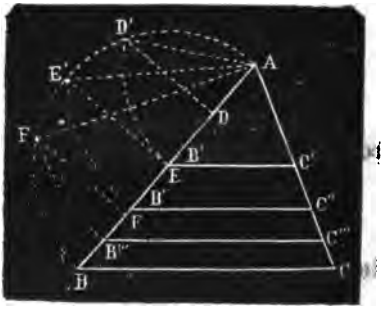


FIG. 340.

1° Supposons le problème résolu et soit le triangle ABC partagé en 4 parties équivalentes par les droites B'C', B''C'', B'''C''' parallèles à BC.

Si l'on compare entre eux les triangles semblables AB'C', AB''C'', AB'''C''' et ABC, il est évident qu'on a :

$$\frac{AB'C'}{1} = \frac{AB''C''}{2} = \frac{AB'''C'''}{3} = \frac{ABC}{4}. \qquad (1)$$

Mais on a aussi (467)

$$\frac{AB'C'}{\overline{AB'}^2} = \frac{AB''C''}{\overline{AB''}^2} = \frac{AB'''C'''}{\overline{AB'''}^2} = \frac{ABC}{\overline{AB}^2} \qquad (2)$$

Divisant (1) par (2), il vient

$$\frac{\overline{AB}^2}{1} = \frac{\overline{AB''}^2}{2} = \frac{\overline{AB'''}^2}{3} = \frac{\overline{AB}^2}{4},$$

d'où

$$\overline{AB'}^2 = AB \times \frac{1}{4} AB.$$

De même

$$\overline{AB''}^2 = AB \times \frac{2}{4} AB \text{ et } \overline{AB'''}^2 = AB \times \frac{3}{4} AB.$$

Les longueurs AB', AB'', AB''' sont donc moyennes proportionnelles à AB et $\frac{1}{4}$ AB, à AB et $\frac{2}{4}$ AB, à AB et $\frac{3}{4}$ AB.

Pour trouver ces longueurs, on partagera la droite AB en 4 parties égales par les points D, E, F; puis on décrira une demi-circonférence sur cette droite comme diamètre. Les perpendiculaires élevées sur AB, aux points D, E, F rencontreront la demi-circonférence en D′, E′, F′ et les droites AD′, AE′, AF′ seront les longueurs cherchées.

Il suffit de les porter successivement de A en B′, B″, B‴ et de mener par ces points des parallèles à BC. La question sera ainsi résolue, car (330), on a :

$$\overline{AD'}^2 = \overline{AB}^2 = AB \times AD = AB \times \frac{1}{4} AB.$$

On a de même :

$$\overline{AE'}^2 = \overline{AB''}^2 = AB \times \frac{2}{4} AB;$$

enfin

$$\overline{AF'}^2 = \overline{AB'''}^2 = AB \times \frac{3}{4} AB.$$

2° Supposons encore le problème résolu et soit le triangle ABC partagé par des droites B′C′, B″C″, B‴C‴, parallèles à BC, en 4 parties

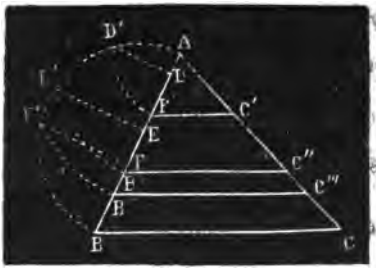


FIG. 341.

proportionnelles aux longueurs l, m, n, p. On a, comme plus haut :

$$\frac{AB'C'}{l} = \frac{AB''C''}{l+m} = \frac{AB'''C'''}{l+m+n} = \frac{ABC}{l+m+n+p};$$

et si l'on continue le raisonnement qui vient d'être fait, on arrive à trouver qu'il faut partager le côté AB en parties proportionnelles aux longueurs l, m, n, p. On achève d'ailleurs la construction ainsi qu'il a été indiqué pour le partage du triangle en parties égales.

CHAPITRE IV

Aire d'un polygone régulier convexe. — Aire d'un cercle, d'un secteur, d'un segment de cercle et d'une couronne circulaire. — Rapport des aires de deux cercles.

THÉORÈME

479. — *L'aire d'un polygone régulier convexe est égale au produit de son périmètre par la moitié de son apothème.*

Soit, par exemple, l'hexagone ABCDEF.

Menons l'apothème OI et joignons le centre O aux différents sommets du polygone. Nous avons alors autant de triangles égaux que ce polygone a de côtés. Or, l'un d'eux, AOB, a pour aire $AB \times \frac{OI}{2}$: donc l'aire du polygone est six fois ce produit ou $6AB \times \frac{OI}{2}$, c'est-à-dire le périmètre 6AB, multiplié par $\frac{OI}{2}$ ou la moitié de son apothème.

FIG. 342

Si, en général, on désigne par P le périmètre d'un polygone régulier convexe, par a son apothème et par S sa surface, on a la formule

$$S = P \times \frac{a}{2}.$$

THÉORÈME

480. — *Le rayon est la limite vers laquelle tend l'apothème d'un polygone régulier inscrit dont le nombre des côtés augmente indéfiniment.*

Soit le polygone régulier inscrit ABCD... Si l'on double successivement le nombre des côtés de ce polygone, ces côtés, BN, NC..., deviennent de plus en plus petits. On a, en effet, $BN < BC$, car dans

le triangle BNC le côté BC est opposé au plus grand angle N ; or, les côté des polygones inscrits sont des cordes, et nous avons démontré que les plus petites cordes sont les plus éloignées du centre : on a donc

$$OP > OI.$$

FIG. 343.

L'apothème se rapprochant de plus en plus du rayon à mesure que le nombre des côtés du polygone augmente, pourra en différer aussi peu qu'on voudra. Donc à la limite, on a :

rayon R = apothème a.

THÉORÈME

481. — *L'aire d'un cercle est égale au produit de la circonférence par la moitié du rayon.*

En effet, la circonférence étant la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone régulier dont on double indéfiniment le nombre des côtés (406), et le rayon la limite de l'apothème (480), l'aire du cercle sera la limite de l'aire de ce même polygone.

Or, l'égalité (479)

$$S = P \times \frac{a}{2} \qquad (1)$$

est vraie, quel que soit le nombre des côtés du polygone ; elle existera donc encore à la limite ; mais à la limite le périmètre du polygone régulier est égal à la circonférence et l'aire du polygone à l'aire du cercle ; alors on a : P = C et a = R ; ces valeurs substituées dans l'égalité (1) donnent :

$$\text{Cercle R} = C \times \frac{R}{2}. \qquad (2)$$

482. Corollaire I. — *L'aire* S *d'un cercle est égale au produit du nombre constant* π *par le carré du rayon.*

En effet, on a (411) :

$$C = 2\pi R ;$$

et si, dans l'égalité (2) on remplace C par sa valeur, il vient :

$$\text{Cercle R} = S = 2\pi R \times \frac{R}{2} = \pi R^2.$$

483. Corollaire II. — *La formule* $S = \pi R^2$ *conduit à deux autres méthodes pour déterminer* π ; car on a : $\pi = \frac{S}{R^2}$.

Égalité qui indique que pour déterminer π, on peut se donner R ou S.

THÉORÈME

484. — *L'aire d'un secteur circulaire est égale au produit de son arc par la moitié du rayon.*

Pour évaluer l'aire du secteur AOB, divisons l'arc AB en un certain nombre de parties égales, par exemple en trois parties ; joignons les points de division deux à deux et menons OM, ON, nous obtiendrons ainsi trois triangles isocèles égaux ; or, l'un d'eux a pour mesure $AM \times \frac{OP}{2}$, le secteur polygonal AMNBO a donc pour mesure $3AM \times \frac{OP}{2} = \text{périmètre AMNB} \times \frac{OP}{2}$.

FIG. 344.

Cette égalité existera, quel que soit le nombre des côtés de la ligne brisée ; elle sera donc encore vraie à la limite, c'est-à-dire lorsque le nombre des côtés de la ligne polygonale sera devenu assez considérable pour qu'elle se confonde avec l'arc AB, l'apothème OP avec le rayon R, et la surface du secteur polygonal avec la surface du secteur AOB : donc on a à la limite

$$\text{Secteur AOB} = \text{arc AB} \times \frac{R}{2}.$$

485. Corollaire. — *L'aire d'un secteur circulaire de rayon* R *dont l'angle au centre est* α, *a pour expression* : $\frac{\pi R^2 \alpha}{360}$.

En effet (*fig.* 376), on a les deux égalités :

$$\text{Sect. AOB} = \text{arc AB} \times \frac{R}{2}$$

$$\text{Cercle R} = \pi R^2 = C \times \frac{R}{2}.$$

En divisant ces égalités membre à membre, il vient :

$$\frac{\text{sect. AOB}}{\pi R^2} = \frac{\text{arc AB} \times \frac{R}{2}}{C \times \frac{R}{2}} = \frac{\text{arc AB}}{C} = \frac{\alpha}{360},$$

d'où

$$\text{sect AOB} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}.$$

THÉORÈME

486. — *L'aire d'un segment de cercle est égale à la moitié du produit du rayon par l'excès de l'arc sur la moitié de la corde qui sous-tend l'arc double.*

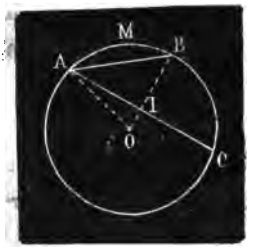


FIG. 345.

Soit le segment AMB. Il est facile de voir que son aire S est la différence des aires du secteur AOB et du triange AOB. On a donc :

$$S = \frac{1}{2} R \times \text{arc AMB} - \frac{1}{2} R \times AI = \frac{1}{2} R (\text{arc AMB} - AI);$$

mais AI est la moitié de la corde AC qui sous-tend l'arc ABC double de AMB. Donc

$$S = \frac{1}{2} R (\text{arc AMB} - \frac{1}{2} \text{corde AC}). \qquad \text{C. q. f. d.}$$

AIRE D'UNE COURONNE CIRCULAIRE

Définitions.

487. — On appelle *couronne circulaire* la portion de plan comprise entre deux cercles concentriques.

Le centre *commun* aux deux cercles est le *centre* de la couronne, et la différence des rayons en est la *hauteur* ou l'*épaisseur*.

La distance du centre O (*fig.* 346) au milieu M de l'épaisseur se nomme le *rayon moyen* de la couronne, et la circonférence OM ayant son centre en O et pour rayon OM est appelée *circonférence moyenne*.

THÉORÈME

488. — *L'aire d'une couronne circulaire est égale à celle d'un cercle ayant pour diamètre une corde du grand cercle tangente au petit.*

Soient R et R' les rayons OA et OB des deux cercles concentriques. Au point B, menons au rayon OB une perpendiculaire CD qui sera tangente à la petite circonférence. L'aire de la couronne considérée sera exprimée par $\pi . \overline{BC}^2$.

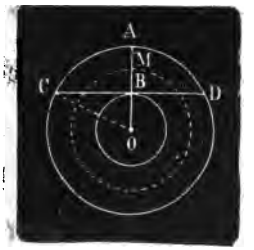


FIG. 346.

En effet, il est évident que la couronne est équivalente à la différence des deux cercles. Mais l'aire du grand cercle est égale à $\pi . R^2$, celle du petit à $\pi . R'^2$;
Donc l'aire de la couronne égale :

$$\pi R^2 - \pi R' = \pi(R^2 - R'^2).$$

Menons OC ; le triangle CBO étant rectangle, on a :

$$R^2 - R'^2 = \overline{BC}^2.$$

Par conséquent,

$$\pi(R^2 - R'^2) = \pi \times \overline{BC}^2.$$

489. Corollaire. — *L'aire d'une couronne circulaire a pour mesure le produit de sa circonférence moyenne par sa hauteur.*

Car on a :

$$\pi(R^2 - R'^2) = \pi(R + R')(R - R') = 2\pi\left(\frac{R+R'}{2}\right)(R - R')$$

ou

$$\pi(R^2 - R'^2) = 2\pi.OM \times AB = \text{Circ. OM} \times AB.$$

THÉORÈME

490. — *Les aires de deux cercles sont dans le rapport des carrés des rayons.*

Soient S, S′ les aires de deux cercles et R, R′ leurs rayons. On a :

$$S = \pi R^2$$
$$S' = \pi R'^2,$$

d'où

$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

THÉORÈME

491. — *Les aires de deux secteurs circulaires appartenant au même cercle sont dans le rapport des arcs de ces secteurs.*

Soient, en effet, deux secteurs AOB, A′OB′ appartenant au même cercle. On a :

$$\text{Sect. AOB} = \frac{1}{2} R \times \text{arc AB}$$

$$\text{Sect. A'OB'} = \frac{1}{2} R \times \text{arc A'B'},$$

d'où

$$\frac{\text{Sect. AOB}}{\text{Sect. A'OB'}} = \frac{\text{arc AB}}{\text{arc A'B'}}.$$

APPLICATIONS NUMÉRIQUES

I

492. — *Calculer l'aire d'un cercle dont la circonférence a 2 mètres.*

Si l'on désigne par C, R et S la circonférence, le rayon et la surface du cercle, on a :

$$C = 2\pi R = 2, \text{ d'où } R = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi};$$

or,

$$S = \pi R^2.$$

Si dans cette dernière égalité, on remplace R par sa valeur, il vient

$$S = \pi \times \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{\pi} = 0^{m2}3183 \text{ à 1 centimètre carré près.}$$

II

493. — *Calculer dans un cercle de 2 mètres de rayon, l'aire d'un secteur circulaire dont l'arc a 36°.*

Soit S l'aire du secteur dans le cercle de rayon R. On a :

$$S = \pi R^2 \times \frac{36}{360} = \frac{1}{10}\pi R^2 = \frac{1}{10}\pi \times 2^2 = 1^{m2}2566 \text{ à 1 centimètre carré près.}$$

III

494. — *Calculer, dans un cercle de 2 mètres de rayon, l'aire d'un segment compris entre un arc de 30° et sa corde.*

Soient R le rayon du cercle et S la surface du segment ABM. Si l'on prend l'arc ABC double de l'arc AMB, on a :

$$S = \frac{1}{2}R\left(\text{arc AMB} - \frac{1}{2}\text{corde AC}\right);$$

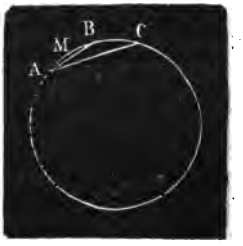


FIG. 347.

mais l'arc AMB est la moitié de l'arc ABC; or, ce dernier valant 60° est le $\frac{1}{6}$ de la circonférence, par suite l'arc AMB en est le $\frac{1}{12}$; d'ailleurs la corde AC est égale au rayon. Donc on a :

$$S = \frac{1}{2}R\left(\frac{2\pi R}{12} - \frac{1}{2}R\right) = \frac{1}{2}R^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{3}{6}\right) = \frac{1}{12}R^2(\pi - 3).$$

Si l'on remplace R par sa valeur, on a enfin :

$$S = \frac{4}{12}(3{,}1416 - 3) = \frac{0{,}1416}{3} = 0^{m2}0472 \text{ à 1 centimètre carré près.}$$

EXERCICES SUR LE LIVRE IV

326. — Calculer l'aire d'un rectangle dont les dimensions sont $58^{m},45$ et $24^{m},60$.

327. — Un embranchement de chemin de fer doit avoir 40^{km} de long sur 12^{m} de large : on demande combien coûtera le terrain à acquérir, si l'on paye, prix moyen, 4,500 fr. l'hectare.

328. — Combien vaut un pré rectangulaire dont les dimensions sont : $75^{m},30$ et $35^{m},20$? Les 2/3 du pré sont estimés à raison de 70 fr. l'are et l'autre 1/3, 60 fr. l'are.

329. — Quelle est la hauteur d'un rectangle dont la base a 65^{m} et la surface 1430^{mq} ?

330. — Un rectangle a une surface de 756^{mq} : on demande ses dimensions sachant qu'elles sont entre elles dans le rapport de 7 à 3.

331. — Un propriétaire qui a anticipé sur son voisin doit rendre sur une longueur de 60^{m} une parcelle rectangulaire ayant 38^{ca} de surface : quelle largeur doit-on prendre ?

332. — Un terrain de forme rectangulaire est estimé 60 fr. l'are : on demande sa surface et ses dimensions, sachant qu'il a été vendu 3,725 fr. et que la hauteur est le 1/5 de la base.

333. — La surface d'un rectangle est $108^{mq},60$; son périmètre est $48^{m},20$: quelles sont ses deux dimensions ?

334. — La surface d'un rectangle est 284^{mq}, et la différence des deux côtés adjacents $16^{m},40$: on demande sa base et sa hauteur.

335. — Quelle est la surface d'un rectangle dont la diagonale a 75^{m} sachant que les côtés sont dans le rapport de 3 à 4 ?

336. — Combien faut-il de carreaux pour paver une cuisine qui a $3^{m},40$ de long sur 3^{m} de large ? On sait que le carreau a $0^{m},16$ de côté.

337. — Trouver la surface S du carré inscrit dans un cercle de rayon R.

338. — Trouver la surface S du carré circonscrit au même cercle.

339. — On a deux carrés, la diagonale de l'un est égale au côté de l'autre ; quel est le rapport des surfaces de ces deux carrés ?

340. — Trouver la surface d'un carré sachant que la différence entre le côté du carré et sa diagonale est égale à 6 mètres.

341. — Construire un carré dans lequel la différence entre la diagonale et le côté soit égale à 6^{m} ; quel sera le rayon du cercle circonscrit à ce carré ?

342. — On joint le 1/3 du côté d'un carré au 1/4 du côté adjacent. On demande de trouver en fonction du côté a du carré : 1° la surface du triangle ainsi déterminé ; 2° la surface de la partie restante du carré.

343. — Sur chaque côté d'un carré renfermant 36^{mq} de superficie, on prend $4^{m},25$, à partir de chaque angle et dans le même sens. On joint les points deux à deux. On obtient un carré dont on demande la surface et le rapport avec le premier.

344. — Calculer la surface d'un triangle dont la base a $54^{m},65$ et la hauteur $19^{m},25$.

345. — Un triangle a 378^{mq} de surface et 42^{m} de base : on demande sa hauteur.

346. — Un triangle ABC a 875^{mq} de surface : on demande ses dimensions, sachant que le rapport de la base AC à la hauteur BD $= \frac{14}{5}$.

347. — Dans le même triangle ABC, on détache un triangle de 60^{mq}, et qui a même sommet B : quelle est la longueur de sa base que l'on prend à partir de A?

348. — Déterminer le côté A du carré équivalent à la surface d'un triangle T de 62^{m} de base et de 24^{m} de hauteur.

349. — Trouver la surface du dodécagone régulier inscrit en fonction du rayon.

350. — On donne un trapèze dont la grande base a 36^{m}, la petite 22 et la hauteur 16 ; on demande de calculer la surface du triangle limité par le prolongement des côtés non parallèles du trapèze et la petite base.

351. — Calculer la surface d'un triangle rectangle dont un côté de l'angle droit a 15^{m} et la perpendiculaire abaissée du sommet sur l'hypoténuse 9^{m}.

352. — Calculer à $0^{m},01$ près la hauteur d'un triangle dont la base a 60^{m} et dont la surface doit être moyenne proportionnelle entre celles de deux rectangles ayant 4^{m} de hauteur et pour bases $46^{m},80$ et $54^{m},60$.

353. — La surface d'un triangle rectangle est de 726^{mq}, l'hypoténuse a 55^{m} : on demande les deux côtés de l'angle droit.

354. — L'aire d'un triangle équilatéral étant $4^{mq},50$, on demande l'aire du carré inscrit dans le cercle circonscrit au triangle.

355. — Trouver le côté d'un carré équivalent à un triangle donné, en supposant que la base du triangle ait $4^{m},80$ et la hauteur $5^{m},40$.

356. — On joint un point quelconque O pris dans l'intérieur d'un parallélogramme aux quatre sommets. Démontrer qu'il existe un rapport constant entre la surface du parallélogramme et la somme des surfaces de deux triangles opposés.

357. — Trouver dans l'intérieur d'un triangle un point tel qu'en le joignant aux trois sommets, le triangle donné soit décomposé en trois triangles équivalents. (*L'exercice* 357 *doit être fait après l'exercice* 865.)

358. — Partager un quadrilatère quelconque en deux parties équivalentes.

359. — Les aires de deux triangles ABC, DEF qui ont un angle égal sont dans le même rapport que les produits des côtés de ces angles.

360. — Trouver l'aire d'un losange dont les diagonales sont 3^{m} et 2^{m}.

361. — Diviser un carré, un rectangle, un parallélogramme, un losange en parties égales par des parallèles aux côtés.

362. — Quelle est la surface d'un trapèze dont la hauteur a 12^{m} et les bases $48^{m},50$ et 25?

363. — Diviser un trapèze en deux parties équivalentes par une droite partant d'un point donné sur une base.

364. — Un trapèze a un côté AD $= 80^{m},68$ perpendiculaire sur les deux bases, la base supérieure a $90^{m},75$, le côté BC fait avec la base supérieure un angle de 135° : on demande la surface de ce trapèze.

365. — Un triangle ABC a $52^{m},7$ de base et $28^{m},4$ de hauteur ; à 17^{m} du sommet on mène une parallèle DE à la base ; calculer la surface du trapèze ADEC ainsi obtenu.

366. — Un trapèze a 42^{m} de grande base, 28^{m} de petite et 12^{m} de hauteur ; calculer la longueur de la droite menée dans l'intérieur du trapèze parallèlement aux bases et à $3^{m},60$ de la grande.

367. — L'une des bases d'un trapèze égale 10^m, la hauteur est de 4^m, la surface de 32^{mq}. A une distance de 1^m de la base donnée on lui mène une parallèle; on demande la longueur de la partie de cette droite comprise dans l'intérieur du trapèze.

368. — Les deux côtés parallèles d'un trapèze ont pour valeurs $3^m,121$ et $5^m,17$, les deux autres côtés sont également inclinés sur les bases et ont pour valeur $2^m,2$; trouver la surface du trapèze.

369. — Un terrain a la forme d'un trapèze isocèle; les bases sont 100^m et 40^m; les deux autres côtés sont égaux à 50^m. On demande : 1° la surface de ce terrain en ares; 2° la surface du terrain triangulaire qu'on obtiendrait en ajoutant au trapèze le triangle partiel formé par les prolongements des côtés non parallèles.

370. — Démontrer que dans tout trapèze le triangle qui a pour base un des côtés non parallèles et pour sommet le milieu du côté opposé, a une surface égale à la moitié de celle du trapèze.

371. — La surface d'un trapèze est égale au produit d'un côté non parallèle par la distance de ce côté au milieu du côté opposé.

372. — Calculer l'aire d'un trapèze sachant que sa hauteur est égale à la demi-somme de ses bases; que la différence entre les deux bases est 1^m; et que la plus grande base est égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit seraient la petite base et la hauteur du trapèze.

373. — La hauteur d'un trapèze a 10^m et sa surface est égale au rectangle construit avec ses deux bases parallèles. De plus le double de la base supérieure, plus le triple de la base inférieure égale 6 fois la hauteur. Quelles sont les deux bases?

374. — Connaissant dans un trapèze B, b et h, trouver la formule $T = \frac{(B+b)}{2}h$, en considérant le trapèze comme étant la différence entre deux triangles dont le sommet commun serait au point de rencontre des côtés non parallèles du trapèze et dont l'un des triangles aurait pour base B et l'autre b.

375. — Étant donné un trapèze ABCD, dont les deux bases parallèles AB, CD sont respectivement égales à 5^m et à 3^m, on demande par quel point I de la diagonale AC passe la droite EF parallèle au côté AD qui divise le trapèze en deux parties AEFD et EBCF qui sont dans le rapport de 2 à 3.

376. — Les deux bases d'un trapèze ont respectivement pour longueur 12^m et 7^m : on demande de calculer la position de la droite parallèle aux bases qui diviserait le trapèze en deux parties équivalentes.

377. — Un trapèze est donné dans lequel les deux bases parallèles et la hauteur sont représentées par a, b, h; on divise les côtés en 3 parties égales par des parallèles aux bases, ce qui partage le trapèze donné en trois trapèzes partiels. On propose de trouver la surface de chacun de ces trapèzes exprimée au moyen des données a, b, h.

378. — Calculer la longueur de la corde commune à deux cercles dont les rayons ont 12^m et 15^m de longueur, sachant que la distance de leurs centres est 18^m.

379. — On demande l'aire d'un losange dont la grande diagonale a 5^m et le côté 3^m.

380. — Le carré construit sur la diagonale d'un carré est le double du carré donné. Démonstration graphique.

381. — Trouver la superficie d'un triangle rectangle isocèle dont la base a 25^m.

382. — La somme des perpendiculaires abaissées d'un point intérieur I sur

les côtés d'un polygone régulier est égale à l'apothème OK multiplié par le nombre des côtés.

383. — Un polygone irrégulier a un périmètre de 320^m : on demande le côté du carré équivalent à ce polygone, sachant que les côtés du polygone sont tous tangents à un cercle de 40^m de rayon.

384. — Trouver l'aire S d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de 2^m de rayon.

385. — Si l'on désigne par c le côté d'un polygone régulier de n côtés, inscrit dans un cercle de rayon R, on aura pour l'aire S d'un polygone de $2n$ côtés : $S = \frac{2n \times c \times R}{4}$.

386. — Trouver dans un cercle de rayon R l'aire de l'octogone régulier inscrit.

387. — Quelle est l'aire d'un octogone régulier inscrit dans un cercle de $3^m,20$ de rayon?

388. — Trouver la surface d'un octogone régulier en fonction de son côté c.

389. — On a deux octogones réguliers, qui ont respectivement 54^{mq} et 62^{mq} : trouver le côté d'un troisième octogone régulier dont la surface soit égale à la somme des surfaces des deux premiers.

390. — L'aire d'un octogone régulier est de 20^{mq}; calculer le rayon du cercle circonscrit et du cercle inscrit.

391. — Trouver l'aire d'un décagone régulier en fonction du rayon R du cercle circonscrit.

392. — Trouver l'aire du polygone régulier de 20 côtés inscrit dans un cercle de rayon R.

393. — Trouver à $0^{mq},01$ près l'aire du décagone régulier et l'aire du polygone régulier de 20 côtés, inscrits dans un cercle de $1^m,80$ de rayon.

394. — Les aires a, A, de deux polygones réguliers semblables, l'un inscrit et l'autre circonscrit, étant données, calculer les aires a', A', des polygones réguliers inscrits et circonscrits d'un nombre double de côtés.

395. — Déterminer π d'après ces formules.

396. — Étant donnés le rayon r et l'apothème a d'un polygone régulier, calculer le rayon r' et l'apothème a' d'un polygone régulier équivalent au premier et d'un nombre double de côtés.

397. — Déterminer π d'après les formules précédentes.

398. — Quelle est la surface d'un cercle dont la circonférence a $25^m,13$?

399. — Trouver le rayon d'un cercle équivalent à un trapèze dont les bases ont : $80^m,50$, $70^m,80$ et la hauteur $18^m,40$.

400. — Trouver le rayon d'un cercle dont la surface est de $28^{mq},62$.

401. — Deux cercles concentriques ont l'un 3^m de rayon, et l'autre 5^m : on demande la surface de la couronne.

402. — Deux circonférences concentriques laissent entre elles une couronne circulaire de $25^{mq},1328$; l'épaisseur de cette couronne est de 2^m : on demande le rayon de chaque circonférence.

403. — La surface d'une couronne est $37^{mq},68$; le grand rayon est 10^m : quelle est l'épaisseur de la couronne?

404. — Calculer à $0^m,01$ près le rayon d'un cercle, sachant que si ce rayon augmentait d'un centimètre, l'aire du cercle augmenterait de 1^{mq}.

405. — Lorsque deux circonférences sont concentriques, la corde tangente à la petite est le diamètre d'un cercle dont la surface est égale à celle de la couronne.

406. — Calculer la surface d'une couronne sachant qu'une corde du grand cercle tangente au petit a 8^m.

407. — Si l'on divise le diamètre AB d'un cercle O en deux segments AC, CB, et que sur chacun de ces segments de part et d'autre de AB, on décrive deux demi-circonférences, la ligne formée par l'ensemble de ces demi-circonférences partage le cercle en deux parties proportionnelles aux segments du diamètre.

408. — Si l'on divise le diamètre AB en 4 parties égales AC, CO, OD, DB et qu'on décrive les demi-circonférences en procédant comme dans l'exercice précédent, le cercle sera divisé en 4 parties équivalentes.

409. — Dans l'exercice précédent, si l'on fait $AB = 42^m$, calculer les surfaces k, l, m, n sachant qu'elles sont proportionnelles aux nombres 2, 3, 4 et 5.

410. — Trouver la surface d'un secteur dont l'arc a $25°33'$ dans un cercle de 3^m de rayon.

411. — La surface d'un secteur vaut $20^{mq},6250$, et l'arc qui lui sert de base, $65°15'$: quelle est la longueur de cet arc?

412. — La surface d'un secteur vaut 48^{mq} dans un cercle de 25^m de rayon on demande, à moins d'une seconde, la graduation de l'arc qui sert de base au secteur.

413. — Les aires de deux secteurs terminés par des arcs ayant le même nombre de degrés sont proportionnelles aux carrés de leurs rayons.

414. — On a deux cercles concentriques dont les rayons sont $5^m,30$ et $3^m,20$, on mène par le centre O de ces deux cercles deux rayons OA, OB faisant entre eux un angle de $42°$: on demande de calculer la surface de la plus petite partie du plan comprise entre les rayons et les circonférences des deux cercles.

415. — Trouver la surface du segment de cercle dont l'arc a $45°$.

416. — Si l'on double, triple, etc., les dimensions d'un triangle, que devient la surface?

417. — La superficie d'un terrain triangulaire dont la base a 40^m est de 12 ares 20^{ca}. On demande la superficie d'un second terrain triangulaire semblable au premier, dont la base a 28^m. On demande aussi sa valeur à raison de 25 francs l'are.

418. — Diviser un triangle ABC par une parallèle à l'un des côtés en 2 parties qui soient dans le rapport de m à n.

419. — On mène par le milieu M de la hauteur d'un triangle ABC une parallèle DE à la base AC : quel est le rapport du triangle DBE au trapèze ADEC?

420. — On a deux triangles équilatéraux dont les côtés sont $43^m,57$ et $68^m,35$. On demande de calculer le côté d'un troisième triangle équilatéral, dont la surface serait égale à la somme des surfaces des deux premiers?

421. — On partage le triangle ABC en deux parties équivalentes par une droite DF parallèle à la base AC : trouver la hauteur GK du trapèze ADFC en fonction de la hauteur H du triangle.

422. — Déterminer les longueurs Ba, Ba', Ba'' à prendre sur le côté BA d'un triangle BAC pour que ce triangle soit divisé :

1° en 4 parties equivalentes par les droites ac, $a'c'$, $a''c''$ parallèles à AC,
2° en 4 parties proportionnelles aux grandeurs m, n, p, q.

423. — Dans l'exercice précédent on fait $AB = 90^m$; calculer les longueurs Ba, Ba', Ba'' pour que le triangle soit divisé par les parallèles ac, $a'c'$, $a''c''$ à la base AC en 4 parties proportionnelles aux nombres 2, 3, 5, 8.

424. — Diviser un trapèze, par une parallèle à la base, en 2 parties équivalentes, ou qui soient dans le rapport de deux lignes m et n.

425. — Les deux bases d'un trapèze sont 36^m et 48^m : on demande la longueur d'une droite parallèle aux bases et qui divise le trapèze en 2 parties proportionnelles aux nombres 3 et 5.

426. — Diviser un trapèze en 4 parties équivalentes par des parallèles aux bases.

427. — ..... En 4 parties proportionnelles aux nombres 3, 4, 5, 6.

428. — Les côtés de trois octogones réguliers sont respectivement 3^m, 4^m, 12^m. On demande quel devra être le côté d'un octogone pour qu'il soit équivalent à la somme des trois octogones donnés.

429. — Un cercle a 3 mètres de rayon; quel sera le rayon d'un cercle quadruple en surface ?

430. — Trouver le rayon d'un cercle équivalent en surface à trois cercles donnés.

431. — Trouver le rayon d'un cercle dont la surface soit égale à la différence des surfaces de deux cercles donnés.

432. — Diviser un cercle par une circonférence concentrique en deux parties équivalentes.

433. — Diviser par des circonférences concentriques un cercle en quatre parties équivalentes.

434. — Diviser par des circonférences concentriques un cercle en trois parties proportionnelles à 3, 5, 7.

435. — Diviser un cercle par des circonférences concentriques en quatre parties proportionnelles aux longueurs k, l, m, n.

436. — Quelle est la surface de l'hexagone régulier inscrit dans un cercle qui a $18^{mq},28$?

437. — Trouver combien il faudra de carreaux de forme hexagonale de $0^m,12$ de côté pour carreler une chambre ayant 4^m sur 5.

438. — On donne un côté AB d'un carré égal à n; sur le côté AB, on construit un triangle équilatéral ABF, on joint FD; on demande : 1° la surface du triangle AFD ; 2° le rapport des lignes AG et AB.

439. — Trouver l'aire du segment compris entre l'arc de 60° et sa corde dans un cercle dont le rayon est de 2^m.

440. — On a un hexagone régulier dont le côté est égal à 1^m, sur chacun des côtés on construit un carré extérieur à l'hexagone. Cela posé on demande : 1° de démontrer que les sommets extérieurs à l'hexagone des six carrés dont il vient d'être question forment un polygone régulier de 12 côtés; 2° de calculer la surface de ce polygone régulier.

441. — La surface S d'un terrain dont la forme est celle d'un hexagone régulier est égale à $34^a,19$. Quelle est la longueur de son côté ?

442. — Calculer à moins de 0,01 la surface d'un cercle sachant que cette surface surpasse de $62^{mq},25$ celle de l'hexagone régulier qui lui est inscrit.

443. — On donne un triangle équilatéral dont la surface est 1024^{mq} ; on demande son côté.

444. — On a un polygone ABCDE composé d'un triangle équilatéral BCE et d'un carré ABED. La surface de ce polygone est égale à 3^h36^a : on demande de trouver le côté AB.

445. — 1° Trouver en fonction de a, côté d'un triangle équilatéral, la surface du carré inscrit dans ce triangle; 2° inscrire un carré dans un triangle quelconque, et dire sur quel côté s'appuie le plus grand carré.

446. — Calculer à 0,01 près le rapport des surfaces des deux segments du cercle CBD et CED sachant que la corde CD passe par le milieu du rayon AB qui lui est perpendiculaire.

447. — Trouver le rapport de l'hexagone régulier inscrit à l'hexagone régulier circonscrit.

448. — Le côté d'un triangle équilatéral est a : quelle est en fonction de a la surface du cercle circonscrit à ce triangle ?

449. — Trouver le rapport de la surface du cercle à celle du triangle équilatéral inscrit.

450. — La surface d'un cercle et celle d'un triangle équilatéral inscrit valent ensemble 3^{mq} : on demande de calculer la surface du cercle et celle du triangle.

451. — Trouver la surface du triangle équilatéral inscrit en fonction de R.

452. — Calculer la surface d'un triangle équilatéral en fonction du rayon R du cercle inscrit.

453. — Trouver le rapport de l'aire du triangle équilatéral inscrit à l'aire du triangle équilatéral.

454. — Trouver le rapport de l'aire de l'hexagone régulier inscrit dans un cercle à l'aire du triangle équilatéral circonscrit au même cercle.

455. — Trouver le rapport de la surface du triangle équilatéral à celle de l'hexagone inscrit dans le même cercle.

456. — Dans le cas où l'on fait $R = 1$, quelle est la surface du cercle, celle du triangle équilatéral et celle de l'hexagone régulier inscrit ?

457. — Calculer à 0,01 près le rayon d'un cercle, sachant que la surface de l'octogone régulier inscrit surpasse de 1^{mq} la surface de l'hexagone régulier inscrit.

458. — Trouver la surface d'un triangle dont le périmètre a 14^m et le rayon du cercle inscrit $1^m,07$.

459. — Trouver une ligne dont la longueur soit égale à $\sqrt{3}$: on sait d'ailleurs que $\sqrt{2}$ est égale à la longueur de la diagonale du carré qui a 1^m de côté.

460. — Sur une droite donnée construire un triangle équivalent à un carré donné.

461. — Construire un carré qui soit les 3/4 d'un carré donné.

462. — Construire sur une base donnée B un triangle isocèle double d'un carré donné.

463. — Construire un carré équivalent à un trapèze donné.

464. — Sur une droite donnée, construire un rectangle équivalent à un rectangle donné.

465. — Sur une droite donnée, construire un rectangle équivalent à un triangle donné.

466. — Construire un carré équivalent à la somme d'un triangle et d'un rectangle.

467. — Construire un carré équivalent à la différence d'un triangle et d'un trapèze dont les dimensions sont données.

468. — Construire sur une base donnée a un rectangle équivalent à la somme d'un triangle et d'un trapèze dont les dimensions sont données.

469. — Sur une base donnée a, construire un triangle équivalent à la différence d'un rectangle et d'un trapèze dont les dimensions sont données.

470. — Construire sur une base donnée a, un triangle dont l'aire soit moyenne proportionnelle entre celles d'un rectangle et d'un trapèze.

471. — Construire la racine de l'équation $x = \dfrac{abc - def}{gh}$.

472. — Construire la racine de l'équation $x = \dfrac{abc - def}{gh - kl}$.

473. — Construire les racines de l'équation $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$.

474. — Construire les racines de l'équation $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}$.

475. — Construire l'équation $x = \dfrac{ab + c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}$.

476. — Construire l'équation $x^2 = \dfrac{a^2 b}{c^2 d}\sqrt{a\left(d + \dfrac{c^2}{m}\right)}$.

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE

données aux Examens du Baccalauréat

(LATIN-SCIENCES ET SCIENCES-LANGUES)

GÉOMÉTRIE PLANE

Commençons par donner la solution de deux problèmes dont les résultats sont de quelque utilité pour résoudre certaines questions proposées aux examens.

I. Problème des trois cordes. — *On connaît dans un cercle de rayon* R, *les cordes* a *et* b *de deux arcs* 2α *et* 2β. *Trouver la corde* m *de la somme* $2\alpha + 2\beta$, *ou la corde* n *de la différence* $2\alpha - 2\beta$ *de ces arcs.*

1er cas. *Corde de la somme des arcs* $(2\alpha + 2\beta)$. — Soient les cordes $AB = a$ et $BC = b$ sous-tendant les arcs 2α et 2β. Menons le diamètre BD ; joignons CD, AD ; nous aurons le quadrilatère inscrit ABCD. Les triangles rectangles BAD, BCD permettent de calculer

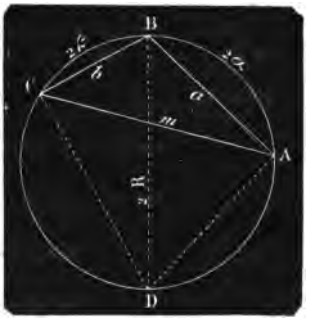


FIG. 1.

$$AD = \sqrt{4R^2 - a^2}$$

et

$$CD = \sqrt{4R^2 - b^2}.$$

Le premier théorème de Ptolémée (359) fournit la relation :

$$2R \times m = a\sqrt{4R^2 - b^2} + b\sqrt{4R^2 - a^2},$$

d'où :

$$(1)\quad m = a\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2R}\right)^2} + b\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2R}\right)^2}.$$

2e cas. *Corde de la différence des arcs* $(2\alpha - 2\beta)$. — Ici, n et 2R sont deux côtés opposés du quadrilatère ABCD.

On a la relation (359) :

$$2R \times n = a\sqrt{4R^2 - b^2} - b\sqrt{4R^2 - a^2},$$

d'où :

$$(2)\quad n = a\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2R}\right)^2} - b\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2R}\right)^2}.$$

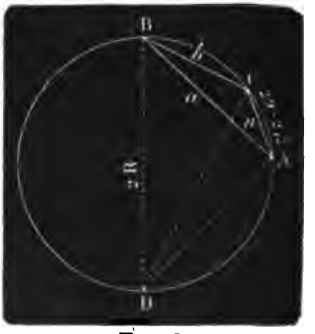


FIG. 2.

Remarque très importante. — On a vu (431) que le sinus d'un arc α est égal à la moitié de la corde qui sous-tend l'arc double 2α.

Ainsi $\frac{a}{2}$ est le sinus de l'arc α ; de même $\frac{b}{2}$ est le sinus de l'arc β.

On aura pour la même raison $\frac{m}{2} = sin\,(\alpha + \quad \frac{n}{2} = sin\,(\alpha - \beta)$.

Divisons par 2 les deux membres des équations (1) et (2) ; de plus, faisons : $R = 1$, il viendra :

$$(3)\quad \frac{m}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

$$(4)\quad \frac{n}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

d'où, $\quad sin\,(\alpha + \beta) = sin\,\alpha\sqrt{1 - sin^2\beta} + sin\,\beta\sqrt{1 - sin^2\alpha}$

et $sin\,(\alpha - \beta) = sin\,\alpha\sqrt{1 - sin^2\beta} - sin\,\beta\sqrt{1 - sin^2\alpha}$.

Or, on a vu (433) que :

$$\sqrt{1 - sin^2\beta} = cos\,\beta \text{ et } \sqrt{1 - sin^2\alpha} = cos\,\alpha.$$

On a donc finalement :

$$(5)\quad sin\,(\alpha + \beta) = sin\,\alpha\,cos\,\beta + sin\,\beta\,cos\,\alpha,$$

$$\text{et } (6)\quad sin\,(\alpha - \beta) = sin\,\alpha\,cos\,\beta - sin\,\beta\,cos\,\alpha.$$

Posons :

$$\alpha' = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

$$sin\,(\alpha' + \beta) = sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right] = cos\,(\alpha - \beta),$$

$$sin\,(\alpha' - \beta) = sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = cos\,(\alpha + \beta),$$

mais,

$$sin\,\alpha' = sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = cos\,\alpha,$$

$$cos\,\alpha' = cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = sin\,\alpha.$$

Les équations (5) et (6) deviennent :

$$sin\,(\alpha' + \beta) = sin\,\alpha'\,cos\,\beta + sin\,\beta\,cos\,\alpha',$$

$$sin\,(\alpha' - \beta) = sin\,\alpha'\,cos\,\beta - sin\,\beta\,cos\,\alpha',$$

ou, à cause des égalités ci-dessus :

$$(7)\quad cos\,(\alpha - \beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta + sin\,\beta\,sin\,\alpha,$$

$$(8)\quad cos\,(\alpha + \beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta - sin\,\beta\,sin\,\alpha.$$

Divisons membre à membre les équations (5) et (8). On a :

$$tg\,(\alpha + \beta) = \frac{sin\,(\alpha + \beta)}{cos\,(\alpha + \beta)} = \frac{sin\,\alpha\,cos\,\beta + sin\,\beta\,cos\,\alpha}{cos\,\alpha\,cos\,\beta - sin\,\beta\,sin\,\alpha}.$$

Divisant les termes du dernier rapport par $\cos\alpha \cos\beta$, on obtient, en simplifiant :

$$(9) \qquad tg(\alpha+\beta) = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\,tg\,\beta}.$$

En opérant d'une manière analogue sur les formules (6) et (7), on trouverait :

$$(10) \qquad tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\,tg\,\beta}.$$

En faisant $\beta = \alpha$ dans les équations (5), (8) et (9), on obtient les formules :

$$(11) \qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$(12) \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$(13) \qquad tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha}.$$

Résultats identiques à ceux que fournit la Trigonométrie.

II. On a deux points fixes A et C, et deux nombres m et n positifs ou négatifs. Trouver le lieu du point O pour lequel on a :

$m \times \overline{OA}^2 + n \times \overline{OC}^2 = K^2$; K^2 *étant une constante.*

Prenons un point B entre A et C ; le théorème de *Stewart* (421) donne la relation :

$$(1) \quad \overline{OA}^2 \times BC + \overline{OC}^2 \times AB - \overline{OB}^2 \times AC = AB \times BC \times AC.$$

Divisant les deux membres par AC, il vient :

$$(2) \qquad \overline{OA}^2 \times \frac{BC}{AC} + \overline{OC}^2 \times \frac{AB}{AC} - \overline{OB}^2 = AB \times BC.$$

Choisissons le point B de façon à ce que l'on ait : $\frac{BC}{m} = \frac{AB}{n} = \frac{AC}{m+n}$

l'équation (2) devient :

$$\overline{OA}^2 \frac{m}{m+n} + \overline{OC}^2 \times \frac{n}{m+n} - \overline{OB}^2 = \frac{mn \times \overline{AC}^2}{(m+n)^2},$$

d'où : $\overline{OA}^2 \times m + \overline{OC}^2 \times n = K^2 = \overline{OB}^2 (m+n) + \frac{mn \times \overline{AC}^2}{(m+n)}$

Ce qui donne : $\overline{OB}^2 = \frac{K^2}{m+n} - \frac{mn \times \overline{AC}^2}{(m+n)^2}.$

La distance $\overline{OB}^2$ est constante, et le point O décrit *une circonférence* dont le centre est le point fixe B.

Remarque. — En donnant à m et à n différentes valeurs, nous retrouvons trois cas particuliers traités précédemment :

1° Faisons : $m = n = 1$; $\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 = K^2$.

On a vu ce résultat, n° 349.

2° Faisons : $m = 1 = -n$; $\overline{OA}^2 - \overline{OC}^2 = K^2$.

On est ainsi reporté au cas du n° 351.

3° Faisons : $m = n_1^2$; $n = -m_1^2$ et $K^2 = 0$,

dès lors $n_1^2 \overline{OA}^2 = m_1^2 \overline{OC}^2$,

d'où $\frac{OA}{OC} = \frac{m_1}{n_1} = C^{te}$.

Ce que nous avons traité au théorème n° 280.

1. — On donne deux droites qui se coupent. On demande le lieu des points tels que le rapport de leurs distances à ces deux droites soit un nombre donné ?
(*Dijon.*)

2. — Sur une droite Ox, trois points fixes O,A,B sont donnés. Déterminer un point M tel que sa distance au point intermédiaire A soit moyenne proportionnelle entre ses distances aux deux autres. — Diverses solutions.
(*Grenoble.*)

3. — Calculer les côtés d'un triangle isocèle connaissant ses hauteurs. Discuter. (*Dijon.*)

4. — Inscrire dans un triangle ABC un rectangle de surface donnée m^2.
Discussion. Application. — $m^2 = 15^{m2}$; a = base BC = 10^m; h = 8^m.
(*Besançon.*)

5. — Dans un cercle donné dont on connaît le rayon, tracer une corde telle que la somme de sa longueur et de sa distance au centre ait une valeur donnée. — Discussion. (*Montpellier.*)

6. — Calculer les côtés et les angles d'un triangle ABC, connaissant les médianes issues des sommets B, C, et la hauteur issue du sommet A.
(*Lille.*)

7. — Dans un triangle ABC, on donne le côté AC = b, le côté AB = c et la longueur AD = d de la bissectrice intérieure de l'angle BAC comprise entre le sommet A et son intersection D avec le côté BC :
1° Calculer la longueur a de ce côté BC; 2° quel doit être d pour que ce problème soit possible. (*Nancy.*)

8. — On donne deux cercles extérieurs de centre A et B et de rayons a et b, c étant la distance des centres, on considère une tangente commune extérieure MN limitée à ses deux points de contact.
1° Trouver le lieu des points d'où l'on voit le segment MN sous un angle droit et montrer qu'il y a sur la ligne des centres deux points appartenant au lieu.
2° Etablir les égalités AP × AP′ = a^2 ; BP × BP′ = b^2.
3° Former et discuter l'équation du second degré qui a comme racines x = AP; x' = AP′. (*Rennes.*)

9. — Un cercle de rayon R est vu de deux points A et B de son plan sous des angles de 90° et de 60° respectivement (c'est-à-dire que les tangentes menées de A font entre elles un angle de 90° et celles menées de B un angle de 60°).
On connaît la distance AB que l'on désigne par a.
1° Calculer les distances OA et OB du centre O aux points A et B ; discuter.
2° Déterminer R de telle sorte que OA soit perpendiculaire à AB.
3° Déterminer R de telle sorte que l'angle OAB soit de 60°. (*Lille.*)

10. — On donne une demi-circonférence de diamètre AB = 2R et de centre O. Par un point C situé sur le diamètre AB entre A et O, on élève une perpendiculaire à AB rencontrant la demi-circonférence en D et l'on joint A à D. Par le point D on mène une parallèle à AB rencontrant la demi-circonférence en E.
Déterminer le point C de telle sorte qu'on ait : $\overline{AD}^2 + DE^2 = K^2$
K^2 étant une quantité donnée. — Discussion. On prendra pour inconnue AC = x. (*Montpellier.*)

11. — On donne une demi-ciconférence ACB et on désigne par OC le rayon perpendiculaire au milieu du diamètre AB. Déterminer sur cette demi-circonférence un point M dont la distance MA au point A surpasse sa distance MD à OC d'une longueur donnée l. Discuter en laissant fixe le rayon R de la demi-circonférence ABC et en faisant varier l. (*Toulouse.*)

12. — On donne un demi-cercle de rayon R limité par le diamètre AB.

Soit M un point quelconque de AB et MC la demi-corde perpendiculaire à AB. Déterminer la longueur AM de façon que l'on ait $\overline{AM}^2 + 4\overline{MC}^2 = K^2$.

K étant une longueur donnée. Discuter. (*Montpellier.*)

13. — On donne un demi-cercle de rayon R décrit sur le diamètre AB. Trouver sur la demi-circonférence un point C tel qu'en le joignant aux points A et B, la somme $m\text{AC} + n\text{BC} = a$; m, n, a étant trois quantités données.

Discussion. (*Toulouse.*)

14. — On donne une circonférence de centre O et de rayon R et deux tangentes parallèles fixes. En un point variable A de la circonférence on mène une tangente qui coupe les tangentes fixes aux points B et C. On demande : 1° d'établir la relation qui existe entre AB et AC ; 2° d'étudier comment varie la surface du triangle BOC lorsque le point A se déplace sur la circonférence. (*Montpellier.*)

15. — On donne une circonférence de rayon R. On inscrit dans cette circonférence un triangle équilatéral, et dans ce triangle équilatéral on inscrit une circonférence. On demande de calculer son rayon. (*Dijon.*)

16. — Inscrire dans un cercle donné, de centre O et de rayon R, un triangle isocèle ABC, sachant que la somme de sa base AB et de sa hauteur CH est égale à une longueur donnée l.

Discussion. (*Toulouse.*)

17. — On considère un triangle équilatéral ABC de côté égal à a. On porte sur les côtés BC, CA, AB des longueurs égales à x et respectivement dans le sens de B vers C, C vers A et A vers B. Soient BA', CB', AC' ces longueurs : 1° Montrer que le triangle A'B'C' est équilatéral ; 2° exprimer sa surface en fonction de a et de x, et étudier les variations de cette surface quand x varie. Valeur de x pour le minimum de cette surface. (*Nice.*)

18. — Dans un triangle ABC rectangulaire en A, l'hypoténuse BC est donnée. On la représentera par a. Soit H le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet A sur BC.

1° Déterminer la longueur y du segment BH de l'hypoténuse en supposant que BA ait une longueur donnée x ;

2° Déterminer x par la condition que la différence BA — BH ait une longueur donnée m ; Discuter. — Faire connaître la plus grande valeur que puisse avoir m. (*Toulouse.*)

19. — D'un point mobile M sur le côté BC du triangle équilatéral ABC (BM $= x$; BC $= a$) on abaisse les perpendiculaires MP, MQ sur les côtés AB, AC.

1° Calculer en fonction de a et de x, AP, AQ, PQ ;

2° Étudier la variation des sommes $\overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2$. — Maximum ou minimum. (*Toulouse.*)

20. — Résoudre un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse a et la surface S.

Discussion. Application. — $a = 50^m$; $S = 600^{m2}$. (*Besançon.*)

21. — Dans un triangle ABC, l'angle A est de 60°, le côté a opposé à A a une longueur de $2^m,50$, enfin la surface est égale à celle d'un triangle équilatéral ayant 2^m de côté.

Calculer à 1 centimètre près les longueurs des côtés b et c. (*Paris.*)

22. — Dans un triangle ABC on donne le côté BC $= a$, la hauteur BH $= h$, la médiane CM $= m$. Calculer les angles ACM, BCM, la surface du triangle, le côté AC et le côté AB. (*Bordeaux.*)

23. — Calculer le côté AB $= x$ d'un triangle ABC, connaissant le côté BC $= a$, l'angle en B, qui est égal à un angle donné α, et sachant que la somme AC + AH du troisième côté et de la hauteur AH est égale à une longueur donnée l.

Discuter. (*Paris.*)

24. — Trouver les angles d'un triangle rectangle sachant que

$$a + 2b = p,\ a + c = q$$

a étant l'hypoténuse, b et c les côtés de l'angle droit.

Discussion. (*Poitiers.*)

25. — Résoudre un triangle connaissant un côté $a = 7948^m$ et les deux angles adjacents à ce côté,

$$B = 75°50',\ C = 38°20'.$$

Calculer la surface de ce triangle. (*Chambéry.*)

26. — Résoudre un triangle rectangle connaissant l'angle α de l'hypoténuse avec la médiane issue du sommet de l'angle droit, et la somme s des longueurs de l'hypoténuse et de la hauteur qui lui est perpendiculaire. (*Dijon.*)

27. — Dans un triangle ABC, l'angle A a pour mesure 50 grades et la hauteur AH issue du sommet A a une longueur de 1^m; on a en outre la relation $tgB = 2tgC$;

On demande de calculer les longueurs des côtés a, b, c du triangle. (*Bordeaux.*)

28. — Dans un triangle rectangle, la hauteur h est égale à la différence des côtés de l'angle droit. On demande de calculer en fonction de h, l'hypoténuse, les côtés de l'angle droit, l'aire et la tangente de l'un des angles aigus. (*Nice.*)

29. — Dans un triangle ABC, on sait que l'angle C est double de l'angle A et que le rapport $\frac{AC}{AB}$ a une valeur donnée, m. Déterminer les angles A, B, C.

Nombre des solutions du problème pour les diverses valeurs de m : condition de possibilité.

Calculer, sans se servir des tables, les angles du triangle quand m est égal à $\frac{2}{\sqrt{3}}$. (*Caen.*)

30. — Les longueurs des côtés d'un triangle sont en progression arithmétique. On donne la raison r de cette progression, ainsi que l'angle A opposé au côté moyen a.

1° Calculer a;

2° Entre quelles limites doit être compris l'angle A pour qu'il y ait des solutions;

3° Vérifier que si A est compris entre ces limites, il existe bien un triangle répondant à la question : les côtés sont positifs et chaque côté est plus petit que la somme des deux autres. (*Grenoble.*)

31. — Calculer les angles d'un triangle sachant que les côtés du triangle sont en progression arithmétique et connaissant l'angle A opposé au côté moyen a.

Maximum de l'angle A.

Calculer les angles B et C en supposant $A = \frac{1}{2}$ droit. (*Chambéry.*)

32. — Les nombres qui mesurent les trois angles d'un triangle sont en progression arithmétique.

1° Déterminer les angles de ce triangle sachant que la somme de leurs sinus est égale à $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

Déterminer les côtés a, b, c du triangle sachant que leur somme est égale à une longueur donnée l. (*Clermont.*)

33. — Dans le triangle ABC, on sait que la médiane issue du sommet A

$$AM = \frac{BC}{2} = l$$

et que

$$\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

Cela posé, on demande de trouver

1° les côtés AB, AC en fonction de l;

2° l'expression de la hauteur AH issue de A, en fonction du côté AB;

3° les angles que forme la bissectrice AD de l'angle A avec la médiane AM et la hauteur AH. (*Besançon.*)

34. — Dans un triangle ABC, on donne $AC = b$, l'angle A et la somme $AB + BC = s$.

1° Calculer c.

2° Calculer la surface du triangle.

3° Supposant donnés seulement b et s, déterminer A de telle façon que le triangle considéré ait une surface égale à K^2.

Considérer en particulier le cas où l'on a :

$$S = 3b,\ K^2 = \frac{2b^2}{3}$$

et calculer A. (*Grenoble.*)

35. — On donne les deux côtés de l'angle droit $AC = b$, $AB = c$ d'un triangle rectangle ABC.

Appelant M le milieu de l'hypoténuse, on prend sur la médiane MA prolongée au delà de A un point D tel que $\frac{MD}{MA} = m$, m étant un nombre donné supérieur à 1.

Calculer les angles ABD, ACD, BDC ainsi que les longueurs BD et CD et l'aire du triangle DBC.

Effectuer les calculs dans l'hypothèse :

$$b = 5^m,7482,\ c = 3^m,4731,\ m = 1,7436.$$

(*Chambéry.*)

36. — Dans un triangle ABC, on connaît la médiane $AD = m$ et les angles $BAD = 45°$, $ABD = 30°$.

Déterminer en fonction de m les longueurs des côtés a, b, c, la hauteur $AH = h$ et l'aire S du triangle.

Application : $m = 20$ mètres; calculer a, b, c, h à $0^m,01$ près, et S à 1 centimètre carré près. (*Paris.*)

37. — Résoudre un triangle connaissant la base a, l'angle opposé A et la différence m des deux autres côtés b et c.

Discuter. (*Toulouse.*)

38. — Calculer les côtés d'un triangle connaissant : un angle A, la hauteur issue du sommet A et la surface du triangle.

Discuter le problème. (*Montpellier.*)

39. — Dans un triangle ABC, on donne $\cot g\, A = 2$; $\cot g\, B = 3$.

1° Calculer tg C, sin C, cos C, et l'angle C sans se servir des tables.

2° On considère le triangle isocèle ABD, dont la base AB est égale à celle du triangle ABC et qui a la même surface que ce triangle.

Calculer les lignes trigonométriques des angles du triangle ABD sans se servir des tables. (*Lille.*)

40. — ABC étant un triangle rectangle en A, dont l'hypoténuse a pour longueur 2 et dont l'angle B est égal à $\frac{\pi}{6}$, trouver sur l'arc BEC du cercle cir-

conscrit, de centre O, un point M dont la somme des distances aux trois côtés du triangle soit égale à une longueur donnée l. — Discuter. On prendra comme inconnue l'angle $x = \text{BOM}$. (*Besançon.*)

41. — En désignant par R le rayon du cercle circonscrit à un triangle, r le rayon du cercle inscrit, S la surface, $2p$ le périmètre, démontrer que l'on a

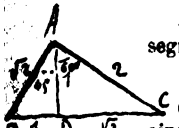
(1) $$S = pr,$$

(2) $$abc = 4RS$$

Cela posé, si les côtés a, b, c forment une progression arithmétique telle que $a < b < c$, établir les relations

(3) $$6Rr = ac,$$

(4) $$tg\,\frac{A}{2}\,tg\,\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$$ (*Besançon.*)



42. — Dans un triangle ABC, on donne la hauteur $AD = 1$ et les deux segments additifs qu'elle détermine sur le côté BC,

savoir : $CD = \sqrt{3}$; $BD = 1$

On demande de calculer tous les éléments du triangle : les angles et les côtés, ainsi que la surface, le rayon R du cercle circonscrit et le rayon r du cercle inscrit.

On ne se servira pas des tables trigonométriques. (*Lille.*)

43. — Dans un triangle ABC de côtés a, b, c, on suppose $b = 2c$, et l'on demande de déterminer la tangente de l'angle A, sachant que la surface du carré construit sur le côté a est triple de la surface du triangle ABC.

Calculer a sachant que $c = \sqrt{5}$. (*Aix.*)

44. — Sur le côté OX d'un angle XOY égal à v, on prend une longueur OA égale à a. On décrit de A comme centre un cercle de rayon R qui coupe la droite OY ou son prolongement en deux points M et N.

1° Calculer les longueurs OM et ON;

2° Calculer la surface du triangle AMN;

3° Calculer le rayon du cercle circonscrit à ce triangle;

4° a et R étant supposés seul donnés, déterminer l'angle v de telle manière que l'angle MAN ait une valeur donnée ω.

A quelle condition le problème est-il possible?

Calculer v dans le cas où l'on a :

$$\text{MAN} = 90^\circ \text{ et } R = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$ (*Grenoble.*)

45. — Étant donné un arc de cercle AMB de rayon R, correspondant à l'angle au centre donné $\text{AOB} = 2\alpha$, déterminer sur cet arc de cercle un point M tel que la corde AM soit égale à l'apothème OH de la corde BM (AM = OH). Entre quelles limites doit être compris α pour que le problème soit possible? Application numérique : $2\alpha = 120^\circ$.

Nota. — On pourra, si on le veut, prendre pour inconnue la moitié d'un des angles AOM ou MOB et déterminer cette inconnue par sa tangente.

(*Paris.*)

46. — Sur un des côtés d'un angle droit de sommet O, on prend, du même côté du point O, deux points A et B, tels que $OA = 2$, $OB = 5$.

1° Déterminer sur l'autre côté de l'angle un point M, tel que l'angle MAO soit égal au double de l'angle MBO.

On calculera la longueur $OM = x$.

2° Déterminer la longueur x de telle façon que l'angle AMB ait une valeur donnée v.

Discussion.

3° Déterminer x de telle façon que la somme AM + BM soit égale à 10.

(*Grenoble.*)

47. — Par le milieu O d'une droite AB, on mène une droite OC qui fait avec AB un angle α.

Calculer la distance OC lorsque l'angle ACB est partagé par OC en deux parties dont l'une est double de l'autre. On désignera par $2a$ la longueur AB, et l'on examinera spécialement le cas où α est égal à 60°. (*Nice.*)

48. — Déterminer sur une demi-circonférence de diamètre AB = 2R un point M tel que a, b et c étant trois nombres positifs donnés, on ait :

$$a \times \overline{AM} + b \times \overline{BM} = c \times \overline{AB}$$

On prendra pour inconnue

$$\text{l'angle } \widehat{MOB} = x.$$

Calculer en degrés ou en grades l'angle MBA dans le cas où l'on aurait :

$$a = \sqrt{2},\ b = \sqrt{6},\ c = 2. \qquad (\textit{Alger.})$$

49. — On considère une circonférence, un diamètre AB de cette circonférence et la tangente BT en B à cette circonférence. Mener par A une sécante coupant la circonférence en un point M et la tangente BT en un point P, de manière qu'on ait la relation $2AM + MP = l$,
où l désigne une longueur donnée. Discussion.

On désignera par a le diamètre de la circonférence et on prendra pour inconnue x l'angle BAM. (*Nancy.*)

50. — On donne deux cercles concentriques C et C′ de rayons R et R′, tels que R′ > R, et une droite DD′ passant par le centre commun O ; et l'on demande de déterminer, d'un même côté de la droite DD′, deux points, l'un M sur la circonférence C, l'autre M′ sur la circonférence C′, tels que l'angle MOM′ soit égal à 45° et que la projection NN′ du segment MM′ sur la droite DD′ soit égale à + 2R en supposant que le sens positif soit fixé sur D.

Pour discuter, on laissera R constant et on fera seulement varier R′. On pourra prendre comme inconnue l'angle N′OM′. (*Lille.*)

51. — On considère deux cercles O et O′ dont les rayons sont R et R′. La distance des centres est égale à d. On désigne par $2u$ l'angle des tangentes communes extérieures, par $2v$ celui des tangentes communes intérieures. Calculer sin u, sin v, sin $2u$, sin $2v$ en fonction de R, R′ et d. Connaissant u, v et la distance d, trouver R et R′. Rendre les formules obtenues calculables par logarithmes. (*Rennes.*)

52. — On considère deux circonférences concentriques de centre O et un rayon indéfiniment prolongé OX.

Soit M un point pris sur OX et à la distance du centre OM = x.

On mène, d'un même côté de OX, la tangente MA à la première circonférence, qui a pour rayon R = 4m et la tangente MB à la seconde qui a pour rayon $r = 3^m$.

Déterminer x de façon que l'on ait $\dfrac{MA}{MB} = m$, m étant un nombre donné plus petit que l'unité.

Trouver ensuite pour quelle valeur de m les triangles OAB et MAB sont semblables et par suite égaux.

Calculer pour cette dernière valeur de m, l'angle AOB, ainsi que la longueur du côté AB. (*Alger.*)

53. — D'un point A on mène deux tangentes AT et AT′ à un cercle de centre O et de rayon R. Les points T et T′ divisent la circonférence en deux arcs

TBT′ et TCT′. Sachant que l'angle TAT′ = 60°, calculer OA, AT, AT′, l'arc TBT′, l'arc TCT′, l'aire ATBT′A, l'aire ATCT′A, et le rayon de la circonférence circonscrite au triangle ATT′. (*Rennes.*)

54. — Étant donné un cercle O de rayon R et une corde AB de longueur $R\sqrt{3}$, on mène dans le grand segment la corde AC faisant avec AB un angle donné α.

On demande :

1° De résoudre le triangle ABC; 2° de déterminer α, de manière que $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = mR^2$, m désignant un nombre positif donné. (*Montpellier.*)

55. — Sur un cercle de centre O et de rayon R, on prend un point fixe A et on mène la tangente en A; sur cette tangente, on prend un point fixe B à une distance donnée a du point A. On joint le point B à un point M mobile sur le cercle :

1° Évaluer BM en fonction de R, de a et de l'angle φ de OM avec OA;

2° Déterminer φ de façon que BM = l, l étant une longueur donnée. Discuter le problème. Examiner le cas particulier où l'on a :

$$l = R\sqrt{5} \text{ et } a = R\sqrt{3}.$$ (*Montpellier.*)

56. — Par un point A pris hors d'un cercle de centre O et de rayon R, on mène une sécante qui rencontre le cercle en M et M′, en faisant avec AO un angle x.

1° Calculer la distance du centre O à cette sécante, et déterminer la condition à laquelle doit satisfaire l'angle x pour que les points M et M′ existent;

2° Calculer x de façon que la corde MM′ ait une longueur donnée $2b$;

3° Calculer les longueurs AM et AM′. (*Grenoble.*)

57. — Soient C un cercle fixe de centre O et P un point fixe. Par les deux points O et P on fait passer un cercle variable C′ qui rencontre le cercle C aux points A et B. En A et B on mène les tangentes au cercle C.

1° Trouver le lieu du point de rencontre M de ces deux tangentes;

2° Démontrer que la droite AB passe par un point fixe. (*Bordeaux.*)

58. — On considère une droite sur laquelle on marque deux points A et B. Un point M se déplace de A en B et l'on construit les triangles équilatéraux AMP, BMQ du même côté de AB.

1° Lieu des points P et Q.

2° Déterminer le point M de manière que PQ ait une longueur donnée l.

3° Etudier la variation de l'aire du triangle PMQ. (*Montpellier.*)

59. — On a dans un plan deux droites parallèles AA′, BB′ et une perpendiculaire commune AB. On donne entre les deux parallèles un point C qui se projette en D sur AB. Une droite mobile passant par C, tourne autour de ce point et rencontre AA′ en M et BB′ en M′. Les données numériques étant les suivantes AD = 2^{cm}; DB = 3^{cm}; DC = 4^{cm}, on demande d'étudier la variation du rapport des aires des trapèzes AMCD, AMM′B. Ce rapport sera exprimé en fonction du segment variable AM que l'on désignera par x. On bornera cette cette étude au cas où les deux trapèzes sont convexes. (*Alger.*)

60. — On donne un hexagone régulier ABCDEF, de côté a. 1° Trouver sur le périmètre de cet hexagone un point M tel que AM divise l'hexagone en deux parties dont les aires soient dans le rapport de 1 à 3.

2° Calculer la longueur AM. (*Poitiers.*)

61. — Calculer les côtés d'un rectangle connaissant les distances p et q d'un même sommet aux milieux des côtés qui sont issus du sommet opposé. Discussion. (*Dijon.*)

62. — Dans un triangle ABC dont la base $BC = 1^m$ et la hauteur $AH = 1^m$, on peut inscrire une infinité de rectangles tels que MNPQ dont les hauteurs $HK = x$ peuvent prendre toutes les valeurs entre $x = 0$ et $x = 1^m$, et l'on demande :

1° L'expression de la base MN du rectangle MNPQ dont la hauteur $HK = x$; 2° l'expression en fonction de x de la surface du rectangle MNPQ; 3° l'étude du mode de variation de cette surface quand x varie de 0 à 1. Tracé graphique représentant ce mode de variation. Valeur de x pour laquelle le rectangle MNPQ a la plus grande surface. (*Alger.*)

63. — On considère un rectangle OACD dont les côtés OA et OB seront désignés par a et b. Par le sommet O, on trace deux droites OM et ON, M étant le point de rencontre de la première avec la droite indéfinie qui contient AC et N étant celui de la seconde avec la droite qui contient BC. Les angles AOM et BON, comptés respectivement à partir de OA et de OB, sont égaux et de sens opposés. Déterminer leur valeur commune x de façon que MN ait une longueur donnée k. Discuter. (*Nancy.*)

64. — Une droite AB dont la longueur est de 6^m est, partagée en deux parties $AM = x$ et $MB = 6 - x$, et l'on demande d'étudier la manière dont varie la somme des surfaces des carrés construits sur les segments AM et MB lorsque x varie de 0 à 6^m. — On construira le graphique auquel conduit cette étude. (*Alger.*)

65. — On donne un point P sur la bissectrice de l'angle droit AOB distant d'une longueur a de OA et de OB.

Par le point P on mène une sécante CPD qui rencontre OA et OB respectivement aux points C et D et l'on désigne par x la distance CE du point C à la projection E de P sur OA.

1° Calculer en fonction de a et de x la longueur PC et le rapport $\frac{PC}{PD}$. En déduire la longueur PD et le produit $PC \times PD$.

2° Déterminer x de façon que le produit $PC \times PD$ ait une valeur donnée K^2.

3° Quelle est la valeur minimum que peut prendre le produit $PC \times PD$, lorsque a étant donné, la sécante CPD tourne autour du point P.

(*Toulouse.*)

66. — On donne sur une droite XY deux points P et Q. Par le milieu O de PQ, on mène une demi-droite OZ. Déterminer l'angle $POZ = x$ qu'elle doit faire avec OP pour que si on désigne par M la projection orthogonale de P sur OZ, on ait

$PM + QM = l$, l étant une longueur donnée.

On posera $OP = OQ = a$. (*Bastia.*)

67. — On donne deux points fixes A et B et une droite indéfinie passant par A et faisant avec AB un angle de 60°. Trouver sur cette droite un point M tel que la somme de ses distances aux deux points A et B ait une valeur donnée $2a$. On fera $AB = 2c$. (*Paris.*)

68. — On donne deux points fixes A, B. Soit O le milieu de AB. Par le point A on mène une demi-droite AZ faisant un angle aigu x avec la direction AB. On projette le point B en C, sur AZ. On construit sur AC et extérieurement au triangle ABC, un triangle équilatéral ACM.

Déterminer l'angle $BAC = x$, de façon que OM soit égal à une longueur donnée l. On posera $OA = OB = a$. Discussion. (*Ajaccio.*)

69. — On donne un angle XOY valant 45°, et sur l'un des côtés de cet angle, du même côté du point O, deux points A et B; on prendra $OA = a$; $OB = b$. Déterminer sur l'autre côté de l'angle un point M tel que la somme des carrés des distances MA et MB ait une valeur donnée c^2. (*Grenoble.*)

70. — On donne deux demi-droites OX, OY, un point P à l'intérieur de l'angle;

$OP = h$, $POX = \alpha$, $POY = \beta$.

Par le point P on mène une droite coupant les deux côtés de l'angle en A et B. Calculer en fonction de $\widehat{OPA} = x$ l'expression $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB}$, et déterminer l'angle x pour que cette expression soit égale à $\frac{n}{h}$, n étant un nombre donné.

Discussion. — Cas où $\alpha = \beta$. (*Poitiers.*)

71. — On donne deux droites parallèles Δ et Δ' et une perpendiculaire commune AA' à ces deux droites, A étant sur Δ et A' sur Δ'. On prend le milieu B de AA' et le milieu C de AB.

Mener par B et C deux droites parallèles MBM', NCN', telles que le périmètre du parallélogramme MNN'M' soit égal à une longueur donnée $2l$. Discussion.

Nota. — On désigne par M et N les points d'intersection des deux parallèles demandées avec Δ, par M' et N' leurs points d'intersection avec Δ'. On appellera $4a$ la distance AA', et l'on prendra pour inconnue l'angle $ABM = x$.

(*Nancy.*)

72. — Calculer les deux bases d'un trapèze isocèle connaissant la longueur a de la diagonale, celle b d'un des côtés non parallèles, et l'angle aigu x de la diagonale avec les bases. Discussion.

Application numérique : Calculer les bases à moins de 1^{cm}, sachant que $a = 5^m$, $b = 3^m$, $x = 30°$. (*Caen.*)

73. — On donne un rectangle ABCD dont les dimensions sont $AB = 32^m$, $AD = 18^m$.

Un point mobile M, parcourt la droite indéfinie AB d'un mouvement uniforme, avec une vitesse de 3^m, et dans le sens DA.

Sachant que le mobile M' passe en D au moment même où M passe en A, on demande d'exprimer, en fonction du temps, l'aire du triangle CM'M et d'en étudier la variation.

L'expression algébrique de cette aire convient-elle au cas où les points M et M' se trouveraient sur les prolongements des côtés AB ou AD? Peut-il arriver que les trois point C, M et M' se trouvent en ligne droite? (*Alger.*)

74. — On donne dans un plan, deux droites reclangulaires X'OX, YOY' et sur la première un point A situé à 50^m à gauche du point O.

Former l'équation du mouvement d'un mobile qui, à l'origine du temps, se trouve au point A et qui est animé d'une vitesse constante de 80^m par minute, dirigée vers la droite : on prend le point O comme origine des distances.

Cela posé, on considère un cercle C de 25^m de rayon, tangent aux demi-droites OX, OY, et un observateur ayant son œil au point B situé sur OY à 100^m du point O.

On demande entre quelles époques le mobile considéré serait invisible pour l'observateur B, en supposant le cercle C opaque. (*Caen.*)

Problèmes du Baccalauréat (MATHÉMATIQUES A).

1. — On donne un cercle de centre O et de rayon R et un point I dans son plan, tel que $OI = 3R$:

1° Déterminer sur OI deux points M et N, situés d'un même côté de O, tels que le point I soit le milieu du segment MN et tels que le produit $OM \times ON$ soit égal à R^2. Calculer OM et ON;

2° Déterminer sur le cercle donné un point P tel que $PM^2 + PN^2 = 2l^2$, l désignant une longueur donnée. Entre quelles limites doit être comprise l pour que le problème soit possible;

3° Calculer en fonction de R et de l le périmètre du triangle PMN et indiquer sa variation lorsque l varie entre les limites trouvées. (*Alger.*)

2. — Soient C un cercle fixe de centre O, P un point fixe donné et AB un diamètre variable du cercle C :

1° Démontrer que le centre du cercle circonscrit au triangle PAB décrit une droite, et que ce cercle passe par un point fixe;

2° Les droites PA, PB coupent le cercle C en deux autres points A'B'; démontrer que le cercle circonscrit au triangle PA'B' passe par un point fixe, et que la droite A'B' passe également par un autre point fixe. (*Bordeaux.*)

3. — On donne dans un plan, deux points A et B; soit Δ la droite perpendiculaire à AB et passant par le milieu O de AB; soit M un point variable de Δ. Le cercle passant par A, B, M coupe Δ en un second point P; soit Q le milieu de OP. On demande d'étudier la variation de la longueur MQ quand M se déplace sur Δ. (*Dijon.*)

4. — On donne sur un cercle de centre C un point A et un autre point B situé sur le diamètre CA. On joint le point A à un point M du cercle; le point B au point M' diamétralement opposé sur le cercle; trouver le lieu du point de rencontre P des deux droites obtenues AM, BM', lorsque le point M se déplace sur le cercle. (*Clermont.*)

5. — On donne une circonférence de rayon R, un diamètre BC et un point A sur ce diamètre, à une distance a du centre O de la circonférence. On demande de mener par le point A, une sécante MN de façon que la surface du quadrilatère BMNC soit maximum. (*Dijon.*)

6. — On considère deux axes rectangulaires Ox, Oy, deux circonférences, l'une de rayon a tangente en O à Ox, l'autre de rayon b tangente en O à Oy, et enfin une droite Δ qui tourne autour du point O.

La droite Δ rencontre les deux circonférences en A et en B, qui se projettent en A' et B' sur Ox. Étudier la variation de la longueur du segment A'B'.

(*Besançon.*)

7. — On donne une circonférence de centre O et de rayon R, et un point A extérieur situé à la distance a du centre. On mène le diamètre OA qui coupe en B et en C la circonférence, et une sécante qui la coupe en D et E. On demande :

1° D'évaluer l'aire du quadrilatère en fonction de la distance $OP = x$ du centre O à la sécante ADE;

2° D'égaler à zéro la dérivée de cette aire par rapport à la variable x;

3° de montrer qu'on obtient la même équation en écrivant que la projection de DE sur BC est égale au rayon R. (*Dijon.*)

8. — On donne un angle Θ et une circonférence de rayon R inscrite dans cet angle. On mène ensuite une tangente quelconque à cette circonférence. Cette tangente coupe les côtés de l'angle en deux points situés à distances x et y du sommet. On demande quelle relation existe entre x et y. (*Dijon.*)

9. — La droite BC est perpendiculaire au diamètre OA d'une demi-circonférence. Un rayon vecteur OPM rencontre BC en P et la demi-circonférence en M. Un autre rayon vecteur rencontre BC en P′ et la demi-circonférence en M′. On suppose $OP' = OM$, prouver que $OP = OM'$.

Soient $OA = a$, $OB = b$, x l'angle $\widehat{MOA}$, x' l'angle $\widehat{M'OA}$; trouver une relation entre les angles x, x' et les longueurs a et b.

Calculer l'angle x dans le cas particulier où $b\sqrt{2} = a$ et $x' = x$.

(*Poitiers.*)

10. — Étant donné un demi-cercle de diamètre $AB = 2R$, trouver sur ce demi-cercle un point P tel qu'en abaissant la perpendiculaire PM sur le diamètre AB, on ait, l étant un nombre donné,

$$2AM - AP = l$$

Discuter.

Entre quelles limites varie $2AM - AP$ lorsque P parcourt le demi-cercle ?

Application. — Calculer AM à 1 centimètre près, sachant que l'on a $l = R = 1^m$. (*Grenoble.*)

11. — Sur un cercle de centre O et de rayon R on considère deux cordes issues d'un même point A du cercle et faisant avec OA des angles α et β. Une autre corde quelconque coupant les premières en B et en C est définie par sa distance a au point O et par l'angle x que font les perpendiculaires abaissées de O sur AB et sur BC.

On demande les expressions des côtés et de l'aire du triangle ABC.

(*Montpellier.*)

12. — Étant donnés un cercle de rayon R et un point intérieur A, à la distance a du centre O, on considère un quadrilatère BCB′C′ inscrit dans le cercle et dont les diagonales BB′, CC′ se coupent au point A; l'angle BAC a une valeur donnée, 2φ, moindre que $\frac{\pi}{2}$: soit AD sa bissectrice.

Calculer l'aire du quadrilatère BC B′C′ en fonction de R, a et φ et de l'angle OAD qu'on désignera par x; chacun des angles x et 2φ est mesuré par l'arc qu'il intercepte sur une circonférence de rayon 1 ayant son centre en A.

Montrer comment l'aire considérée varie avec x. (*Caen.*)

13. — Un cercle de centre O′ et de rayon r est intérieur à un cercle de centre O et de rayon R; la distance des centres est d.

En un point A du cercle O′ on mène une tangente qui coupe le cercle O en B et C. Déterminer l'angle α que doit faire cette tangente avec la ligne des centres OO′ pour que le rapport $\frac{AB}{AC}$ soit égal à une quantité donnée que l'on représentera par $\frac{K+1}{K-1}$. Discuter.

(*Lille.*)

14. — On donne deux circonférences de même centre O et de rayon a et b ($a < b$).

On considère un point fixe A sur la circonférence de rayon a. Par ce point on mène une demi-droite faisant l'angle x avec OA, coupant en I la circonférence de rayon a et en M la circonférence de rayon b.

On mène en I à la circonférence intérieure la tangente limitée en P et Q par la circonférence extérieure :

1° Calculer en fonction de l'angle x et des données l'aire du triangle PMQ ;

2° Dans le cas où $b = a\sqrt{2}$, déterminer l'angle x de façon que cette aire soit égale à ma^2, m étant un nombre donné. Discuter par rapport à m :

3° Déterminer, dans la même hypothèse $(b = a\sqrt{2})$, la valeur de m pour laquelle le quadrilatère APMQ est un parallélogramme. (*Alger.*)

15. — On donne une circonférence de centre O et un point P extérieur à cette circonférence. En un point A de la circonférence on mène la tangente qui rencontre le diamètre OP au point B.

On demande d'étudier la variation de l'aire du triangle PAB quand l'angle POA varie de 0° à 180°.

Représentation graphique de cette variation.

Nota. — On désignera par R le rayon de la circonférence et par a la distance OP. On posera

$$\widehat{POA} = \varphi. \qquad (Bordeaux.)$$

16. — Dans un cercle de rayon R, est inscrit un triangle isocèle BAC (AB = AC), dans lequel l'angle au sommet BAC est égal à $2x$.

Calculer en fonction de x, les côtés AB, BC et le rayon r du cercle inscrit.

Étudier la variation de r quand x varie ; déterminer le maximum de r et la valeur correspondante de x. (*Paris.*)

17. — EBC est un triangle rectangle en E. Sur la hauteur EH comme diamètre on décrit une circonférence qui coupe EB en A et EC en D. On mène la droite AD qui coupe EH en O. On désigne EH par 2R et l'angle HOA par φ.

1° Calculer les angles, les côtés, les diagonales et l'aire du quadrilatère ABCD ;

2° Prouver qu'il existe une circonférence passant par les points ABCD et montrer qu'elle coupe EH en deux points indépendants de l'angle φ.

(*Bordeaux.*)

18. — Dans un triangle équilatéral ABC on prend le milieu O de la hauteur issue du sommet A. On mène par ce point O trois droites OP, OQ, OR qui rencontrent le périmètre du triangle aux points P, Q, R et qui partagent la surface du triangle en trois surfaces équivalentes.

Calculer la somme des carrés

$$\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 + \overline{OR}^2$$

lorsque le point P est au milieu de l'un des côtés du triangle.

Étudier la variation de cette somme lorsque le point P parcourt le périmètre du triangle. (*Nice.*)

19. — Un triangle isocèle varie de manière que son sommet O, point de rencontre des deux côtés égaux OA et OB, soit fixe, la longueur commune donnée l de ces deux côtés OA et OB restant constante. On admet de plus que, en désignant par $\widehat{xOA} = a$, $\widehat{xOB} = b$ les angles que font avec une direction fixe Ox les côtés OA et OB du triangle dans chacune de ses positions, on a constamment le produit $tg\,\frac{a}{2} \times tg\,\frac{b}{2} = K$, K étant une constante positive. On demande de montrer que le troisième côté, AB, du triangle passe par un point fixe C, et de déterminer ce point. (*Lyon.*)

20. — Un triangle isocèle OAB, de base AB égale à 2 et d'angle au sommet AOB égal à 60°, tourne dans son plan et dans un sens donné, autour de son

sommet O supposé fixe. Calculer l'angle x que fait la hauteur OH du triangle avec une droite fixe OX, issue du sommet O, au moment où la distance AC du point A à cette droite XX′ prend une valeur égale à un nombre donné n. Discuter.

Application : $n = \sqrt{3}$. (*Nancy.*)

21. — Un triangle ABC parcouru dans l'ordre alphabétique de ses sommets correspond à une *rotation à droite*. Soient α, β, γ les valeurs de ses angles.

Une figure plane glissant dans son plan qui est aussi celui du triangle se déplace par trois *rotations à droite*, rotations respectivement égales à α, β, γ et exécutées respectivement et dans l'ordre indiqué : 1° autour de A ; 2° autour de la position B_1 occupée après la première rotation par le point de la figure d'abord situé en B ; 3° autour de la position C_2 occupée après les deux premières rotations par un point de la figure d'abord situé en C.

On demande de préciser la grandeur et le centre de la rotation *équivalente* à ces trois déplacements successifs. (*Besançon.*)

22. — On donne un triangle équilatéral ABC dans lequel le côté est égal à a et un point F sur le côté BC à la distance b du sommet B.

Tracer une parallèle DE à BC, telle que le segment DE, intercepté dans l'angle A, soit vu du point F sous un angle droit, c'est-à-dire que l'angle DFE soit droit. Discussion. (*Toulouse.*)

23. — On donne dans un triangle le côté a, la hauteur correspondante h et le rayon r du cercle inscrit.

1° Déterminer l'angle A opposé à a et les deux autres côtés b et c du triangle. On ne demande pas de rendre les formules calculables par logarithmes ;

2° Construire le triangle ;

3° Discuter en regardant h comme variable, les autres données restant fixes.

(*Grenoble.*)

24. — Connaissant les côtés d'un triangle isocèle, calculer le rayon de la circonférence inscrite, le rayon de la circonférence circonscrite, et la distance des centres de ces deux circonférences. En déduire la relation qui existe entre les deux rayons et la distance des centres. (*Montpellier.*)

25. — Dans un triangle on donne un angle et le rayon du cercle inscrit ; on demande la relation qui existe entre les côtés de ce triangle qui comprennent l'angle donné. (*Dijon.*)

26. — Résoudre un triangle dont on donne un angle A, le rayon R du cercle circonscrit et le rayon r du cercle inscrit. Discuter en supposant r et R fixes et en faisant varier A ; montrer que pour que le problème soit possible, le rapport des deux quantités R et r ne doit pas être pris arbitrairement. Indiquer une construction géométrique du triangle. (*Toulouse.*)

27. — Dans un triangle ABC on donne la base BC $= a$, l'angle A et la différence δ des angles B, C :

1° Calculer les angles B, C et les côtés b, c ;

2° Calculer le carré de la médiane issue du sommet A, en fonction de a, A, δ ;

3° Désignant ce carré par y, faisant $x = \cos A$ et supposant $\delta = 60°$, étudier comment y varie avec x, et construire la courbe qui donne cette variation en la limitant à sa partie utile. (*Ajaccio.*)

28. — Construire un triangle connaissant un côté a, la somme $b + c$ des deux autres côtés, et le rayon r du cercle inscrit. Discussion.

Calculer l'angle A, lorsque $a = 2$, $b + c = 5{,}8$, $r = 0{,}7$.

(*Bordeaux.*)

29. — Étant donné un triangle équilatéral ABC, on prend sur la base BC un point P situé à une distance du pied H de la hauteur AH égale à cette hauteur (HP = AH); et par ce point P, on mène une droite quelconque qui rencontre en R le côté AB, et en S le côté AC.

1° Exprimer les longueurs BR et CS en fonction du côté a du triangle équilatéral ABC et de l'angle $x = \widehat{BPR}$;

2° Transformer les expressions trouvées de manière que l'angle x n'y figure que par sa tangente;

3° Étudier les variations de la différence $y = BR - CS$, lorsque la sécante PR tourne autour du point P (depuis la position initiale PB jusqu'à la position finale PA). (*Lyon.*)

30. — Dans un triangle ABC, l'angle A est égal à 120°, le côté AB = 5 et le côté AC = 3 :

1° Calculer le côté BC;

2° Sur la bissectrice indéfinie $x'x$ de l'angle A, on prend un point M tel que AM = x. Étudier les variations du rapport $\frac{MB}{MC}$. → Maximum et minimum;

3° Démontrer que les points M', M'' qui correspondent au maximum et au minimum du rapport $\frac{MB}{MC}$ sont le centre du cercle inscrit et le centre du cercle ex-inscrit dans l'angle A au triangle ABC. (*Toulouse.*)

31. — Étudier la variation de la surface d'un trapèze birectangle, sachant que l'un des deux côtés parallèles a une longueur constamment égale à a, et le périmètre une longueur constamment égale à $4a$. (*Caen.*)

32. — Par le sommet C d'un triangle ABC, on mène une droite CX sur laquelle on abaisse, des sommets A et B des perpendiculaires. Déterminer la position de la droite CX de manière que le trapèze ainsi construit ait une surface donnée m^2. Discuter. (*Poitiers.*)

33. — ABCD est un trapèze isocèle, AB est la grande base et AC = BD. On pose :

$$AB = 2a, \quad AC = b, \quad \widehat{BAC} = x:$$

1° Calculer la surface du trapèze en fonction de a, b, x;

2° Calculer la dérivée de S en fonction de x;

3° Étudier la variation de S quand x croît de 0° à 90°.

(*Montpellier.*)

34. — On donne les deux bases $2a$ et $2b$ d'un trapèze isocèle et la valeur commune c des deux autres côtés.

Calculer les angles du trapèze, les diagonales, l'angle Θ que font entre elles les diagonales et le rayon R du cercle circonscrit.

Entre quelles limites doit être compris le rapport $\frac{a}{b}$ des deux bases.

1° Si l'on suppose c moyenne arithmétique entre a et b;

2° Si l'on suppose c moyenne proportionnelle entre a et b?

Calculer d et R en supposant $a = 4^m$, $b = 9^m$, $c = 6^m$. (*Grenoble.*)

35. — Soit un angle XOY = α; sur le côté OX, on donne deux points fixes A et B, tels que OA = a, et OB = b, puis, sur le côté OY, on considère un point variable M dont la distance au point O est représentée par x = OM.

Étudier la variation du rapport $\frac{MA}{MB}$ $\left(\text{ou de son carré } \frac{\overline{MA}^2}{\overline{MB}^2}\right)$ quand le point M parcourt la droite indéfinie OY. Dessiner le graphique représentant cette variation avec les données

$$a = 3,\ b = 5,\ tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Désignant par M′ et M″ les points de OY pour lesquels le rapport $\frac{MA}{MB}$ atteint son maximum et son maximum et par I le milieu de M′M″, exprimer en fonction de a, b, α, la distance OI et vérifier que l'on a :

$$IM' = IM'' = IA = IB.$$

Montrer enfin qu'il existe une valeur de x pour laquelle le rapport $\frac{MA}{MB}$ reste constant quand même α varierait de o à π, de sorte que le point M décrirait une circonférence de centre O. (*Alger.*)

36. — Un angle BAC de valeur constante et donnée A pivote dans un plan autour de son sommet A, qui reste fixe. Les longueurs des côtés AB, AC varient ensemble de telle façon que l'aire du triangle ABC demeure équivalente à celle d'un carré de côté donné K.

1° Quel est le lieu géométrique décrit par le poids C lorsque le point B décrit soit une droite fixe X, soit une conférence δ passant par le point A ?

2° Quelles seront les longueurs $AC = b$, $AB = c$ des côtés de l'angle BAC lorsque le troisième côté BC du triangle aura une longueur donnée a ? En appelant φ l'angle aigu défini par $tg\,\varphi = \frac{a^2}{4K^2}$, rendre logarithmiques les expressions de $\frac{b+c}{2}$ et $\frac{b-c}{2}$.

Minimum de a pour des valeurs données de A et de K. Valeurs de b et c correspondant à ce minimum de a.

Calculer b et c en supposant que le cosinus de l'angle A est égal à $0,25 = \frac{1}{4}$, que le côté K du carré équivalent au triangle est égal à $1^m,437$ et que le côté a est égal à $3^m,26$. (*Grenoble.*)

37. — Deux points lumineux fixes A, B dont on désignera la distance mutuelle par a, éclairent un point M. Les intensités lumineuses des points A et B sont égales et la lumière totale reçue par le point M est égale à la somme des inverses des carrés des distances AM et BM.

Le point M parcourt une droite parallèle à AB.

Cette droite passe par un point C, équidistant des points A et B et situé à une distance b de chacun d'eux.

On désignera par x la distance variable CM.

Étudier la variation de l'intensité de la lumière que reçoit le point B.

Déterminer ses maxima et minima ; discuter les diverses circonstances qui peuvent se présenter suivant la valeur du rapport de CA à AB.

(*Toulouse.*)

LIVRE V

PLAN ET LIGNE DROITE

CHAPITRE PREMIER

Détermination d'un plan. — Droite et plan perpendiculaires. — Propriétés de la perpendiculaire et des obliques menées d'un même point à un plan.

§ Ier. — DÉTERMINATION D'UN PLAN

Définitions.

495. — On sait (29) que le *plan* est une surface telle, qu'elle contient tout entière la droite qui joint deux de ses points pris à volonté.

D'après cette définition, une droite et un plan ne peuvent occuper dans l'espace que trois positions relatives :

1° Une droite telle que AB peut avoir deux points dans le plan P; alors elle y est contenue tout entière;

2° Une droite telle que CD peut n'avoir qu'un point O de commun avec le plan P; alors le point O où la droite rencontre le plan, est le *pied* de la droite sur le plan;

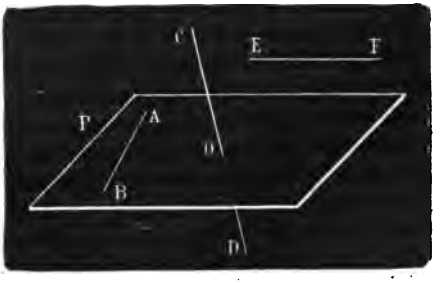


FIG. 348.

3° Une droite telle que EF peut n'avoir aucun point de commun avec le plan P; c'est, par conséquent, une *parallèle* à ce plan.

Deux plans sont *parallèles* lorsqu'ils ne peuvent se rencontrer, à quelque distance qu'on les prolonge.

Le plan a une étendue illimitée; mais, pour faciliter les démonstrations et fixer les idées, on le représente par des figures limitées, ordinairement par un parallélogramme.

THÉORÈME

496. — *Par une droite on peut faire passer une infinité de plans différents.*

Soit, en effet, la droite AB : si l'on suppose que l'on fasse coïncider avec AB une droite menée dans un plan quelconque P, ce plan P passera par AB. Or, si l'on fait tourner P autour de AB, il prendra des positions P_1, P_2..., qui seront autant de plans différents passant par AB.

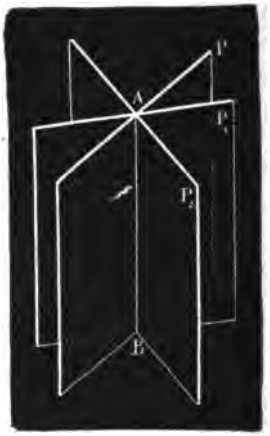


FIG. 349.

Une porte qui tourne sur ses gonds rend très sensible la démonstration de ce théorème, puisque chaque position qu'elle occupe détermine un plan nouveau passant par ses points d'appui.

Deux points, ou une droite, ne suffisent donc pas pour déterminer la position d'un plan.

THÉORÈME

497. — *Par deux droites qui se coupent, on peut faire passer un plan et on ne peut en faire passer qu'un seul.*

Soient les deux droites AB, AC qui se coupent au point A. Imaginons un plan contenant la droite AB; si nous le faisons tourner autour de cette droite, il rencontrera dans son mouvement le point C; alors sa position sera complètement déterminée, et la ligne AC, qui aura deux points, A et C, dans ce plan, s'y trouvera tout entière. Il y a par conséquent un plan passant par les deux droites données.

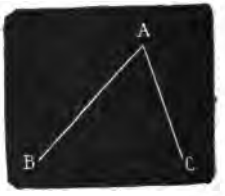


FIG. 350.

Ce plan est d'ailleurs le seul qui puisse passer par les deux droites données; car, si on continue à le faire tourner autour de AB, il cessera de contenir le point C, et, par suite, la droite AC.

498. Corollaire I. — *Une droite* AB *et un point extérieur* C (*fig.* 350) *déterminent un plan;* car, si l'on mène AC, on rentre dans le cas de deux droites qui se coupent.

Donc, *une droite mobile qui s'appuie sur une droite fixe et passe par un point fixe extérieur engendre un plan.*

499. Corollaire II. — *Trois points* A, B, C (fig. 350), *non en ligne droite, déterminent un plan;* car, si on joint le point A aux points B et C, on aura encore deux droites AB, AC qui se coupent et qui, par conséquent, déterminent la position d'un plan.

500. Corollaire III. — *Deux parallèles* AB, CD *déterminent la position d'un plan.* Ces parallèles sont dans un même plan (93), et l'on ne peut en concevoir un autre qui les contienne toutes les deux, car, par les trois points A, B, C, non en ligne droite et situés sur ces deux lignes, on ne peut faire passer qu'un seul plan.

FIG. 351.

Donc, *une droite mobile s'appuyant sur deux droites fixes parallèles ou concourantes engendre un plan.*

THÉORÈME

501. — *L'intersection de deux plans est une ligne droite.*

En effet, si trois points seulement de cette intersection pouvaient ne pas être en ligne droite, les deux plans qui auraient ces trois points de communs se confondraient, ce qui serait contre l'hypothèse.

§ II. — DROITE ET PLAN PERPENDICULAIRES

Définitions.

502. — Une droite est dite *perpendiculaire* à un plan lorsqu'elle est perpendiculaire à toutes les droites que l'on peut mener par son pied dans ce plan. Réciproquement le plan est dit perpendiculaire à la droite.

Une droite non perpendiculaire à un plan est *oblique* à ce plan.

THÉORÈME

503. — *Une droite, dans l'espace, peut être perpendiculaire à autant de droites qu'on voudra, passant toutes au même point de cette droite.*

Soit, en effet, la droite AB. On peut faire passer par AB une infinité de plans (496) et mener dans chacun d'eux une perpendiculaire à AB en un point quelconque B. Par exemple, BC sera perpendiculaire dans le plan ABC, BD, dans le plan ABD... Donc, *une droite, dans l'espace,* etc.

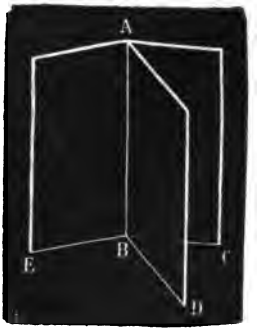


FIG. 352.

THÉORÈME

504. — ***Lorsqu'une droite est perpendiculaire à deux autres droites passant par son pied dans un plan, elle est perpendiculaire à ce plan.***

Soit la droite AB perpendiculaire à deux autres droites BC, BD passant par son pied dans le plan P. La droite AB sera évidemment perpendiculaire au plan P, si nous montrons que cette droite est perpendiculaire à toute autre droite BE menée par son pied dans ce plan.

Pour le prouver, prolongeons AB d'une quantité BF = AB; puis menons dans le plan P une droite CD qui rencontre les lignes BC, BE, BD; enfin, joignons les points d'intersection C, E, D aux points A et F.

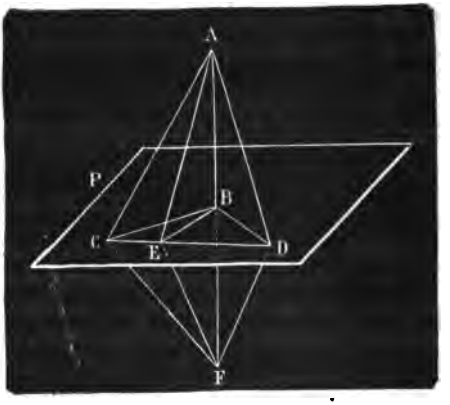


FIG. 353.

Les deux triangles CDA, CDF sont égaux, car ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun, savoir CD commun; AC = CF, comme obliques qui s'écartent également du pied B de la perpendiculaire CB à AF; AD = DF, comme obliques qui s'écartent également du pied B de la perpendiculaire DB à AF. Mais de l'égalité des triangles CDA, CDF, on conclut celle des angles ACE, ECF et, par suite, celle des triangles CEA, CEF, car ils ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun : l'angle ACE = ECF, le côté CE est commun et AC = CF. Les deux triangles ACE et CEF étant égaux, on a AE = EF. Donc le triangle AEF est isocèle, et la droite EB qui joint le sommet E au milieu B de la base AF est perpendiculaire sur cette base. C. q. f. d.

505. Corollaire. — *Si, par un point* O *d'un plan* P, *on mène d'un même côté de ce plan une perpendiculaire* OA *et une oblique* OB, *ces deux droites forment entre elles un angle aigu.*

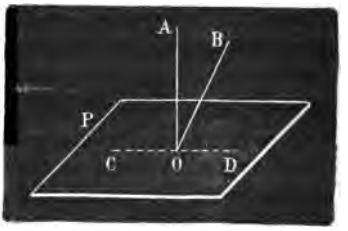


FIG. 354.

En effet, le plan de ces deux droites coupe le plan P suivant une droite CD ; or, la droite OA est perpendiculaire à CD et OB lui est par conséquent oblique. Comme les droites OA et OB sont du même

côté par rapport à CD, il en résulte que OB tombe dans l'un des deux angles droits formés par OA avec CD : donc l'angle AOB est aigu.

THÉORÈME

506. — *Toutes les perpendiculaires menées, dans l'espace, en un même point d'une droite sont contenues dans un même plan perpendiculaire à cette droite.*

En effet, soient les droites BC, BD, BE,... perpendiculaires au point B de AB. Le plan P conduit par les deux droites BC, BD est perpendiculaire à AB (504). Il suffit donc de prouver que ce plan contient toutes les autres perpendiculaires. Or, si BE, l'une quelconque, n'était pas dans le plan P, le plan mené par les deux droites AB, BE, couperait le plan P suivant une droite BF qui serait perpendiculaire à AB (504); mais alors dans le plan ABE on aurait au point B deux perpendiculaires BE, BF à la même droite AB, ce qui est impossible. Donc la perpendiculaire BE est aussi dans le plan P.

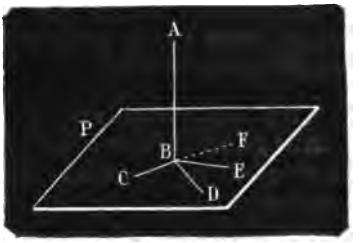


FIG. 355.

507. Corollaire. — *Le plan* P *est le lieu des perpendiculaires élevées au point* B *de la droite* AB.

Donc, *une perpendiculaire* BC *en un point* B *d'une droite* AB, *en tournant autour de cette droite, engendre un plan qui lui est perpendiculaire.*

THÉORÈME

508. — *Par un point donné, on peut mener un plan perpendiculaire à une droite donnée et on ne peut en mener qu'un seul.*

Il y a deux cas à considérer : le point donné est sur la droite ou hors de cette droite.

1° Soit O un point quelconque de la droite AB.

Elevons au point O deux perpendiculaires à la droite AB : l'une, OC, dans le plan AOC ; l'autre, OD, dans le plan AOD. Le plan COD contenant deux perpendiculaires passant par le point O sera lui-même perpendiculaire à AB (504), et, comme il contient toutes les perpendiculaires au point O de AB (506), la droite AB sera oblique à tout autre plan passant par le point O.

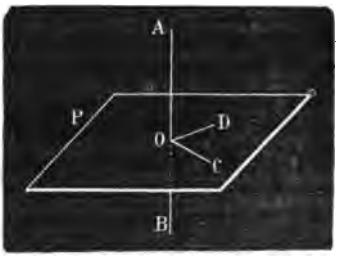


FIG. 356.

2° Soit le point O pris hors de la droite AB.

Du point O, abaissons sur AB la perpendiculaire OC qui détermine le plan ACO; puis menons par le même point C et dans un autre plan quelconque ACD la perpendiculaire CD à la droite AB. Le plan P mené par les deux droites CO, CD est perpendiculaire à AB (504). Mais, comme par ces deux droites on ne peut faire passer qu'un plan P, ce plan est le seul que l'on puisse mener par le point O perpendiculairement à AB.

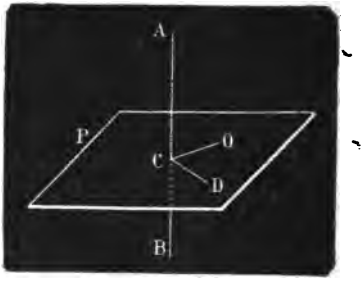


FIG. 357.

509. Corollaire. — *Le lieu des points de l'espace également distants des extrémités d'une droite est un plan perpendiculaire au milieu de cette droite.*

Soient une droite AB et M un point quelconque du lieu. Les droites MA, MB étant égales, le triangle AMB est isocèle et la médiane MO est perpendiculaire à la base AB. Tous les points tels que M sont donc, dans le plan P, perpendiculaires au milieu O de AB.

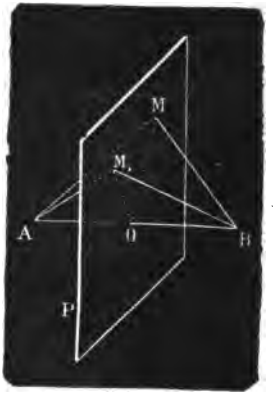


FIG. 358.

510. — Réciproquement, *tout point* M_1 *du plan fait partie du lieu,* car, la droite M_1O étant perpendiculaire au milieu de AB, les obliques M_1A, M_1B sont égales.

THÉORÈME

511. — *Par un point donné on peut mener une droite perpendiculaire à un plan donné et on n'en peut mener qu'une* (fig. 359).

Il y a deux cas à considérer : le point donné est dans le plan ou hors du plan.

1° Soit O le point donné dans le plan M. Menons dans ce plan et par le point O une droite quelconque AB. La perpendiculaire en O, au plan M, doit être perpendiculaire à AB; mais elle doit, en outre, être contenue dans le plan P perpendiculaire au point O de AB. Soit CD la trace du plan P sur le plan M. La perpendiculaire cherchée doit être aussi perpendiculaire en O à CD. Si donc nous traçons, dans le plan P, une droite OE perpendiculaire à CD, cette droite est aussi perpendiculaire au plan M (504), et c'est la seule droite du plan P perpendiculaire au point O de CD (71).

2° Soit le point O donné hors du plan M (*fig.* 360).

Traçons dans le plan M une droite quelconque BD; puis menons par le point O le plan OBC perpendiculaire à cette droite. Soit BC son intersection avec le plan M. Dans le plan OBC, abaissons du point O la perpendiculaire OE sur BC : cette droite OE sera perpendiculaire à toute autre droite DE du plan M et par conséquent perpendiculaire à ce plan. En effet, prenons sur le prolongement de OE une longueur EO′ égale à EO et tirons les droites OB et OD, O′B et O′D. La droite BD étant, par construction, perpendiculaire au plan OBC, les angles OBD, O′BD sont droits, et, par suite, les triangles BDO, BDO′ sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir : l'angle droit du premier triangle égal à celui du second, le côté BD commun aux deux triangles et les côtés BO, BO′ égaux comme droites s'écartant également de BE perpendiculaire sur le milieu de OO′. Il résulte de l'égalité de ces triangles que DO est égal à DO′. Le triangle ODO′ est donc isocèle, et, comme conséquence, la droite DE qui joint son sommet D au milieu de sa base OO′ est perpendiculaire à cette base. La droite OE étant perpendiculaire aux deux droites BC et DE qui passent par son pied dans le plan M est perpendiculaire à ce plan.

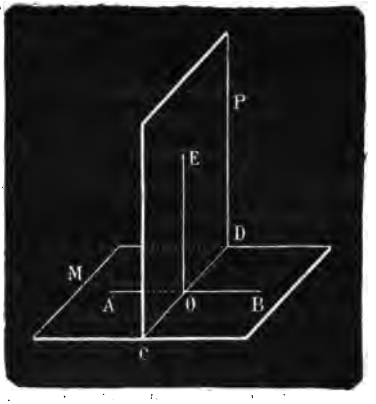


FIG. 359.

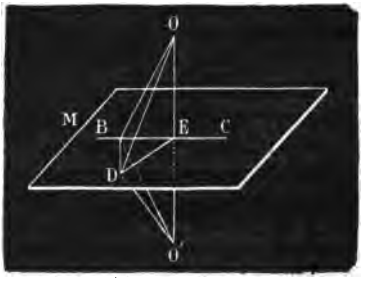


FIG. 360.

Toute autre droite OD, menée du point O jusqu'à la rencontre du plan M, est oblique à ce plan; car, si l'on trace la droite DE, on obtiendra le triangle ODE, dans lequel l'angle OED est droit, puisque OE est perpendiculaire au plan M : donc l'angle ODE est aigu; et, par suite, la droite OD est oblique au plan M. Du point O, on ne peut donc abaisser qu'une seule perpendiculaire OF au plan M.

512. Remarque. — Nous rappelons ici que la *projection d'un point* sur un plan est le *pied* de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan.

§ III. — PROPRIÉTÉS DE LA PERPENDICULAIRE ET DES OBLIQUES MENÉES D'UN MÊME POINT A UN PLAN

THÉORÈME

513. — *Si d'un point extérieur à un plan on mène une perpendiculaire et différentes obliques :*

1° *La perpendiculaire est plus courte que toute oblique;*

2° *Deux obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales;*

3° *De deux obliques qui s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, la plus longue est celle qui s'en écarte le plus.*

1° La perpendiculaire AB au plan P est plus courte que l'oblique AC; car la droite AB perpendiculaire au plan P l'est aussi à la droite BC menée par son pied dans ce plan; par suite, le triangle ABC est rectangle en B. On a donc : $AB < AC$.

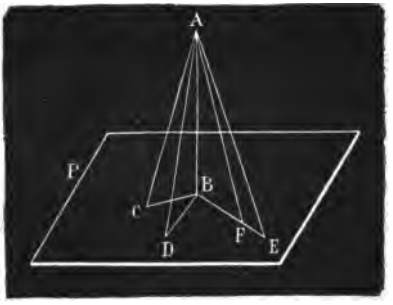


FIG. 361.

2° Soient les obliques AC, AD et telles que $BC = BD$. Les triangles ABC, ABD, rectangles en B, sont égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun : donc $AC = AD$.

3° Soit $BE > BD$. Prenons sur BE une longueur $BF = BD$, on aura (2°) $AF = AD$; mais dans le plan ABE, des deux obliques AE et AF, AE est la plus longue, donc on a $AE > AD$.

514. Corollaire I. — *La perpendiculaire abaissée d'un point sur un plan mesure la distance de ce point à ce plan;* car c'est la plus courte distance du point au plan.

515. Corollaire II. — *Le lieu des pieds des obliques égales, menées d'un point à un plan, est une circonférence dont le centre est la projection du point sur le plan.*

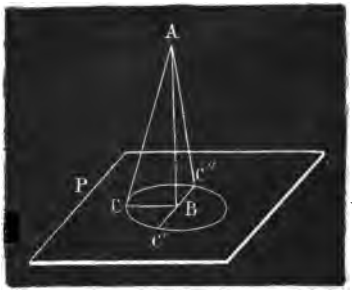


FIG. 362.

En effet, soient AC, AC', AC'',... des obliques égales, menées du point A au plan P. Les distances des pieds C, C', C'',... au point B,

projection du point A, sont égales : ces pieds sont donc sur une même circonférence dont le centre est B.

516. — **Réciproquement,** *un point quelconque* C′ *de cette circonférence fait partie du lieu;* car les obliques AC et AC′ sont égales, puisque BC = BC′.

Il résulte de là que, pour abaisser d'un point A une perpendiculaire AB sur un plan P, il suffit de prendre sur le plan P trois points C, C′, C″ également distants du point A : le centre du cercle passant par ces trois points sera le pied B de la perpendiculaire AB.

517. Corollaire III. — *Le lieu des points de l'espace également distants de trois points donnés est une droite perpendiculaire au plan de ces trois points.*

En effet, soit M un point du lieu. Alors, on a : MA = MB = MC. Soit O la projection du point M sur le plan P des trois points A, B, C. Le point O est à égale distance de A, B, C (516); par suite, tous les points du lieu seront sur la perpendiculaire élevée par le centre O de la circonférence passant par A, B, C.

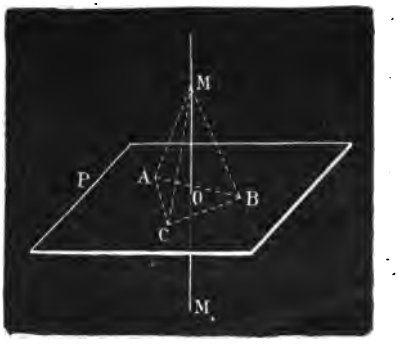


FIG. 363.

Réciproquement, tout point M_1 de cette perpendiculaire fait partie du lieu; car les distances M_1A, M_1B, M_1C sont égales comme obliques s'écartant également du pied de la perpendiculaire M_1O.

THÉORÈME

518. — *Si du pied d'une perpendiculaire à un plan on mène une perpendiculaire à une droite du plan, toute droite joignant le pied de la seconde perpendiculaire à un point de la première est perpendiculaire à la droite du plan.*

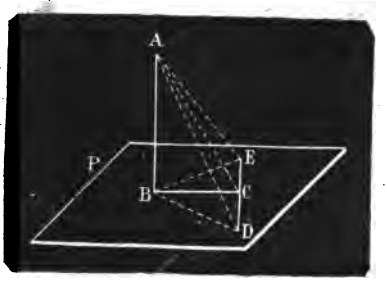


FIG. 364.

Soient AB la perpendiculaire au plan P, BC la perpendiculaire menée par son pied B sur DE, droite quelconque du plan P. Il s'agit de démontrer que la droite AC qui joint le point C à un point arbitraire de AB est perpendiculaire sur E. D

A cet effet, faisons CD = CE et joignons les points D et E aux points B et A : les obliques BD, BE s'écartant également du pied C de la perpendiculaire BC sont égales; par suite (513, 2°) AD = AE; le triangle ADE est donc isocèle, et la droite AC qui joint le sommet au milieu de la base est une perpendiculaire.

Ce théorème est fréquemment désigné sous le nom de *théorème des trois perpendiculaires* (AB, BC, AC).

519. Remarque. — La droite DC, étant perpendiculaire aux droites BC et AC, est, par suite, perpendiculaire au plan BAC (504).

CHAPITRE II

Parallélisme des droites et des plans.

THÉORÈME

520. — *Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une l'est aussi à l'autre.*

Soit le plan M perpendiculaire à AB. Il faut prouver que ce plan est aussi perpendiculaire à une droite quelconque CD parallèle à AB.

En effet, les parallèles AB, CD déterminent un plan P qui rencontre le plan M, suivant la droite BD. Mais AB perpendiculaire au plan M est également perpendiculaire à BD : donc CD, parallèle à AB, dans le plan P, est aussi perpendiculaire à BD.

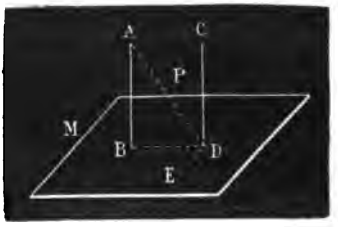


FIG. 365.

Montrons que CD est perpendiculaire à une autre droite du plan M.

A cet effet, traçons, dans ce plan, ED perpendiculaire à BD, elle sera aussi perpendiculaire à toute droite AD du plan P (518) et, par conséquent, perpendiculaire à ce plan. Donc, l'angle CDE est droit, et CD perpendiculaire à BD et à ED du plan M est perpendiculaire à ce plan.

THÉORÈME

521. — *Deux droites perpendiculaires à un plan sont parallèles* (fig. 366).

En effet, soient AB et CD perpendiculaires au plan M. Si ces droites n'étaient point parallèles, on pourrait mener, par le point D, une parallèle à AB qui serait, d'après le théorème précédent, perpendiculaire au plan M : par un même point D, on pourrait donc élever deux perpendiculaires à un même plan, ce qui est impossible. Donc, les droites AB, CD sont parallèles.

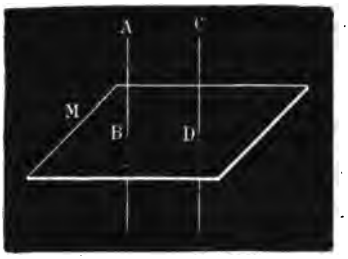


FIG. 366.

THÉORÈME

522. — *Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.*

Soient A et B respectivement parallèles à C. Si un plan quelconque M est perpendiculaire à la droite C, il sera perpendiculaire à chacune des droites A et B : donc ces droites sont parallèles entre elles.

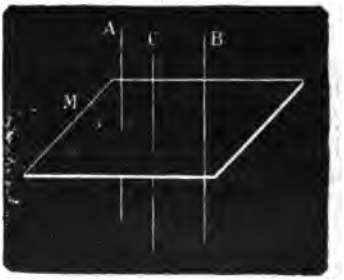


FIG. 367.

THÉORÈME

523. — *Une droite parallèle à une autre droite située dans un plan est parallèle à ce plan.*

En effet, soit la droite AB parallèle à la droite CD contenue dans le plan M. La droite AB étant dans le plan ABCD des parallèles AB, CD, ne pourra rencontrer le plan M sans rencontrer CD; mais AB ne peut rencontrer sa parallèle CD : donc AB parallèle à CD est aussi parallèle au plan M.

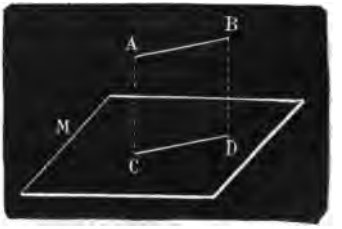


FIG. 368.

THÉORÈME

524. — *Si par une droite parallèle à un plan on fait passer un second plan qui coupe le premier, l'intersection est parallèle à la droite.*

Soient AB parallèle au plan M et CD l'intersection du plan M avec un plan P contenant la droite AB. Il faut démontrer que CD est parallèle à AB. En effet, la droite CD étant dans le plan M, il arrive que AB ne peut la rencontrer sans rencontrer aussi ce plan, ce qui est impossible, puisque, par hypothèse, AB est parallèle au plan M : donc AB est parallèle à CD.

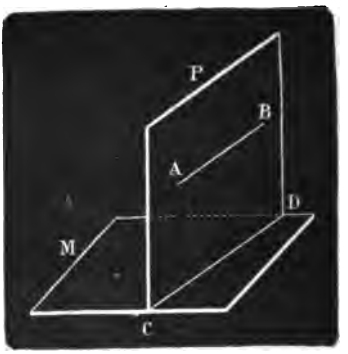


FIG. 369.

THÉORÈME

525. — *Si par un point d'un plan parallèle à une droite on mène une parallèle à cette droite, elle est tout entière dans le plan.*

En effet, soit la droite AB parallèle au plan M qui contient le point C. Le plan P déterminé par la droite AB et le point C coupe le plan M suivant une droite parallèle à AB (524). Cette droite n'est autre que CD menée par le point C parallèlement à AB, puisque par ce point, dans le plan M, on ne peut mener qu'une seule parallèle à AB.

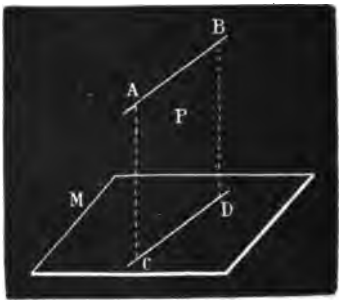


FIG. 370.

526. Corollaire. — *L'intersection de deux plans parallèles à une droite est parallèle à cette droite.*

Soit AB l'intersection des plans M et P, tous deux parallèles à la droite EF.

Si par un point A de l'intersection on mène une parallèle à EF, cette parallèle devra être contenue dans le plan M et dans le plan P, puisque tous deux sont parallèles à EF : donc elle ne sera autre que leur intersection AB.

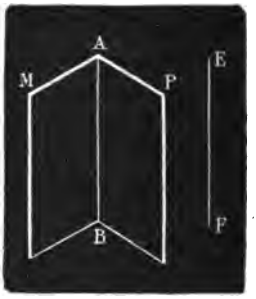


FIG. 371.

THÉORÈME

527. — *Deux plans perpendiculaires à la même droite sont parallèles.*

En effet, si ces plans avaient un point de commun, on pourrait par ce point mener deux plans perpendiculaires à la même droite, ce qui est impossible (508).

THÉORÈME

528. — *Le lieu des parallèles à un plan* M, *menées par un point* A, *est un plan* P *parallèle au plan* M.

Soit AB une parallèle quelconque au plan M, menée par le point A. Abaissons la perpendiculaire AC sur le plan M et faisons passer un plan par les deux droites AB, AC. Sa trace CD sur le plan M sera parallèle à AB et perpendiculaire à AC : donc AB, parallèle à CD, est aussi perpendiculaire à AC (524). Il résulte de là que toute parallèle au plan M, menée par le point A, est perpendiculaire à AC, elle est donc contenue dans le plan P perpendiculaire au point A de AC.

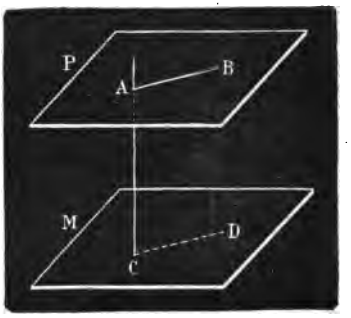


FIG. 372.

529. — **Réciproquement,** toute droite menée par le point A, dans le plan P, est parallèle au plan M. Donc le lieu des parallèles au plan M, menées par le point A, est le plan P passant par le point A et parallèle au plan M.

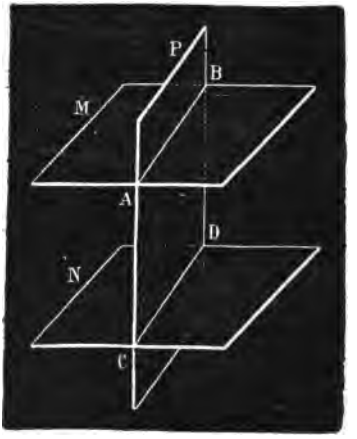


FIG. 373.

THÉORÈME

530. — *Les intersections de deux plans parallèles par un troisième sont parallèles.*

En effet, soient M et N deux plans parallèles et AB, CD les intersections de ces deux plans par un troisième P. Les droites AB, CD sont situées dans le même plan P, elles ne peuvent d'ailleurs se rencontrer, puisqu'elles sont dans des plans parallèles : donc elles sont elles-mêmes parallèles.

THÉORÈME

531. — *Si deux plans sont parallèles, toute perpendiculaire à l'un l'est aussi à l'autre.*

Soit la droite AB perpendiculaire au plan M. Montrons qu'elle est aussi perpendiculaire au plan P.

A cet effet, menons dans le plan P, par le point B, une droite quelconque BC qui sera parallèle au plan M. Le plan des droites AB, BC coupera le plan M suivant la trace AD qui sera parallèle à BC (530). Or, AB étant perpendiculaire au plan M est perpendiculaire à AD située dans ce plan : donc AB est aussi perpendiculaire à BC, parallèle à AD. Mais, comme BC a été menée quelconque dans le plan P, AB est perpendiculaire à ce plan.

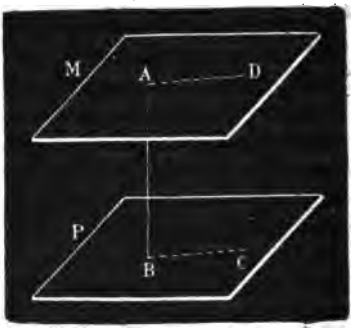


FIG. 374.

532. Corollaire. — *Deux plans* M *et* N *parallèles à un troisième* P *sont parallèles entre eux*, car, si l'on mène une perpendiculaire au plan P, elle le sera aussi aux plans M et N, qui sont par conséquent parallèles, comme perpendiculaires à une même droite.

THÉORÈME

533. — *Par un point, on peut mener un plan parallèle à un autre plan, et on ne peut en mener qu'un seul.*

Soient un point A et M un plan quelconque. Du point A, abaissons sur le plan M la perpendiculaire AB, et menons par le point A le plan P perpendiculaire à la droite AB. Ce plan est parallèle au plan M (527); il est d'ailleurs le seul qui, passant par le point A, puisse être parallèle au plan M; car par le point A on ne peut mener qu'un seul plan perpendiculaire à la droite AB (508).

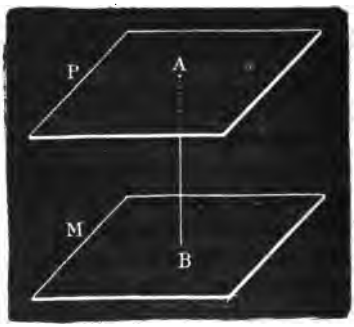


FIG. 375.

THÉORÈME

534. — *Les portions de droites parallèles comprises entre deux plans parallèles sont égales* (fig. 376).

En effet, soient AB et CD les portions de parallèles comprises entre les plans parallèles M et N. Le plan des parallèles AB, CD coupe les plans M, N suivant les droites AC, BD qui sont parallèles (530); donc la figure ABCD est un parallélogramme et AB = CD.

535. Corollaire. — *Deux plans parallèles sont partout également distants*, car nous pouvons supposer que les parallèles AB, CD sont deux perpendiculaires.

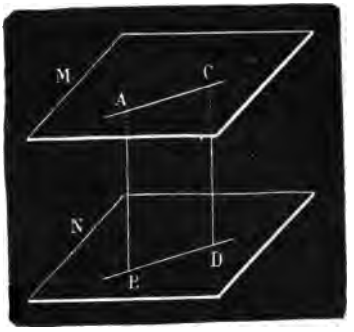


FIG. 376.

THÉORÈME

536. — *Deux angles non situés dans un même plan qui ont les côtés respectivement parallèles sont égaux ou supplémentaires et leurs plans sont parallèles* (fig. 377).

1° Soient BAC et EDF deux angles qui ont les côtés parallèles chacun à chacun. Pour prouver que ces angles sont égaux, faisons AB = DE, AC = DF, et menons AD, BE, CF, BC, EF. Les droites AB, DE étant parallèles par hypothèse et égales par construction, la figure ABED est un parallélogramme et AD = BE. On prouverait de même que AD = CF; les droites BE, CF étant égales et parallèles à une troisième AD sont égales et parallèles entre elles; par conséquent, la figure CBEF est un parallélogramme ; donc BC = EF. Les deux triangles ABC, DEF ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun sont égaux, et l'angle BAC = EDF.

FIG. 377.

Les angles BAC et GDF qui ont aussi les côtés parallèles sont supplémentaires; car GDF est le supplément de EDF et par conséquent de BAC.

2° Le plan BAC est parallèle au plan DEF ; car les droites AB, AC étant chacune parallèle à une droite du plan EDF sont parallèles à ce plan (523); elles sont de plus situées dans le même plan mené par le point A parallèlement au plan EDF (528).

537. Remarque. — On voit sans difficulté que les angles donnés sont égaux, s'ils ont leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens ou en sens contraire, tandis qu'ils sont supplémentaires si deux de leurs côtés sont dirigés dans le même sens et les deux autres en sens contraires. C'est ce qu'on a déjà vu en géométrie plane.

THÉORÈME

538. — *Les droites rencontrées par trois plans parallèles sont partagées dans un même rapport* (fig. 378).

Soient K et L, deux droites quelconques rencontrées aux points A, B, C, D, E, F par les trois plans parallèles M, N, P.

Il faut prouver qu'on a :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

A cet effet, menons AH parallèle à la droite L. Le plan des droites AC, AH rencontre les plans parallèles N et P suivant les droites BG, CH qui sont parallèles (530); or, le triangle ACH, dans lequel BG est parallèle à CH, donne :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GH}.$$

mais (534) AG = DE et GH = EF. D'où l'égalité cherchée :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

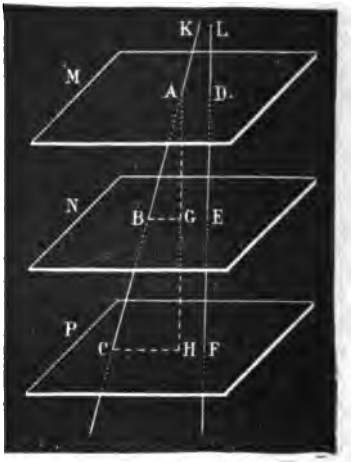


FIG. 378.

CHAPITRE III

Angle dièdre. — Dièdre droit. Angle plan correspondant à un dièdre. Rapport de deux angles dièdres.

§ I. — ANGLE DIÈDRE. — DIÈDRE DROIT

Définitions.

539. — On appelle *angle dièdre*, ou simplement *dièdre*, la figure formée par deux plans qui se coupent et se terminent à leur commune intersection.

Ainsi (*fig.* 379), les deux plans CB, DB sont les *faces* du dièdre et leur intersection AB en est l'*arête*. Un livre entr'ouvert présente l'image d'un dièdre.

En général, on désigne un dièdre par quatre lettres en mettant les deux de l'arête au milieu. Par exemple, on dit le dièdre CABD. Lorsque le dièdre est isolé, qu'il n'y a par conséquent pas lieu à confusion, on le désigne par les deux lettres de l'arête. Par exemple, on dit le dièdre AB. Dans le cas où les deux plans ne sont pas limités à leur intersection, il y a quatre angles dièdres de formés (*fig.* 380).

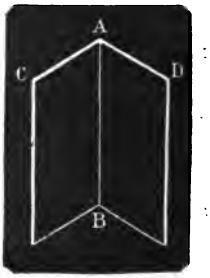


FIG. 379.

La grandeur d'un dièdre ne dépend pas de l'étendue de ses faces, supposées illimitées, mais seulement de leur écartement.

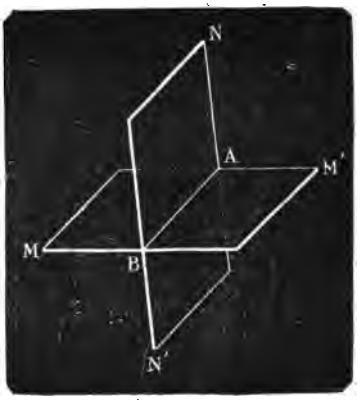


FIG. 380.

540. Sens d'un dièdre. — Un dièdre est orienté dans le sens *direct* lorsque l'observateur ayant la tête en A et les pieds en B (*fig.* 379) dans l'intérieur du dièdre, a le côté AC à sa droite et le côté AD à sa gauche. Autrement, le dièdre est dit rétrograde.

541. — On dit que deux dièdres sont *adjacents* lorsqu'ils ont même arête et une face commune intermédiaire. Ainsi, les deux dièdres PABN et NABM (*fig.* 381) sont adjacents, car ils ont même arête AB et une face commune N intermédiaire entre les plans M et P.

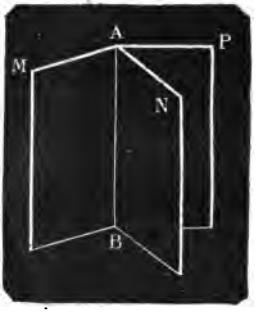


FIG. 381.

On appelle *angles dièdres opposés par l'arête* deux dièdres tels que les faces de l'un sont les prolongements, au delà de l'arête, des faces de l'autre. Les deux dièdres NABM, N'ABM' (*fig.* 380) sont opposés par l'arête.

Deux dièdres sont égaux lorsqu'ils sont superposables.

542. — Lorsqu'un plan P (*fig.* 382) coupe un plan MN suivant une droite AB, il forme, d'un même côté de ce plan, deux dièdres PABN, PABM. Si ces dièdres sont inégaux, ce qui a lieu le plus souvent, on dit que le plan P est *oblique* au plan MN ; s'ils sont égaux, le plan P est *perpendiculaire* au plan MN.

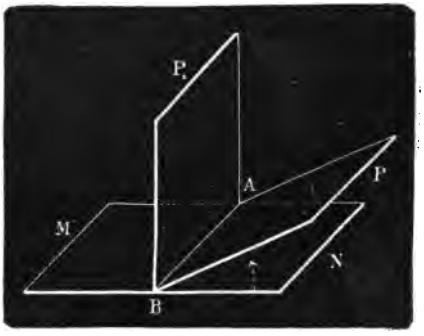


FIG. 382.

Un dièdre est *droit* lorsqu'une de ses faces est perpendiculaire à l'autre.

THÉORÈME

543. — *Par une droite d'un plan, on peut mener un second plan perpendiculaire au premier, et on n'en peut mener qu'un seul.*

Soient la droite AB dans le plan MN et le plan P mobile autour

de AB. Supposons que le plan P, d'abord couché sur la partie ABN du plan MN, se relève et tourne dans le sens indiqué par la flèche jusqu'à ce qu'il vienne rencontrer l'autre partie ABM du plan MN. Le dièdre PABN, nul d'abord, croîtra d'une manière continue, tandis que le dièdre adjacent PABM diminuera constamment jusqu'à devenir nul. Or, parmi toutes les positions occupées par le plan P, il est évident qu'il y en a *une* et *une seule* P_1 pour laquelle les deux dièdres P_1ABN, P_1ABM sont égaux. C'est dans cette seule position que le plan P_1 est perpendiculaire au plan MN.

544. Corollaire. — *Tous les dièdres droits sont égaux.*
Démonstration identique à celle du n° 43.

545. Remarque. — Tous les dièdres droits étant égaux, le *dièdre droit* peut être choisi pour *unité* de mesure des dièdres.

THÉORÈME

546. — *La somme de deux angles dièdres dont les faces extérieures forment un même plan vaut deux dièdres droits.*

Voir le n° 45 pour la démonstration.

547. Corollaire I. — *La somme de tous les angles dièdres* PABN, P_1ABP, P_2ABP_1... *formés autour d'une même arête* AB (fig. 383) *située dans le plan* MN *et d'un même côté de ce plan, vaut deux dièdres droits* (48).

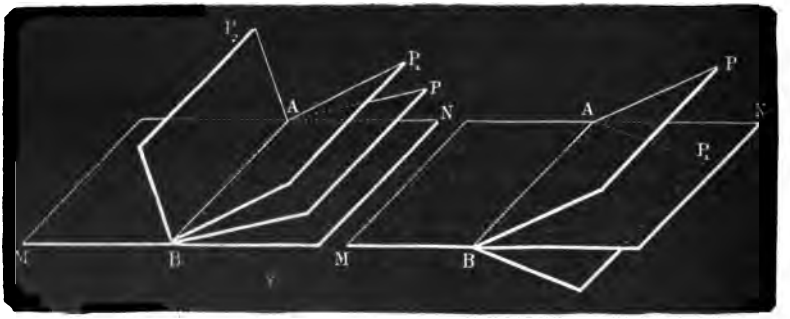


FIG. 383. FIG. 384.

548. Corollaire II. — *La somme de tous les angles dièdres* PABN, $NABP_1$... *formés autour d'une même arête* AB (fig. 384), *et occupant tout l'espace, vaut quatre dièdres droits* (49).

THÉORÈME *réciproque.*

549. — *Si deux angles dièdres adjacents sont supplémentaires, leurs faces extérieures sont dans un même plan* (50).

THÉORÈME

550. — *Lorsqu'un plan est perpendiculaire sur un autre, réciproquement celui-ci l'est sur le premier* (47).

THÉORÈME

551. — *Deux dièdres opposés par l'arête sont égaux* (51).

552. Corollaire. — *Lorsque deux plans se coupent en formant quatre angles dièdres, si l'un de ces dièdres est droit, tous les quatre le sont.*

§ II. — ANGLE PLAN CORRESPONDANT A UN ANGLE DIÈDRE

553. Définition. — On appelle *angle plan* ou *angle rectiligne* correspondant à un dièdre donné, l'angle formé par deux perpendiculaires menées en un même point de l'arête du dièdre et dans chacune de ses faces. Ainsi l'angle GHI formé par les perpendiculaires GH dans le plan AF et IH dans le plan AE, est l'angle rectiligne correspondant au dièdre AB.

Cet angle est le même, quel que soit le point de l'arête que l'on choisisse; car deux angles tels que GHI, MON formés de cette manière ont leurs côtés parallèles et sont égaux (536).

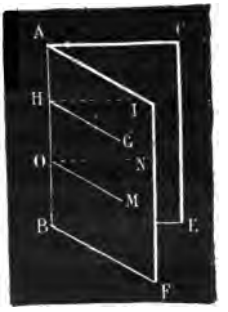


FIG. 385.

THÉORÈME

554. — *Lorsque deux dièdres sont égaux, leurs angles plans sont aussi égaux et réciproquement.*

Soient les deux dièdres égaux AB, A′B′ ayant pour angles plans CBD et C′B′D′. Il faut démontrer que ces angles plans sont égaux.

A cet effet, portons le dièdre A′B′ sur le dièdre AB, la face A′B′C′ sur la face ABC, de manière que l'arête A′B′ soit sur l'arête AB et le point B′ au point B. La face A′B′D′ coïncidera avec la face ABD; car, s'il en était autrement, le dièdre A′B′ serait ou plus petit ou plus grand que le dièdre AB, ce qui n'est pas. Les faces des dièdres coïncidant et l'arête A′B′ étant sur l'arête AB, la perpendiculaire C′B′ à A′B′ se confondra avec la per-

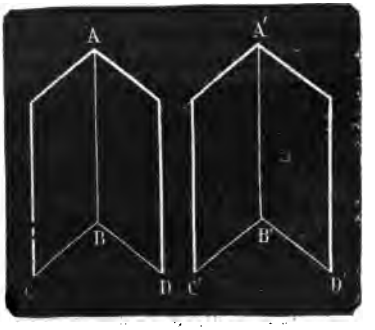


FIG. 386.

pendiculaire CB à AB, il en sera de même de D'B' et DB ; par conséquent, les angles plans CBD, C'B'D' coïncideront et seront égaux.

555. - **Réciproquement,** soient CBD, C'B'D' deux angles plans égaux. Démontrons que les dièdres AB et A'B' sont égaux.

En effet, portons la face A'B'C' sur la face ABC, de manière que l'arête A'B' soit sur l'arête AB, le point B' au point B et le côté B'C' sur le côté BC; dans cette position, la face A'B'C' se confondra avec la face ABC (498). Mais, à cause de l'égalité des angles plans CBD, C'B'D', le côté B'D' s'appliquera sur le côté BD, et les deux faces A'B'D', ABD se confondront aussi et par suite les deux dièdres : donc ils seront égaux.

556. Remarque. — Au lieu de démontrer directement, comme en géométrie plane, les théorèmes que nous avons énoncés plus haut, on pourrait encore les considérer comme étant, pour la plupart, des *corollaires* du théorème qui vient d'être démontré. Ainsi, par exemple :

Deux dièdres opposés par l'arête sont égaux, car, en les coupant par un plan perpendiculaire à l'arête, on obtient deux angles rectilignes égaux comme opposés par le sommet.

Pour le même motif, on peut dire que :

Si deux plans parallèles sont rencontrés par un troisième :

1° *Les dièdres alternes internes sont égaux ;*

2° *Les dièdres alternes externes sont égaux ;*

3° *Les dièdres, etc.*

Cette proposition et sa réciproque se démontrent encore directement comme en géométrie plane.

Voici enfin une autre proposition qui découle aussi très directement du même théorème : *Le lieu des points également distants des deux faces d'un dièdre est le plan bissecteur du dièdre.*

En effet, si l'on coupe, en un point quelconque, l'arête du dièdre par un plan qui lui soit perpendiculaire, on voit immédiatement que l'on se trouve dans le cas de la bissectrice d'un angle rectiligne.

THÉORÈME

557. — *L'angle rectiligne d'un dièdre droit est un angle droit, et réciproquement.*

Soit le dièdre droit PABM formé par le plan P perpendiculaire sur le plan MN. Les dièdres adjacents PABM, PABN sont égaux par hypothèse. Si donc nous construisons les angles rectilignes COE, COF de ces dièdres, ils seront égaux aussi et par conséquent droits.

558. — **Réciproquement,** si l'on suppose droit l'angle rectiligne COE, son adjacent, l'angle rectiligne COF, sera droit aussi.

Les dièdres PABM, PABN, ayant des angles rectilignes égaux, sont égaux, et sont, par suite, des dièdres droits.

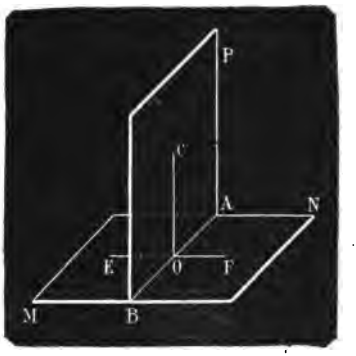


FIG. 387.

559. Remarque. — Nous pouvons encore déduire de ce théorème que :

1° *Les angles dièdres droits sont égaux*, puisque les angles plans correspondants le sont ;

2° *Si un plan est perpendiculaire sur un autre, réciproquement celui-ci l'est sur le premier*, puisque les angles plans correspondants sont quatre angles droits.

§ III. — RAPPORT DE DEUX ANGLES DIÈDRES

THÉORÈME

560. — *Le rapport de deux angles dièdres est le même que celui de leurs angles plans.*

Soient les dièdres AB, CD dont les angles plans correspondants sont EBI, KDN. Il faut démontrer que :

$$\frac{\text{Dièdre AB}}{\text{Dièdre CD}} = \frac{\text{EBI}}{\text{KDN}}.$$

En effet, supposons que les angles plans EBI, KDN aient une commune mesure EBF et que cette commune mesure soit contenue quatre fois dans EBI et trois fois dans KDN. Ces deux angles seront entre eux comme les nombres 4 et 3, et nous aurons :

$$\frac{\text{EBI}}{\text{KDN}} = \frac{4}{3}.$$

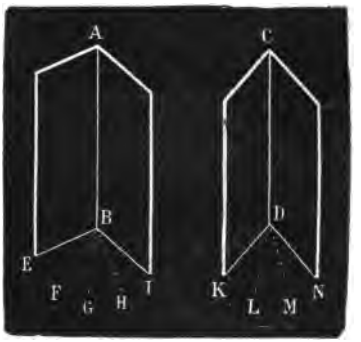


FIG. 388.

Si nous menons les plans ABF, ABG, ABH et les plans CDL, CDM, les dièdres AB, CD seront partagés l'un et l'autre en petits dièdres tous égaux entre eux comme correspondant à des angles plans égaux. Mais quatre de ces dièdres sont contenus dans AB et trois dans CD : donc ces dièdres sont entre eux comme les nombres 4 et 3,

d'où :

$$\frac{\text{Dièdre AB}}{\text{Dièdre CD}} = \frac{4}{3}.$$

A cause du rapport commun $\frac{4}{3}$, on a donc enfin :

$$\frac{\text{Dièdre AB}}{\text{Dièdre CD}} = \frac{\text{EBI}}{\text{KBN}}.$$

561. Remarque. — Cette démonstration étant indépendante de la commune mesure EBF serait encore rigoureuse dans le cas où cette commune mesure serait plus petite que toute quantité appréciable, et, par conséquent, dans le cas où les dièdres seraient incommensurables.

On peut d'ailleurs donner une démonstration identique à celle du n° 222, pour le cas où les dièdres n'ont pas de commune mesure.

562. Mesure des angles dièdres. — Les dièdres étant dans le même rapport que les angles plans qui leur correspondent, ceux-ci pourront servir de mesure aux premiers. Voilà pourquoi on dit qu'*un angle dièdre a pour mesure l'angle plan correspondant.* Un dièdre s'évaluera par conséquent en degrés, minutes et secondes comme l'angle plan qui le mesure.

L'unité des angles dièdres est (545) le *dièdre droit*, qui vaut 90° puisqu'il correspond à l'angle plan droit.

CHAPITRE IV

Plans perpendiculaires entre eux. — Angle d'une droite et d'un plan.

---

§ Ier. — PLANS PERPENDICULAIRES ENTRE EUX

THÉORÈME

563. — *Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite de l'un, perpendiculaire à leur intersection, est perpendiculaire à l'autre.*

Soient les plans M et P perpendiculaires entre eux et AB leur intersection. Soit, d'autre part, une droite quelconque CD du plan P,

perpendiculaire sur AB. Il s'agit de démontrer que CD est aussi perpendiculaire au plan M. A cet effet, menons du point D la perpendiculaire DE à AB : l'angle plan CDE correspond au dièdre droit PABN, donc l'angle plan CDE est droit aussi; par suite, CD perpendiculaire à AB et à DE est perpendiculaire au plan M.

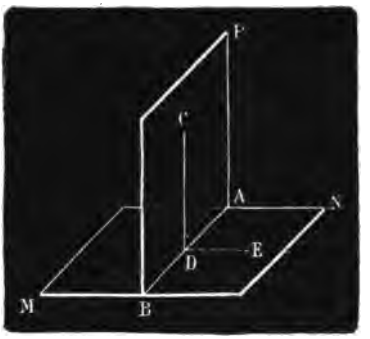


FIG. 389.

THÉORÈME

564. — *Si deux plans sont perpendiculaires et que d'un point de l'un on abaisse une perpendiculaire sur l'autre, elle sera tout entière dans le premier plan* (fig. 389).

Soient P un plan perpendiculaire sur le plan M et CD une perpendiculaire au plan M menée par un point C du plan P. La perpendiculaire menée du point C à l'intersection AB est perpendiculaire au plan M (563) et c'est la seule qu'on puisse mener du point C à ce plan, donc elle se confond avec CD : donc CD est tout entière dans le plan P.

THÉORÈME

565. — *Deux plans sont perpendiculaires si l'un contient une perpendiculaire à l'autre.*

Si le plan P contient la perpendiculaire CD au plan M, il est perpendiculaire à ce plan.

En effet, menons, dans le plan M, la droite DE perpendiculaire à l'intersection AB des deux plans. CD étant perpendiculaire au plan M est perpendiculaire aux droites AB, DE; par conséquent, l'angle CDE est l'angle plan correspondant au dièdre PABN; or, cet angle est droit : donc le plan P est perpendiculaire sur le plan M.

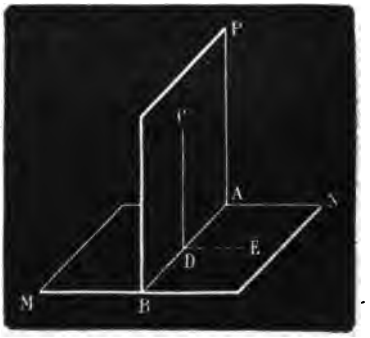


FIG. 390.

THÉORÈME

566. — *L'intersection de deux plans perpendiculaires à un troisième est perpendiculaire à ce plan.*

En effet, soit AB l'intersection des plans N et P perpendiculaires

au plan M. Le point A étant un point de l'intersection appartient aux deux plans ; si donc nous abaissons de ce point une perpendiculaire au plan M, elle devra (564) se trouver dans le plan N et dans le plan P, donc elle ne pourra être que l'intersection AB de ces deux plans.

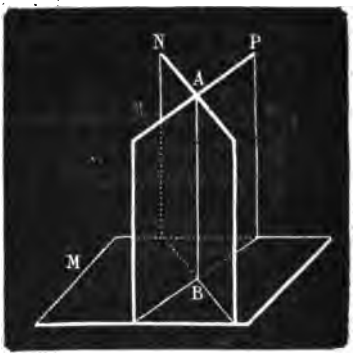


FIG. 391.

567. Corollaire I. — *Par une droite perpendiculaire à un plan passent une infinité de plans perpendiculaires à celui-là*, car, par l'intersection de deux plans, on peut faire passer une infinité de plans.

568. Corollaire II. — *Par une droite oblique à un plan passe un plan et un seul perpendiculaire à ce plan.*

En effet, par un point C d'une oblique telle que AB au plan M, on peut abaisser une perpendiculaire CD à ce plan. Or, tout plan passant par AB, perpendiculaire au plan M, contiendra CD et se confondra, par conséquent, avec le seul plan des droites AB, CD.

§ II. — ANGLE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

569. Définitions. — Nous avons déjà dit (328) ce qu'on entend par projection d'un point et d'une droite.

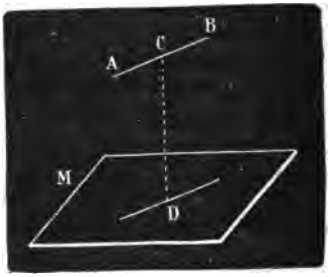


FIG. 392.

On appelle encore projection d'une ligne AB, droite ou courbe, sur un plan P (*fig.* 393) le lieu des projections des points de cette ligne sur ce plan. Les perpendiculaires menées des différents points de la ligne au plan sont appelées *projetantes*. L'ensemble de ces projetantes forme la *surface projetante* sur le plan P, qui est le *plan de projection*.

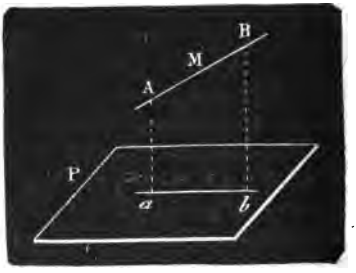


FIG. 393.

570. — *La projection sur un plan d'une droite oblique à ce plan est une droite* (*fig.* 393).

En effet, soit l'oblique AB au plan P. Si nous faisons passer par la droite AB le plan M perpendiculaire au plan P, il contiendra toutes les perpendiculaires à ce plan (564) abaissées des différents points de AB. Donc l'intersection *ab* des deux plans sera la projection de la droite AB : donc enfin cette projection est une ligne droite.

571. Corollaire I. — *La projection sur un plan d'une droite perpendiculaire à ce plan est un point.*

572. Corollaire II. — *La projection sur un plan d'une droite parallèle à ce plan est parallèle à cette droite et lui est égale.*

THÉORÈME

573. — *Le plus petit des angles qu'une droite oblique à un plan puisse faire avec différentes droites de ce plan, est celui qu'elle fait avec sa projection.*

Soit la droite AB oblique au plan P. Il suffit évidemment de considérer les angles formés par la droite AB, avec les droites du plan P, passant par son pied B. Soient donc A'B la projection de AB et BC une droite quelconque. Il faut démontrer qu'on a :

$$ABA' < ABC.$$

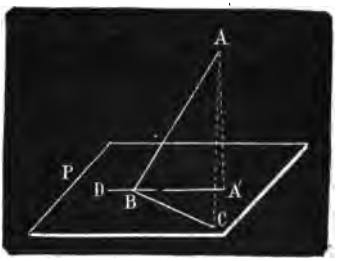


FIG. 394.

Menons AA' et prenons sur BC une longueur BC égale à BA'. Les triangles ABA', ABC ont par construction deux côtés égaux chacun à chacun et le troisième côté de l'un plus petit que le troisième côté de l'autre ; car AA' est une perpendiculaire au plan P et AC est une oblique à ce même plan. Nous avons donc (513) :

$$AA' < AC, \text{ d'où } ABA' < ABC.$$ C. q. f. d.

574. Corollaire. — *Le plus grand des angles qu'une droite puisse faire avec différentes droites d'un plan, est l'angle obtus qu'elle fait avec sa projection.*

En effet, si BD (*fig.* 394) est le prolongement de AB, les angles ABD et ABA' valent deux droits. Si de cette somme on retranche ABA', c'est-à-dire le plus petit angle que la droite AB fasse avec les droites qui passent par son pied, il restera un angle ABD plus grand que tout autre ABC.

575. Définition. — On appelle *angle d'une droite et d'un plan* l'angle aigu formé par cette droite et sa projection sur ce plan.

576. — *La droite d'un plan faisant le plus grand angle avec un second plan est la perpendiculaire à l'intersection des deux plans.*

Soient les plans M et N se coupant suivant EF et A un point quelconque du plan N. Menons dans ce dernier plan la perpendiculaire AB et une oblique quelconque AC à l'intersection EF. Si a est la projection du point A, aB et aC seront les projections de AB et de AC. Il faut alors prouver que l'on a :

$$ABa > ACa.$$

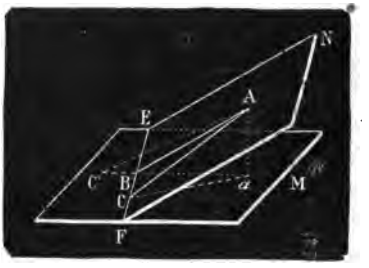


FIG. 395.

Or, aB est perpendiculaire sur EF (518), d'où $aC > aB$. Prenons sur aB une longueur $aC' = aC$. Le point B est alors entre les points a et C' : donc l'angle ABa, extérieur au triangle ABC', est plus grand que l'angle AC'a ; mais les triangles rectangles ACa, AC'a sont évidemment égaux ; par suite l'angle ACa est égal à l'angle AC'a : donc l'angle ABa plus grand que AC'a est aussi plus grand que ACa. C. q. f. d.

Définition. — Dans le cas particulier où le plan M est horizontal, la perpendiculaire AB est *la ligne de plus grande pente* du plan N. C'est la direction suivant laquelle glisserait librement un mobile pesant abandonné à lui-même au point A.

On voit d'ailleurs que l'angle AB*a* n'est autre que l'angle plan du dièdre NEFM.

PROJECTION D'UNE AIRE PLANE

577. Théorème. — *La projection d'une aire plane est égale au produit de cette aire par le cosinus de l'angle de son plan avec le plan de projection.*

Supposons d'abord un triangle ABC dont l'un des côtés AB coïncide avec le plan de projection. Du sommet C abaissons la perpendiculaire Cc sur le plan de projection; puis de *c* la perpendiculaire *c*D sur le côté AB. Joignons CD, cette droite est la hauteur du triangle ABC et l'angle CD*c* = α est l'angle des deux plans.

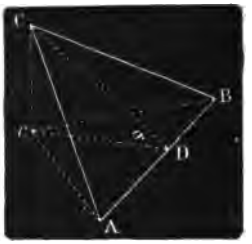


FIG. 395 *bis*.

On a *c*D = CD cos α.

La projection du triangle ABC est la surface

$$ABc = \frac{AB \times CD}{2} \cos \alpha = \text{surface ABC} \times \cos \alpha.$$

Supposons, en second lieu, que le triangle donné n'ait aucun côté parallèle au plan de projection P, mais que le sommet le plus bas B soit contenu dans ce plan. Prolongeons CA jusqu'à sa rencontre D avec le plan P.

Les projections des triangles BDC et BDA sont

$$BDc = BDC \times \cos \alpha$$
$$BD*a* = BDA \times \cos \alpha$$

Retranchant ces équations membre à membre, il vient $Bac = BAC \times \cos \alpha$.

Le théorème étant démontré pour un triangle, s'étend à un polygone quelconque que l'on peut toujours décomposer en triangles; donc, en général, l'aire de la projection d'une surface quelconque sur un plan égale cette surface multipliée par le cosinus à l'angle de son plan avec le plan de projection.

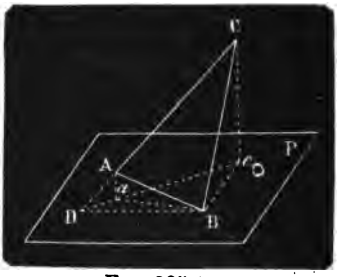


FIG. 395 *ter*.

578. — *Deux droites, non situées dans le même plan, étant données :*

1° *On peut toujours leur mener une perpendiculaire commune ;*

2° *On n'en peut mener qu'une ;*

3° *Cette perpendiculaire est la plus courte distance des deux droites.*

1 Soient les droites AB, CD de deux plans différents. Par un point C de CD, menons une parallèle CE à AB et faisons passer un plan P par CE et CD : ce plan sera parallèle à AB (523). Projetons AB sur le plan P. La projection *ab*, parallèle à AB (572), rencontrera CD en un point G, où elle lui serait parallèle et CD serait, par suite, parallèle à AB, ce qui est contre l'hypothèse. Menons GH perpendiculaire au plan P. Cette droite est contenue tout entière dans le plan projetant AB*ab*, et comme elle est perpendiculaire aux droites *ab*, CD, elle est aussi perpendiculaire à AB (98); GH est donc une perpendiculaire commune aux droites AB et CD.

2° La perpendiculaire commune à AB et à CD l'est aussi à *ab* paral-

lèle à AB et par conséquent au plan P : elle est donc tout entière dans le plan projetant AB*ab*, et ne peut, par suite, rencontrer CD qu'au seul point G que cette droite ait dans ce plan. Donc cette perpendiculaire commune n'est autre que GH.

3° La droite GH est plus courte que toute autre droite IK menée entre AB et CD; car IK, oblique au plan P, est plus grande que la perpendiculaire IL ou que son égale GH. Donc la perpendiculaire GH est la plus courte distance des droites AB et CD.

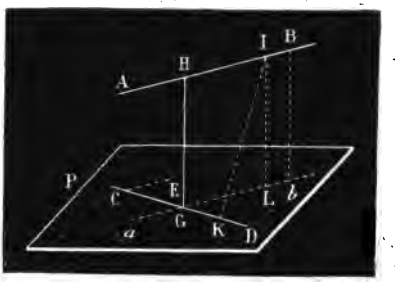


FIG. 396.

579. Corollaire I. — *La perpendiculaire* HG (fig. 396) *commune à deux droites* AB, CD, *non situées dans le même plan, est égale à la distance entre* AB *et sa projection ab dans le plan de projection* P.

On peut dire encore que : *la perpendiculaire commune à deux droites est égale à la distance des plans parallèles menés par ces droites.*

580. Corollaire II. — *La perpendiculaire commune à deux droites* AB, CD, *non situées dans le même plan, est parallèle à l'intersection de deux plans respectivement perpendiculaires à ces droites.*

En effet, si l'on mène deux plans quelconques M et P respectivement perpendiculaires aux droites AB et CD, ces plans se couperont, car s'ils étaient parallèles, les droites AB, CD le seraient également, ce qui est contraire à l'hypothèse. Soit donc XY, l'intersection des plans M et P. Toute perpendiculaire à AB est parallèle au plan M; de même, toute perpendiculaire à CD est parallèle au plan P; par suite, la perpendiculaire commune à AB et à CD est parallèle aux deux plans M et P, donc elle est parallèle aussi à leur intersection XY.

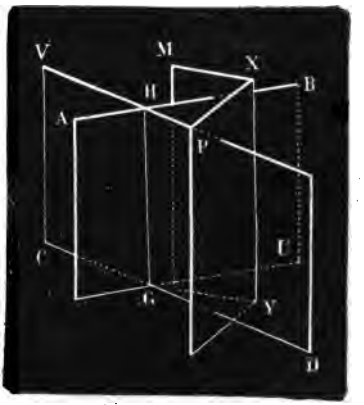


FIG. 397.

D'autre part, on peut trouver aisément cette perpendiculaire commune dont on connaît la direction, car le lieu de toute perpendiculaire aux deux droites qui rencontre AB est le plan ABU parallèle à XY mené par AB; de même le lieu de toute perpendiculaire aux deux droites qui rencontre CD est le plan CDV parallèle à XY mené par CD : donc l'intersection HG de ces deux derniers plans est la perpendiculaire commune aux deux droites AB et CD.

CHAPITRE V

Angles trièdres et angles polyèdres. — Limites de la somme des faces d'un trièdre. — Somme des faces d'un angle polyèdre convexe. — Trièdres supplémentaires et théorèmes sur les trièdres.

§ I. — ANGLES TRIÈDRES ET ANGLES POLYÈDRES. — LIMITES DE LA SOMME DES FACES D'UN TRIÈDRE. — SOMME DES FACES D'UN ANGLE POLYÈDRE CONVEXE

Définitions.

581. — On appelle *angle trièdre*, ou simplement *trièdre*, la figure formée par trois plans qui se coupent en un même point et sont limités aux droites d'intersection de ces plans. Les plans ASB, BSC, CSA qui se coupent au point S sont les *faces* d'un trièdre, le point S en est le *sommet*; les droites SA, SB, SC, intersections des plans, en sont les *arêtes*.

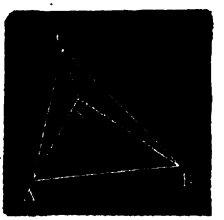


FIG. 398.

L'angle trièdre est appelé *rectangle*, *birectangle* ou *trirectangle*, selon qu'il a un, deux ou trois dièdres droits.

En général, on appelle *angle polyèdre* ou *angle solide*, la figure formée par plusieurs plans qui se coupent en un même point et sont limités aux droites d'intersection de ces plans (*fig.* 399).

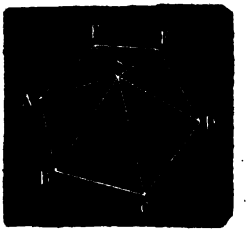


FIG. 399.

582. — On dit qu'un angle solide est *convexe*, lorsqu'une section plane rencontrant toutes ses arêtes est un polygone convexe.

THÉORÈME

583. — *Chaque face d'un trièdre est moindre que la somme des deux autres et plus grande que leur différence.*

1° Il est évident qu'il ne peut être question que de la plus grande des trois faces du trièdre. Démontrons donc que la plus grande face ASB du trièdre SABC est plus petite que la somme des deux centres ASC, CSB.

A cet effet, formons dans l'angle ASB un angle ASD = ASC, puis menons une droite quelconque AB qui rencontre SD au point D; enfin prenons SC = SD et joignons les points A et B au point C; les triangles ASD, ASC ont par construction un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun : donc ces deux triangles sont égaux et AD = AC. Mais le triangle ABC donne :

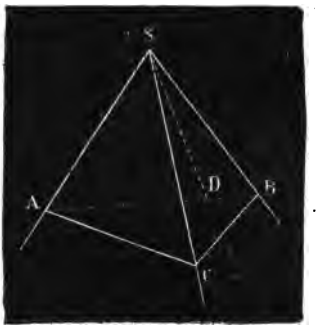


FIG. 400.

$$AD + DB < AC + BC;$$

retranchant de part et d'autre les quantités égales AD et AC, il vient :

$$DB < BC.$$

Or, les deux triangles BSD, BSC ont SB commun, SD = SC et DB < BC : il en résulte BSD < BSC. Nous avons donc :

$$ASD + DSB < ASC + BSC$$

ou

$$ASB < ASC + BSC.$$

2° Si de l'inégalité précédente,

$$ASC + BSC > ASB,$$

on retranche de part et d'autre ASC, il vient l'inégalité qu'il fallait trouver ;

$$BSC > ASB - ASC.$$

THÉORÈME

584. — *La somme des trois faces d'un trièdre est moindre que quatre angles droits.*

Soit le trièdre SABC. Si nous prolongeons l'arête SA au delà du sommet en A', nous formons un second trièdre SA'BC qui donne BSC < BSA' + CSA'; or, en ajoutant ASB + ASC aux deux membres de cette inégalité, nous n'en changerons pas le sens, et nous aurons :

FIG. 401.

$$ASB + ASC + BSC < ASB + BSA' + ASC + CSA'.$$

C'est l'inégalité qu'il fallait trouver, car le premier membre est la somme des trois faces du trièdre considéré et le second est la somme de quatre angles droits, puisqu'ils sont deux à deux supplémentaires.

Il est d'ailleurs évident que la somme des trois faces est plus grande que zéro.

THÉORÈME

585. — *La somme des faces d'un angle polyèdre convexe est moindre que quatre angles droits.*

Soit l'angle polyèdre convexe SABCDE. Menons un plan quelconque qui coupe toutes les arêtes, ce plan détermine le polygone convexe ABCDE. Considérons les trièdres ayant pour sommets les points A, B, C, D, E. Ces trièdres donnent (583) :

$$\text{EAB} < \text{SAE} + \text{SAB}$$
$$\text{ABC} < \text{SBA} + \text{SBC}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Additionnant toutes ces inégalités membre à membre, nous avons, d'une part, la somme des angles du polygone ABCDE et, de l'autre, la somme des angles adjacents aux bases des triangles dont le sommet commun est en S. Or, il y a autant de triangles dont le sommet est en S que de côtés dans le polygone ABCDE. Si donc nous désignons par n le nombre des côtés du polygone ABCDE et par S_1 la somme des angles en S, la somme des angles du polygone sera $2n$ *droits* $-$ 4 *droits*, et, $2n$ *droits* $- S_1$ sera celle des angles adjacents aux bases des triangles dont le sommet commun est en S. Nous aurons donc :

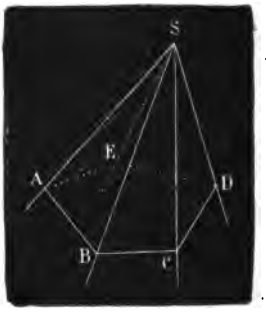


FIG. 402.

$$2n \text{ droits} - 4 \text{ droits} < 2n \text{ droits} - S_1$$

d'où, après réduction, l'inégalité

$$S_1 < 4 \text{ droits}.$$

Mais la somme S_1 des angles en S est composée des faces de l'angle polyèdre. Donc, la somme des faces d'un angle polyèdre est moindre que quatre angles droits.

§ II. — TRIÈDRES SUPPLÉMENTAIRES ET THÉORÈMES SUR LES TRIÈDRES

586. Définition. — On appelle *trièdres supplémentaires* deux trièdres tels que les faces et les dièdres de l'un soient les suppléments des dièdres et des faces de l'autre.

THÉORÈME (lemme).

587. — *Les perpendiculaires* CD, CE *abaissées d'un point* C *pris dans l'ouverture d'un angle dièdre* AB *sur les faces* MA, NA *de ce dernier font un angle* DCE *qui est le supplément de l'angle dièdre.*

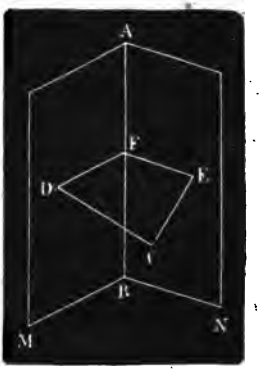


FIG. 403.

Si du point C pris dans l'ouverture du dièdre AB on abaisse sur les plans MA, NA les perpendiculaires CD, CE, le plan CDE sera perpendiculaire aux faces du dièdre et par conséquent à son arête AB (566). Donc, si F est le point où CDE rencontre AB, le dièdre aura pour mesure l'angle rectiligne DFE. Or, les quatre angles d'un quadrilatère valent quatre droits, et comme les angles en D et en E sont droits, on a

$$\text{DFE} + \text{DCE} = 2 \text{ droits.}$$

THÉORÈME

588. — *Les perpendiculaires* S'A', S'B', S'C', *menées d'un point* S' *pris dans l'intérieur d'un trièdre* S *sur les faces de ce trièdre, forment un second trièdre* S' *supplémentaire du premier* S *dont les faces sont les suppléments des angles dièdres du premier, et* RÉCIPROQUEMENT *les faces du premier sont les suppléments des angles dièdres du second.*

En effet, d'après le théorème précédent, on a d'abord

Face A'S'B' + dièdre SC = 2 droits,
Face A'S'C' + dièdre SB = 2 droits,
Face B'S'C' + dièdre SA = 2 droits.

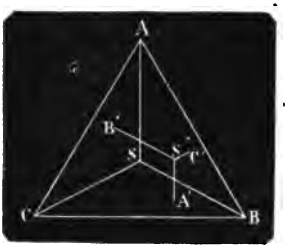


FIG. 404.

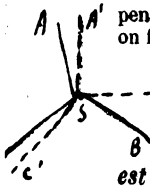
Réciproquement. — Pour démontrer la seconde partie de l'énoncé, il suffit de faire voir que le premier trièdre se trouve dans les mêmes conditions que le second, c'est-à-dire que ses arêtes sont perpendiculaires aux faces du second. Or, le plan S'B'C', conduit selon les perpendiculaires S'B', S'C', est perpendiculaire aux faces SAC, SAB, et par suite à l'arête SA (566), donc réciproquement SA est perpendiculaire au plan S'B'C'; on prouverait de même

que les arêtes SC, SB sont respectivement perpendiculaires aux plans S'A'B', S'A'C'; par conséquent la face ASB est supplémentaire du dièdre S'C'; la face ASC est supplémentaire du dièdre S'B'; enfin la face BSC est supplémentaire du dièdre S'A'.

C. Q. F. D.

Remarque I. — Les trièdres S et S' sont dits *trièdes supplémentaires réciproques.*

Remarque II. — Si par le sommet S d'un trièdre SABC on élève une perpendiculaire à chaque face, du même côté de cette face que la troisième arête, on forme également un second trièdre SA'B'C' *supplémentaire* du premier.



THÉORÈME

589. — *Dans tout trièdre, chaque dièdre augmenté de deux droits est plus grand que la somme des deux autres.*

Soient S et S' deux trièdres supplémentaires, A, B, C les dièdres du premier et a', b', c' les faces du second respectivement supplémentaires de ces dièdres.

On a, par suite :

$$a' + A = 2^d,\ b' + B = 2,\ c' + C = 2,$$

d'où

$$a' = 2 - A,\ b' = 2 - B,\ c' = 2 - C;$$

mais (583) chacune des faces d'un trièdre est moindre que la somme des deux autres, on peut donc écrire :

$$a' < b' + c',$$

ou

$$2 - A < 2 - B + 2 - C,$$

d'où enfin

$$A + 2 > B + C.$$

THÉORÈME

590. — *La somme des dièdres d'un trièdre est comprise entre deux droits et six droits.*

Soient S et S' deux trièdres supplémentaires; A, B, C les dièdres du premier et a', b', c' les faces respectivement supplémentaires de ces dièdres. Tout trièdre étant convexe, on a (585) :

$$0 < a' + b' + c' < 4 \text{ droits.}$$

Or (589),

$$a' = 2 - A,\ b' = 2 - B,\ c' = 2 - C.$$

L'inégalité précédente revient donc à celle-ci :

$$0 < 2 - A + 2 - B + 2 - C < 4^d,$$

d'où l'on tire ces deux autres :

$$A + B + C < 6^d \text{ et } A + B + C > 2^d.$$

On a, par suite, cette dernière égalité :

$$2^d < A + B + C < 6^d. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

CHAPITRE VI

Angles trièdres symétriques. — Préciser la disposition des éléments d'un tièdre ; théorèmes sur les tièdres. — Cas d'égalité des tièdres. — Analogies et différences entre les propriétés des trièdres et celles des triangles rectilignes.

§ I. ANGLES TRIÈDRES SYMÉTRIQUES. PRÉCISER LA DISPOSITION DES ÉLÉMENTS D'UN TRIÈDRE. THÉORÈMES SUR LES TRIÈDRES.

591. Définition. — Si l'on prolonge au delà de son sommet les arêtes d'un trièdre SABC, on forme un second trièdre SA'B'C' symétrique du premier (*fig.* 406).

Sens d'un trièdre. — Si l'on suppose un observateur ayant la tête en A et les pieds en S et regardant l'intérieur du trièdre, le trièdre sera direct si SB est à droite et SC à gauche de l'observateur ; autrement le trièdre est rétrograde (*fig.* 406).

FIG. 405.

Si l'on prolonge au delà de son sommet S les arêtes d'un angle polyèdre quelconque SABCD, on forme un second angle polyèdre SA'B'C'D' qui est *symétrique* du premier.

Les faces ASB, BSC, CSD, DSA de l'angle polyèdre donné sont respectivement égales aux faces A'SB', B'SC', C'SD', D'SA' de l'angle polyèdre symétrique, comme angles opposés par le sommet ; de même les dièdres SA, SB, SC, SD du premier angle solide sont respectivement égaux aux dièdres SA', SB', SC' SD' du second. Il résulte de là que l'angle polyèdre donné et son symétrique ont tous leurs éléments égaux chacun à chacun. Il est d'ailleurs facile de *préciser la disposition de ces éléments* et de voir qu'ils sont disposés dans un ordre inverse. Imaginons, en effet, un observateur le dos appuyé contre l'arête SA, la tête en A, et les pieds en S, et regardant l'intérieur de l'angle polyèdre SABCD, il verrait, l'arête SB à sa gauche, et l'arête SD à sa droite. Ce polyèdre est orienté dans le sens rétrograde. Si cet observateur

agissait de même pour l'angle polyèdre SA′B′C′D′, c'est-à-dire s'il regardait l'intérieur de cet angle solide ayant le dos contre SA′, la tête en A′ et les pieds en S, il verrait à sa droite SB′ et à sa gauche SD′ ; ce polyèdre est disposé dans un ordre inverse du précédent, il est orienté dans le sens direct. C'est pourquoi deux angles polyèdres symétriques ne sont pas, en général, superposables.

THÉORÈME

592. — *Un trièdre qui a deux dièdres égaux et son symétrique sont superposables ; mais seulement dans ce cas.*

Soient le trièdre SABC et son symétrique SA′B′C′.

1° Supposons égaux les dièdres SA, SC du trièdre SABC. Menons la bissectrice *xy* de l'angle ASC′ et faisons tourner le trièdre SA′B′C′ de 180° autour de *xy*. L'arête SA′ vient coïncider avec SC, SC′ avec SA et la face A′SC′ avec la face ASC ; mais, comme les dièdres SA′ et SC sont égaux, le plan A′SB′ coïncide avec le plan CSB ; de même les dièdres SA et SC′ étant égaux, le plan C′SB′ coïncide avec le plan ASB ; mais l'arête SB′ devant se trouver dans les deux plans ASB, CSB coïncide avec leur intersection SB. Donc les deux trièdres coïncident et sont égaux.

FIG. 406.

2° Soient un trièdre SABC dont les dièdres sont inégaux, et son symétrique SA′B′C′.

Il est facile de voir que ces deux trièdres ne sont pas superposables ; car si, comme plus haut, nous faisons tourner le trièdre SA′B′C′ de 180° autour de *xy*, l'arête SA′ coïncide avec SC, SC′ avec SA et la face A′SC′ avec la face ASC ; mais le dièdre SA et par suite le dièdre SA′ n'étant pas égal au dièdre SC, la face A′SB′ ne coïncide pas avec la face CSB. Pour la même raison, le plan C′SB′ ne coïncide pas avec le plan ASB, de sorte que l'arête SB prend une position quelconque SB″ et ne coïncide pas avec SB. Donc les deux trièdres ne sont pas superposables.

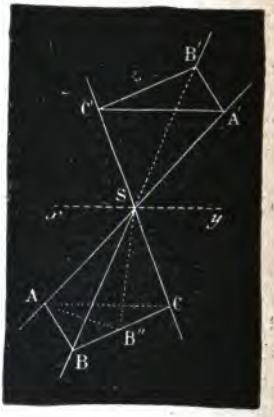


FIG. 407.

THÉORÈME

593. — *Si un trièdre a deux dièdres égaux, les faces opposées à ces dièdres sont aussi égales.*

Soit SABC un trièdre dans lequel les dièdres SA et SC sont égaux : les faces ASB, BSC opposées à ces dièdres sont aussi égales.

En effet, si l'on construit le trièdre symétrique SA′B′C′, on peut le faire coïncider avec SABC (592, 1°). Dans la superposition, la face A′SB′ recouvre exactement BSC; or, A′SB′ = ASB, donc ASB = BSC.

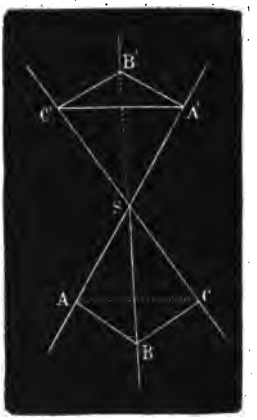


FIG. 408.

THÉORÈME

594. — *Si un trièdre a deux dièdres inégaux, les faces opposées à ces dièdres sont aussi inégales et la plus grande est opposée au plus grand dièdre* (fig. 409).

Si, dans le trièdre SABC nous avons SB > SA, nous aurons aussi ASC > BSC. Pour le prouver, conduisons par SB un plan BSD qui détermine, avec le plan ASB, le dièdre ABSD = SA. Alors les faces ASD, DSB sont égales, comme opposées à des dièdres égaux, dans le trièdre SABD. Mais le trièdre SBDC donne :

$$DSB + DSC > BSC,$$

ou

$$ASD + DSC > BSC,$$

ou enfin

$$ASC > BSC.$$

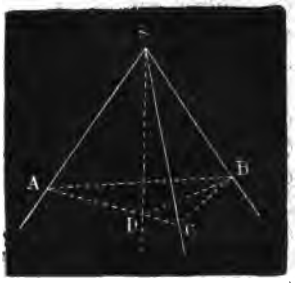


FIG. 409.

595. Remarque. — Les deux propositions réciproques aux deux propositions précédentes sont également vraies. Donc :

1° *Si un trièdre a deux faces égales, les dièdres opposés à ces faces sont égaux;*

2° *Si un trièdre a deux faces inégales, les dièdres opposés à ces faces sont aussi inégaux et le plus grand est opposé à la plus grande face.* (Démonstration très facile.)

THÉORÈME

596. — *On peut toujours former un trièdre avec trois faces données, si la plus grande est moindre que la somme des deux autres et si la somme des trois est moindre que quatre droits.*

Soient ASC_1, ASB, BSC_2 les trois faces consécutives données dans un même plan et la plus grande ASB entre les deux autres.

Avec un rayon arbitraire, décrivons du sommet S une circonférence ABM. La somme des trois faces données étant moindre que quatre droits, l'arc C_1ABC_2 est moindre que la circonférence ABM, et, par suite, le point C_2 se trouve entre les points B et C_1. Menons maintenant, des points C_1 et C_2, les cordes C_1D et C_2E respectivement perpendiculaires aux rayons SA, SB. Comme la plus grande face ASB est moindre que la somme des faces ASC_1, BSC_2, l'arc AB est plus grand que chacun des arcs AC_1, BC_2 et moindre que la somme des arcs AD et BE égaux respectivement aux arcs AC_1 et BC_2. Les points D et E sont donc, sur l'arc AB, le point E entre A et D; mais comme le point C_2 est sur l'arc BMC_1, les points C_2 et E se trouvent chacun sur l'un des deux arcs sous-tendus par la corde C_1D : cette corde est donc nécessairement coupée par la corde C_2E en un point c intérieur à la circonférence. Par suite, on a $Hc < HE$ ou $Hc < HC_2$. Si donc on élève au point c la perpendiculaire cC au plan ASB et que du point H, comme centre, on décrive dans le plan HcC un arc de cercle avec HC_2 pour rayon, cet arc coupera la perpendiculaire cC en deux points équidistants du point c et de chaque côté du plan ASB. Si l'un de ces points est C, on le joindra au point S et le trièdre demandé sera SABC, car il a ses faces égales aux trois faces données. En effet, les droites CH et CF étant perpendiculaires à SB et à SA (518), le triangle SHC est rectangle et égal au triangle SHC_2, puisqu'ils ont un côté commun SH et $HC = HC_2$, donc les angles HSC_2 et HSC sont égaux; par suite, la face BSC_2 est égale à la face BSC et, de plus, l'arête $SC = SC_2 = SC_1$. Les deux triangles rectangles CSF, C_1SF ont, par conséquent, le côté SF commun et les hypoténuses SC, SC_1 égales, donc ils sont égaux et l'angle C_1SF est égal à l'angle CSF, d'où résulte l'égalité des faces ASC, ASC_1; enfin la face ASB est égale à elle-même. Si l'on joignait au point S le second point d'intersection de la perpendiculaire cC avec l'arc décrit du point H, on formerait au second trièdre symétrique du précédent.

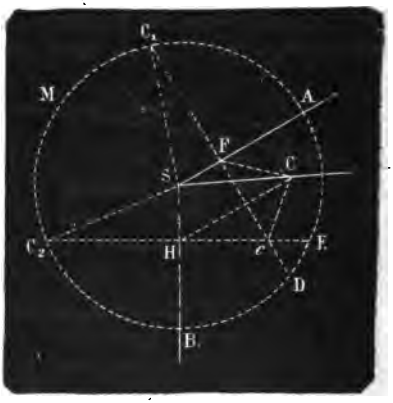


FIG. 410.

597. Remarque. — On peut construire un trièdre avec trois dièdres, si la somme des trois dièdres est comprise entre deux droits et six droits et si le plus petit augmenté de deux droits est plus grand que la somme des deux autres. En effet, ces conditions étant remplies, on peut construire le trièdre supplémentaire du trièdre demandé, et, par suite, ce dernier.

§ II. — CAS D'ÉGALITÉ DES TRIÈDRES

THÉORÈME

598. — *Deux trièdres sont égaux lorsqu'ils ont :*

1° *Un dièdre égal adjacent à deux faces respectivement égales et disposées dans le même ordre ;*

2° *Une face égale adjacente à deux dièdres respectivement égaux et disposés dans le même ordre.*

1° Soient les trièdres S et S'. On a par hypothèse :

Dièdre SA = S'A' ; face ASB = A'S'B' et face ASC = A'S'C'.

Il s'agit de prouver que les trièdres S et S' sont égaux. A cet effet, portons le trièdre S' sur le trièdre S de manière que la face A'S'B' coïncide avec son égale ASB. Les dièdres SA et S'A' étant égaux et les faces ASC, A'S'C' étant placées du même côté du plan ASB, la face A'S'C' coïncidera avec son égale ASC et par conséquent S'C' avec l'arête SC : les deux trièdres coïncideront alors dans toutes leurs parties, donc ils seront égaux.

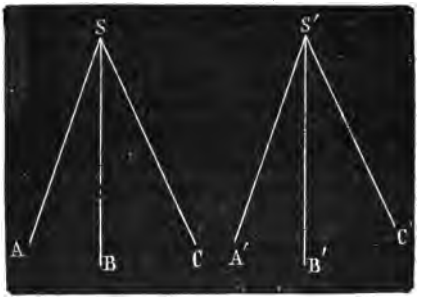


FIG. 411.

2° On a par hypothèse (*fig.* 411) :

Face ASB = A'S'B' ; dièdre SA = S'A', dièdre SB = S'B'.

Il faut démontrer que les trièdres S et S' sont égaux.

En effet, plaçons la face A'S'B' sur son égale ASB, de manière que les arêtes SA, S'A' coïncident, de même que SB, S'B'. Comme les dièdres SA, S'A' sont égaux, la face A'S'C' se posera sur la face ASC ; à cause de l'égalité des dièdres SB, S'B', la face B'S'C' se posera aussi sur la face BSC : donc l'arête S'C' se trouvera dans les deux faces ASC, BSC, et se confondra par conséquent avec SC, et les deux trièdres seront égaux.

THÉORÈME

599. — *Deux trièdres sont égaux lorsqu'ils ont :*

1° *Les trois faces respectivement égales et disposées dans le même ordre ;*

2° *Les trois dièdres respectivement égaux et disposés dans le même ordre.*

1° Soient les trièdres S et S′ dans lesquels on a :

$$\text{Face ASB} = \text{A'S'B'},\ \text{ASC} = \text{A'S'C'} \text{ et } \text{BSC} = \text{B'S'C'}.$$

Il faut prouver que les trièdres S et S′ sont égaux.

En effet, prenons sur les arêtes des deux trièdres six longueurs égales : $SA = SB = SC = S'A' = S'B' = S'C'$, et joignons leurs extrémités. Les triangles isocèles SAB, S′A′B′ sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux; il en est de même des triangles SAC, S′A′C′, SBC, S′B′C′; par suite les triangles ABC, A′B′C′ sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun. Si des sommets S et S′ nous abaissons les hauteurs SP, S′P′ sur les plans de ces deux triangles, les points P et P′ seront les centres des cercles circonscrits à ces triangles (517), et, comme ces triangles sont égaux, les rayons AP, A′P′ sont aussi égaux; et les triangles rectangles SAP, S′A′P′ ont $SA = S'A'$, $AP = A'P'$; par conséquent, ces triangles sont égaux et $SP = S'P'$. Si donc on porte le trièdre S′ sur le trièdre S de manière que le triangle A′B′C′ coïncide avec son égal ABC, le point P′ tombera au point P et la perpendiculaire P′S′ sur PS; et, comme ces droites sont égales, le point S′ coïncidera avec le point S, et, par suite, le trièdre S′A′B′C′ avec SABC. Donc ces deux trièdres sont égaux.

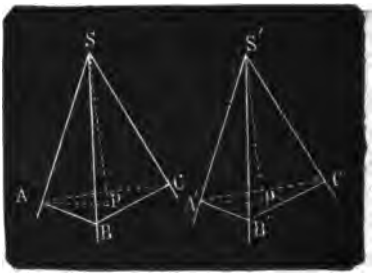


FIG. 412.

2° Soient dans les mêmes trièdres les dièdres $SA = S'A'$, $SB = S'B'$, $SC = S'C'$:

Les trièdres supplémentaires des trièdres S et S′ ont leurs faces respectivement égales comme suppléments (588) des dièdres de ces trièdres et disposées dans le même ordre; donc ces trièdres supplémentaires sont égaux; ils ont, par suite, leurs dièdres respectivement égaux et disposés dans le même ordre. Donc les faces des trièdres S et S′, qui sont les suppléments de ces dièdres, sont respectivement égales et disposées dans le même ordre; donc, enfin, les trièdres S et S′ sont égaux.

600. Remarque. — Si dans les deux théorèmes précédents les éléments égaux des trièdres considérés n'étaient pas dans le même ordre, les trièdres seraient *symétriques* et non plus *égaux*.

EXERCICES SUR LE LIVRE V

477. — Une portion de courbe plane détermine-t-elle la position d'un plan ?

478. — Par un point donné sur une droite, mener un plan perpendiculaire à cette droite.

479. — Par un point donné hors d'une droite, faire passer un plan qui soit perpendiculaire à la droite.

480. — Trouver le lieu des perpendiculaires menées dans l'espace en un point donné d'une droite.

481. — Une oblique AB ayant 4^m de long rencontre un plan MN au point B, la perpendiculaire A*a* abaissée du point A sur MN a 3^m. On demande la valeur de *a*B.

482. — A 6^m d'un plan MN, on décrit une circonférence sur ce plan avec un rayon de 8^m. On demande la surface du cercle tracé sur MN.

483. — Trouver une série d'obliques égales partant d'un même point A et telles que le carré de chacune d'elles soit égal à la somme des carrés de deux lignes données AB, BD.

484. — Un point A est à 7^m au-dessus du centre d'un cercle qui a 20^{mq} de surface. On demande la distance du point A à la circonférence du cercle.

485. — Trouver le lieu des points de l'espace également distants de deux points donnés A et B.

486. — Trouver dans l'espace le lieu de tous les points également distants de trois points non en ligne droite.

487. — Trouver sur un plan le lieu de tous les points également distants d'un point donné A hors de ce plan.

488. — Une droite également inclinée sur trois droites qui passent par son pied dans le plan est perpendiculaire à ce plan.

489. — Du point A hors d'un plan MN on décrit une circonférence sur ce plan, puis on mène une tangente BC à la circonférence et enfin on joint le point A au point C. Calculer AC à $0^m,01$ près sachant que la distance du point A au plan MN ou A*o* égale 12^m, le rayon $oB = 7^m$ et la tangente $BC = 15^m$.

490. — Trouver le lieu des parallèles menées à une droite AB par les points d'une autre droite CD située dans un autre plan.

491. — Trouver la plus courte distance de deux droites AB, CD données dans l'espace et non situées dans un même plan.

492. — Par une droite donnée AB, mener un plan parallèle à une autre droite donnée CD.

493. — Par un point donné, mener une parallèle à un plan.

494. — Par un point donné P, faire passer un plan parallèle à deux droites AB, CD, qui ne sont pas situées dans le même plan.

495. — Par un point donné, mener un plan parallèle à un plan donné.

496. — Mener 3 plans parallèles, M, N, P, passant par 3 points, A, B, C, non en ligne droite.

497. — Lorsqu'une ligne droite et un plan sont perpendiculaires à la même droite, ils sont parallèles.

498. — Trouver le lieu des points également distants de deux plans parallèles.

499. — Trouver le lieu des parallèles menées à un plan MN par un point quelconque P.

500. — Trois plans parallèles, M, N, P, sont rencontrés par deux droites, AB, CD; la droite AB rencontre les plans en A, E, B, et la droite CD en C, F, D, on a $AE = 6^m$, $BE = 8^m$, $CD = 12^m$. Calculer CF et FD.

501. — Lorsque deux plans passent par deux droites parallèles, leur intersection est parallèle à ces droites.

502. — Lorsque deux plans qui se coupent sont parallèles à une même droite, leur intersection est parallèle à cette droite.

503. — Comment mesurer l'angle formé par deux murs qui se rencontrent?

504. — Peut-on s'assurer par le calcul si deux murs sont ou non perpendiculaires?

505. — Démontrer que l'angle d'une droite et d'un plan est le plus petit des angles que fait cette ligne avec les droites qui passent par son pied dans le plan.

506. — De toutes les droites issues d'un même point d'un plan, trouver celle qui fait le plus grand angle avec un 2e plan qui rencontre le 1er.

507. — Par deux points donnés ou par une droite donnée sur un plan, faire passer un second plan perpendiculaire au premier.

508. — Par deux points donnés ou par une droite donnée hors d'un plan, faire passer un second plan perpendiculaire au premier.

509. — La projection d'une droite sur un plan est un point ou une droite.

510. — Les perpendiculaires abaissées du même point A sur des plans qui passent par la même droite KL sont toutes dans un même plan.

511. — Une droite et un plan qui lui est parallèle sont perpendiculaires au même plan.

512. — Un méridien coupe un mur vertical selon une verticale.

513. — Démontrer : 1° que tout point du plan bissecteur d'un angle dièdre est également distant de ses faces; 2° que tout point pris dans l'intérieur du dièdre hors du bissecteur est inégalement distant des faces du dièdre.

514. — Trouver le lieu des points de l'espace tels que chacun d'eux soit également distant des trois arêtes d'un trièdre.

515. — Si un angle trièdre a deux faces égales, les dièdres opposés à ces faces sont égaux.

516. — Si deux dièdres d'un trièdre sont égaux, les faces opposées sont aussi égales.

517. — Dans un angle trièdre, au plus grand dièdre est opposée la plus grande face et réciproquement.

LIVRE VI

POLYÈDRES

CHAPITRE PREMIER

Polyèdres, prismes, parallélipipèdes. Propriétés de ces solides; leurs volumes.

Définitions.

601. — On appelle *polyèdre* un solide limité de toutes parts par des polygones plans (*fig.* 413).

Ces polygones sont les *faces* du polyèdre ; les intersections des faces en sont les *arêtes;* les points de rencontre des arêtes en sont les *sommets.*

602. — On nomme *diagonale* la droite qui joint deux sommets non situés sur la même face du polyèdre. Exemple : DF.

Un polyèdre est *régulier* lorsque ses angles solides sont égaux et que ses faces sont des polygones réguliers.

Nous verrons plus loin qu'il n'existe que cinq polyèdres réguliers.

Un polyèdre est *convexe* lorsqu'il reste tout entier d'un même côté de l'une quelconque de ses faces prolongée indéfiniment.

603. — Quelques polyèdres ont des noms particuliers; on appelle *tétraèdre, pentaèdre, hexaèdre, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre* les polyèdres qui ont *quatre, cinq, six, huit, douze, vingt* faces.

Les autres polyèdres se désignent par le nombre de leurs faces.

604. — On nomme *prisme* un polyèdre qui a deux faces égales et parallèles et dont toutes les autres sont des parallélogrammes.

605. — Voici comment on peut construire un prisme : on prend un polygone quelconque ABCDE (*fig.* 413), et, dans un plan parallèle, on forme un second polygone FGHIK dont les côtés soient deux à deux égaux à ceux du premier, parallèles et dirigés dans le même sens ;

on joint ensuite les sommets homologues par les droites AF, BG, CH,.... Le volume AH ainsi formé est un prisme, car par construction deux de ses faces sont égales et parallèles et toutes les autres sont des parallélogrammes.

FIG. 413.

Les deux faces ABCDE, FGHIK égales et parallèles sont les *bases* du prisme; toutes les autres faces constituent la *surface latérale* ou *convexe* du prisme.

La *hauteur* d'un prisme est la perpendiculaire abaissée d'un point de la base supérieure sur le plan de la base inférieure.

606. — Un prisme est *droit* lorsque ses arêtes sont perpendiculaires aux plans des bases; il est *oblique* dans le cas contraire.

Un prisme tire son nom de ses bases : ainsi un prisme est dit *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, etc., selon que ses bases sont des triangles, des quadrilatères, des pentagones, etc.

607. — Le prisme quadrangulaire, qui a pour base des parallélogrammes et dont, par conséquent, les six faces sont des parallélogrammes, prend le nom particulier de *parallélipipède*.

608. — Le parallélipipède, dont toutes les faces sont des rectangles, s'appelle *parallélipipède rectangle*, et il porte le nom de *cube*, si elles sont des carrés égaux.

THÉORÈME

609. — *Il ne peut y avoir que cinq polyèdres réguliers : le tétraèdre, l'octaèdre, l'icosaèdre, l'hexaèdre et le dodécaèdre.*

En effet, un angle solide exigeant au moins trois faces et la somme de ces faces ne pouvant jamais égaler 360° (585), il suffit d'examiner quels sont les polygones réguliers dont les angles assemblés 3 à 3, 4 à 4, 5 à 5... fassent une somme moindre que 4 droits. Or, chacun des angles d'un triangle équilatéral valant 60°, pour construire un angle solide, on ne peut réunir ces angles que 3 à 3, 4 à 4 ou 5 à 5, ce qui donne le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre. Il est évident que ces angles ne peuvent être réunis 6 à 6, car un angle solide a moins de 360°, et 6 fois $60° = 360°$. Les angles d'un carré valant 90°, on ne peut assembler ces angles que 3 à 3, ce qui donne l'hexaèdre. Pour le pentagone, chacun des angles valant 108°, on ne pourra non plus réunir les angles que 3 à 3, ce qui donnera le dodécaèdre. Chaque angle d'un hexagone valant 120°, il est impossible de construire un angle solide en réunissant 3 de ces angles; l'impossibilité de construire un angle solide, en réunissant 3 angles d'un

polygone régulier existe, *a fortiori*, si ce polygone a plus de six côtés : donc, il n'y a que cinq polyèdres réguliers.

THÉORÈME

610. — *Dans tout parallélipipède, les faces opposées sont égales et parallèles.*

Soit le parallélipipède AG. Par définition, les deux bases AC et EG sont égales et parallèles; il reste à démontrer que la même chose a lieu pour deux faces opposées quelconques, par exemple, pour les faces AH et BG. Toutes les faces de ce solide étant des parallélogrammes, les arêtes AE et BF (ce sont les côtés opposés du parallélogramme AF) sont égales et parallèles ; il en est de même de AD et de BC. Par conséquent, les angles EAD, FBC sont égaux et leurs plans sont parallèles : les parallélogrammes AG et BH sont donc égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun.

FIG. 414.

611. Corollaire I. — *Dans un parallélipipède, on peut prendre pour bases une face quelconque et son opposée.*

En effet, dans ce solide, deux faces quelconques opposées sont égales et parallèles.

612. Corollaire II. — *Toute section plane* KLMN *faite dans un parallélipipède par un plan qui rencontre deux faces opposées est un parallélogramme.*

En effet, cette section est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles comme intersections de deux plans parallèles coupés par un troisième.

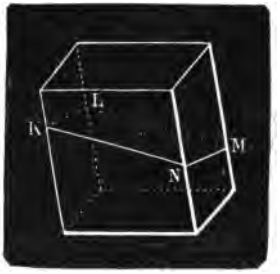


FIG. 415.

THÉORÈME

613. — *Les quatre diagonales d'un parallélipipède se coupent au même point, qui est le milieu de chacune d'elles.*

Soit le parallélipipède AG. Les arêtes DH et BF étant l'une et l'autre égales et parallèles à AE sont égales et parallèles entre elles; donc le quadrilatère BDHF est un parallélogramme et les diagonales BH et DF se coupent en leurs milieux. Considérons maintenant les diagonales DF et AG. Les arêtes AD et FG étant l'une et l'autre égales et parallèles à EH sont égales et parallèles entre elles, donc le

quadrilatère ADGF est un parallélogramme et les diagonales DF et AG se coupent en leurs milieux. Les trois diagonales BH, DF et AG se coupent donc au même point O et en leurs milieux. On démontrerait de même que les diagonales CE et DF se coupent en leurs milieux. Les quatre diagonales se coupent donc au même point O, qui est le milieu de chacune d'elles.

Le point O est dit le *centre* du parallélipipède.

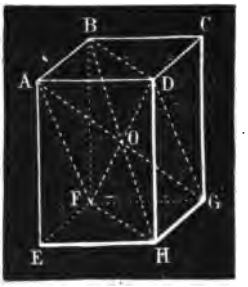


FIG. 416.

THÉORÈME

614. — *Dans un parallélipipède rectangle, le carré d'une diagonale est égal à la somme des carrés des trois dimensions du parallélipipède.*

Soit le parallélipipède rectangle AG. Il s'agit de démontrer que :

$$\overline{DF}^2 = \overline{DH}^2 + \overline{DA}^2 + \overline{DC}^2.$$

En effet, le triangle FBD, rectangle en B, donne

$$\overline{DF}^2 = \overline{FB}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{DH}^2 + \overline{DB}^2;$$

mais le triangle ADB, rectangle en A, donne

$$\overline{DB}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{DC}^2,$$

donc

$$\overline{DF}^2 = \overline{DH}^2 + \overline{DA}^2 + \overline{DC}^2.$$

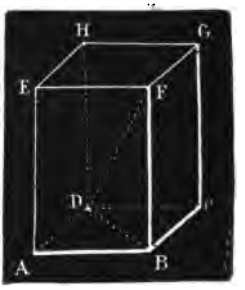


FIG. 417.

615. Corollaire. — *Les quatre diagonales d'un parallélipipède rectangle sont égales;* car la démonstration précédente s'applique à l'une quelconque des diagonales.

THÉORÈME

616. — *Deux parallélipipèdes rectangles de même base et de même hauteur sont égaux.*

En effet, ils ont leurs faces et leurs dièdres égaux deux à deux, donc ils sont superposables.

THÉORÈME

617. — *Deux parallélipipèdes rectangles de même base sont dans le rapport des hauteurs.*

Soient P et P′ deux parallélipipèdes rectangles ayant des bases

ABCD, A′B′C′D′ égales et dont les hauteurs sont AE, A′E′. Il faut démontrer que

$$\frac{P}{P'} = \frac{AE}{A'E'}.$$

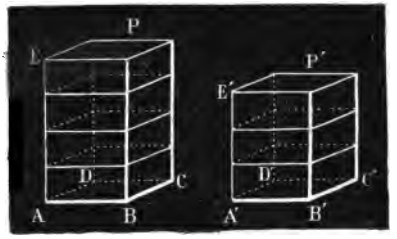


FIG. 418.

Supposons que les hauteurs aient une commune mesure contenue, par exemple, 4 fois dans AE et 3 fois dans A′E′, nous aurons :

$$\frac{AE}{A'E'} = \frac{4}{3}.$$

Si par les points de division des hauteurs AE, A′E′ nous menons des sections droites, nous décomposerons les parallélipipèdes P et P′ en petits parallélipipèdes rectangles égaux entre eux comme ayant leurs bases et leurs hauteurs égales. Or, le parallélipipède P contient 4 de ces petits parallélipipèdes rectangles et le parallélipipède P′ en contient 3, nous aurons donc :

$$\frac{P}{P'} = \frac{4}{3},$$

ou à cause du rapport commun $\frac{4}{3}$,

$$\frac{P}{P'} = \frac{AE}{A'E'}.$$

On démontrerait, comme au n° 228, que le théorème est également vrai lorsque les hauteurs AE, A′E′ n'ont pas de commune mesure.

Ce théorème s'énonce encore ainsi :

Deux parallélipipèdes rectangles qui ont deux dimensions communes sont dans le rapport de leurs troisièmes dimensions.

THÉORÈME

618. — *Deux parallélipipèdes rectangles qui ont une dimension commune sont dans le rapport des produits de leurs dimensions respectives non communes.*

Soient P et P′ les deux parallélipipèdes rectangles, dont nous désignerons les dimensions respectives par a, b, c et a, b', c', il faut démontrer que :

$$\frac{P}{P'} = \frac{b \times c}{b' \times c'}.$$

Pour cela, comparons les parallélipipèdes proposés à un parallé-

lipipède rectangle auxiliaire P″ ayant pour dimensions a, b et c', c'est-à-dire deux dimensions communes avec chacun des deux premiers. Les parallélipipèdes P et P″ ayant deux dimensions communes, a et b, sont entre eux comme leurs dimensions c et c', d'où :

$$\frac{P}{P''} = \frac{c}{c'}.$$

De même, les parallélipipèdes P″ et P′ ayant deux dimensions communes, a et c', sont entre eux comme les dimensions b et b', d'où :

$$\frac{P''}{P'} = \frac{b}{b'}.$$

Multipliant membre à membre les deux égalités précédentes, et supprimant le facteur P″, il vient :

$$\frac{P}{P'} = \frac{b \times c}{b' \times c}.$$

THÉORÈME

619. — *Deux parallélipipèdes rectangles quelconques sont dans le rapport des produits de leurs trois dimensions.*

Soient P et P′ deux parallélipipèdes rectangles quelconques, a, b, c les dimensions du premier et a', b', c' celles du second. Il faut démontrer que :

$$\frac{P}{P'} = \frac{a \times b \times c}{a' \times b' \times c'}.$$

Pour cela, comparons les parallélipipèdes proposés à un troisième parallélipipède rectangle P″ ayant deux dimensions, a et b, communes avec P et une troisième, c', commune avec P′. D'après les théorèmes précédents, nous aurons :

$$\frac{P}{P''} = \frac{c}{c'} \text{ et } \frac{P''}{P'} = \frac{a \times b}{a' \times b'}.$$

Multipliant ces égalités membre à membre, et supprimant le facteur P″, il vient :

$$\frac{P}{P'} = \frac{a \times b \times c}{a' \times b' \times c'}.$$

THÉORÈME

620. — *Le volume d'un parallélipipède rectangle est égal au produit de ses trois dimensions, si l'on prend pour unité de volume le cube qui a pour côté l'unité de longueur.*

Soit, en effet, le parallélipipède rectangle P dont les trois dimensions sont a, b, c.

Prenons pour *unité de volume* le cube C ayant pour côté l'*unité de longueur* qui sert à mesurer les dimensions du parallélipipède P.

Nous aurons, d'après le théorème précédent,

$$\frac{P}{C} = \frac{a \times b \times c}{1 \times 1 \times 1} = \frac{a}{1} \times \frac{b}{1} \times \frac{c}{1}.$$

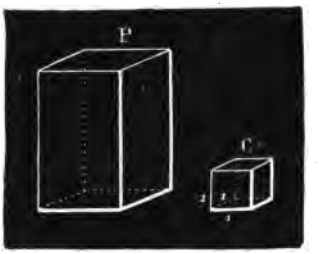


FIG. 419.

Or, le cube C étant l'unité de volume, le rapport $\frac{P}{C}$ exprime la mesure du parallélipipède rectangle (*Arithm.*, nos 4 et 5), de même que $\frac{a}{1}$, $\frac{b}{1}$ et $\frac{c}{1}$ représentent les mesures des dimensions du parallélipipède rectangle. Donc, *le volume d'un parallélipipède rectangle est égal au produit des nombres qui expriment les mesures de ses trois dimensions*, ou, plus simplement, *égal au produit de ses trois dimensions*.

621. Corollaire I. — *Le volume d'un parallélipipède rectangle est égal au produit de sa base par sa hauteur*, car le produit des deux dimensions de sa base représente l'aire de cette base.

622. Corollaire II. — *Le volume du cube est égal au cube de son arête ;* car dans un cube les trois dimensions sont égales. En désignant par a l'arête d'un cube et par V son volume, on a donc :

$$V = a \times a \times a = a^3.$$

THÉORÈME

623. — *Le volume d'un parallélipipède droit a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Soit le parallélipipède AG dont la base est ABCD et la hauteur AE.

Il faut démontrer que :

Parallélipipède AG = ABCD × AE.

En effet, si l'on remplace les parallélogrammes de ses bases par les rectangles équivalents ABIK, EFLM, on formera ainsi un parallélipipède rectangle AL ayant même hauteur AE que le parallélipipède AG et des bases équivalentes ; mais on aura en outre deux prismes triangulaires droits ADKEHM, BCIFGL, égaux, car, ayant des bases et des hauteurs égales, on peut les faire coïncider.

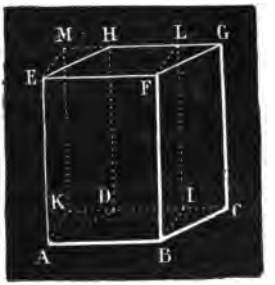


FIG. 420.

Or, si de la figure totale on retranche successivement les prismes triangulaires égaux DKEHM, BCIFGL, les restes qu'on obtient, ou les parallélipipèdes AG, AL, sont équivalents.

Mais le parallélipipède AL a pour mesure (621) ABIK × AE, donc le parallélipipède AG, qui lui est équivalent, aura aussi cette mesure, ou ABCD × AE, car le rectangle ABIK peut se remplacer par le parallélogramme ABCD. Donc enfin le volume d'un parallélipipède droit a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.

THÉORÈME

624. — *Le volume d'un prisme droit est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

Soit d'abord le prisme droit triangulaire ABCDEF. Formons le parallélipipède ayant pour base le parallélogramme ABCG construit sur AB et sur BC et pour hauteur la hauteur AD du prisme. Ce parallélipipède est double du prisme triangulaire, car il est la somme des deux prismes ABCDEF, AGCDFH égaux comme ayant des bases égales et même hauteur. Or, le volume du parallélipipède AF est égal au produit de sa base ABCG par sa hauteur AD ou ABCG × AD; donc le prisme triangulaire qui en est la moitié a pour mesure $\frac{1}{2}$ ABCG × AD ou ABC × AD, c'est-à-dire le produit de sa base par sa hauteur.

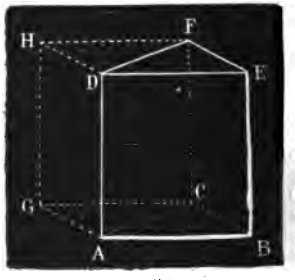


FIG. 421.

Soit en second lieu le prisme droit quelconque ABCDEF....

Décomposons-le en prismes triangulaires par des plans menés selon l'arête AF et les arêtes CK, DL. Ces prismes ont même hauteur que le prisme total. Si nous appelons H la hauteur commune, nous aurons :

Prisme ABCFGK = ABC × H,

Prisme ACDFKL = ACD × H,

Prisme ADEFLM = ADE × H.

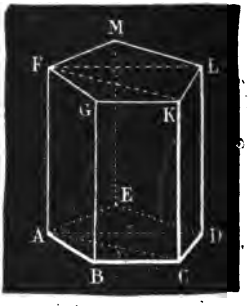


FIG. 422.

Donc le prisme polygonal, qui est la somme de ces prismes triangulaires, a pour mesure :

ABC × H + ACD × H + ADE × H = (ABC + ACD + ADE) × H

ou ABCDE × H,

c'est-à-dire le produit de sa base par sa hauteur.

THÉORÈME

625. — *Les sections parallèles faites dans un prisme sont des polygones égaux.*

Soient, dans le prisme AI, les sections parallèles LMNOP et QRSTU : ces sections forment deux polygones égaux.

En effet, deux côtés homologues quelconques LM, QR sont parallèles comme étant les intersections de deux plans parallèles, LN, QS, par un troisième AG, et de plus égaux, puisque ce sont des parallèles comprises entre parallèles. Deux angles quelconques LMN, QRS, sont aussi égaux, car ils ont leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens. Ces deux polygones, ayant leurs côtés et leurs angles respectivement égaux, sont égaux.

FIG. 423.

626. Corollaire I. — *Toute section parallèle à la base est égale à cette base.*

627. Définition. — On appelle *section droite* d'un prisme toute section faite par un plan perpendiculaire aux arêtes latérales.

THÉORÈME

628. — *Un prisme oblique équivaut à un prisme droit qui a pour base la section droite du prisme oblique et pour hauteur une des arêtes latérales du prisme oblique.*

Par un point quelconque I de l'arête AE, menons la section droite IKLM ; prolongeons ensuite EA de manière à avoir AN = IE ; puis, par le point N, conduisons un plan parallèle à IKLM ; ce plan rencontrera les arêtes FB, GC, HD, prolongées, et nous obtiendrons ainsi un prisme droit NL équivalent au prisme oblique AG. Prouvons d'abord que les solides NC et IG sont égaux. Pour cela, portons la section NP sur son égale (625) IL de manière qu'elles coïncident dans toute leur étendue, les arêtes NA, OB, PC, QD, perpendiculaires au plan NP, prendront respectivement les directions des arêtes IE, KF, LG, MH, perpendiculaires au plan IL ; mais, le plan NP étant parallèle au plan IL et AN étant égal à IE, NI = AE, de même OK = BF ; PL = CG ; QM = DH, donc OB = KF, PC = LG, QD = MH ; donc les points A, B, C, D tomberont aux points E, F, G, H : les deux solides

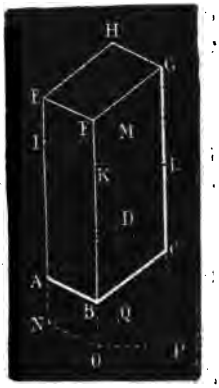


FIG. 424.

NC, IG coïncideront dans toute leur étendue et seront par conséquent égaux.

Donc, si nous retranchons successivement de la figure totale NG les solides égaux, NC et IG, les deux restes que nous obtiendrons, ou les prismes AG et NL, seront équivalents; d'ailleurs le prisme droit NL a pour hauteur NI = AE; or AE est une des arêtes latérales du prisme oblique. C. q. f. d.

629. Remarque. — Il est évident que les sections NP, IL auraient pu être perpendiculaires à l'arête AE aux points A et E, la démonstration aurait été la même. Donc, *si par les deux extrémités d'une arête d'un prisme oblique on mène des sections droites, on obtient un prisme droit équivalent au prisme oblique.*

THÉORÈME

630. — *Le volume d'un parallélipipède quelconque est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

En effet, tout parallélipipède AG est un prisme oblique, équivalant à un prisme droit, ayant pour base la section droite KLMN et pour hauteur une arête telle que AB (628). Le parallélipipède AG est donc équivalent au parallélipipède droit ayant pour base le parallélogramme KLMN et pour hauteur AB. Or, si du point L on mène LI perpendiculaire au plan ABCD, cette droite sera à la fois la hauteur du parallélipipède AG (611) et celle du parallélogramme KLMN; mais le parallélipipède droit a pour mesure KLMN × AB ou LI × KN × AB. Le volume du parallélipipède proposé AG est donc aussi égal à LI × KN × AB ou égal à AB × KN × LI, c'est-à-dire égal au produit de sa base par sa hauteur, car AB × KN exprime l'aire de la base ABCD.

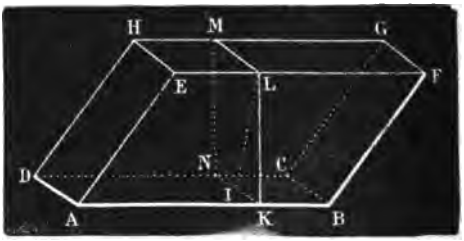


FIG. 425.

En représentant par B la base d'un parallélipipède quelconque, par H sa hauteur et par V son volume, on a la formule

$$V = B \times H$$

631. Corollaire. — *Deux parallélipipèdes qui ont des bases équivalentes et même hauteur sont équivalents.*

THÉORÈME

632. — *Le volume d'un prisme quelconque est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

Soit d'abord un prisme triangulaire ABCEFG.

Construisons le parallélipipède BH ayant pour base le parallélogramme ABCD construit sur AB et sur BC et pour arêtes latérales des droites égales et parallèles à AE. Le parallélipipède ainsi formé est le double du prisme.

En effet, soit une section droite KLMN faite dans ce parallélipipède. Les deux prismes triangulaires AF, DG, dont se compose le parallélipipède, sont respectivement égaux à deux prismes triangulaires droits dont l'un aurait pour base le triangle KLM et l'autre le triangle KMN et pour hauteur commune AE. Mais, les triangles KLM et KMN étant égaux, ces prismes droits sont égaux : d'où il suit que les deux prismes obliques AF, DG sont équivalents ; par suite, le parallélipipède BH est double du prisme triangulaire AF. Or, le volume du parallélipipède est égal au produit de sa base ABCD par sa hauteur HI, ou ABCD $\times$ HI : donc le prisme triangulaire, qui en est la moitié, a pour mesure $\frac{1}{2}$ ABCD $\times$ HI ou ABC $\times$ HI, c'est-à-dire le produit de sa base par sa hauteur.

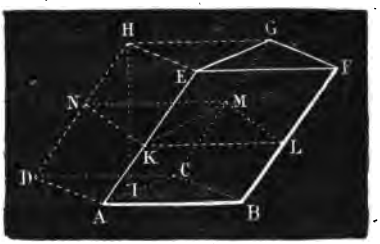


FIG. 426.

Soit en second lieu un prisme quelconque AH. Décomposons ce solide en prismes triangulaires par des plans menés selon l'arête AF et les arêtes CH, DK. Le prisme donné est la somme des trois prismes triangulaires dans lesquels il est décomposé et qui ont HI pour hauteur commune. Le volume du prisme sera donc :

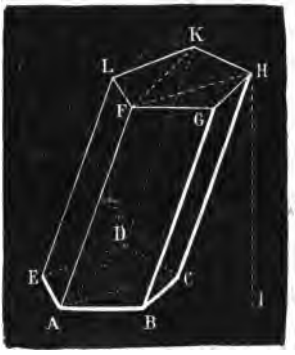


FIG. 427.

$$(ABC + ACD + ADE) \times HI \text{ ou } ABCDE \times HI.$$

En représentant par B la base d'un prisme quelconque, par H sa hauteur et par V son volume, on a la formule

$$V = B \times H.$$

633. Corollaire. — *Deux prismes qui ont des bases équivalentes et même hauteur sont équivalents.*

CHAPITRE II

Pyramide. — Volume de la pyramide, d'un tronc de pyramide à bases parallèles, d'un tronc de prisme à bases triangulaires. — Volume de certains polyèdres convexes.

Définitions.

634. — Une *pyramide* est un solide dont l'une des faces est un polygone quelconque appelé *base* et dont les autres faces sont des triangles ayant pour bases les côtés de ce polygone et pour sommet un même point qui est le *sommet* de la pyramide.

La *hauteur* est la perpendiculaire abaissée du sommet sur le plan de la base. SO est la hauteur de la pyramide, si cette droite est perpendiculaire sur le plan de la base ABCDE.

On appelle *apothème* la perpendiculaire menée du sommet sur un côté quelconque de la base : telle est la droite SK.

L'ensemble des faces triangulaires de la pyramide forme sa surface *latérale* ou *convexe*.

Une pyramide tire son nom de sa base : ainsi une pyramide est dite *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonale*..., etc., selon que sa base est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, etc.

FIG. 428.

Une pyramide est *régulière* lorsque sa base est un polygone régulier et que sa hauteur tombe au *centre* de ce polygone ; dans ce cas, la hauteur est l'*axe* de la pyramide.

635. — On appelle *tronc de pyramide à bases parallèles* le solide compris entre la base d'une pyramide et un plan sécant parallèle à cette base. La distance des deux plans parallèles est la *hauteur du tronc*.

THÉORÈME

636. — *Si l'on coupe une pyramide par un plan parallèle à sa base :*

1° *Les arêtes et la hauteur sont divisées en parties proportionnelles ;*

2° *La section faite dans la pyramide est semblable à la base ;*

3° *Le rapport des aires de la section et de la base est égal au rapport des carrés de leurs distances au sommet.*

Soient SABCD la pyramide coupée par un plan *abcd* parallèle à la base et SO la hauteur rencontrée par le plan sécant au point *o*.

1° Menons par le sommet S un plan P parallèle à la base. Les trois

plans parallèles ABCD, *abcd* et P divisent (538) les arêtes SA, SB,... et la hauteur SO en parties proportionnelles. On a donc :

$$\frac{Sa}{SA} = \frac{Sb}{SB} = \ldots\ldots = \frac{So}{SO}.$$

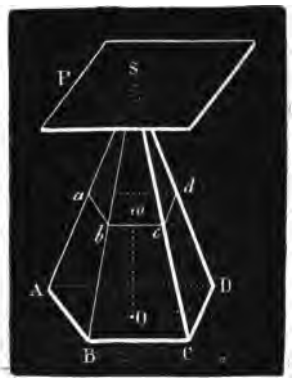


FIG. 429.

2° Les angles *abc*, *bcd*,... de la section sont égaux respectivement aux angles ABC, BCD,... de la base, comme ayant leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens ; en outre, les triangles S*ab*, S*bc*,... étant semblables aux triangles SAB, SBC,..., on a :

$$\frac{ab}{AB} = \frac{Sb}{SB} = \frac{bc}{BC} = \frac{Sc}{SC} \ldots\ldots$$

La section et la base ayant leurs angles égaux et leurs côtés homologues proportionnels sont deux polygones semblables.

3° La similitude de la section et de la base donne :

$$\frac{abcd}{ABCD} = \frac{\overline{ab}^2}{\overline{AB}^2};$$

mais on a (1° et 2°) :

$$\frac{Sb}{SB} = \frac{So}{SO} = \frac{ab}{AB};$$

par suite :

$$\frac{\overline{So}^2}{\overline{SO}^2} = \frac{\overline{ab}^2}{\overline{AB}^2},$$

d'où l'égalité cherchée :

$$\frac{abcd}{ABCD} = \frac{\overline{So}^2}{\overline{SO}^2}.$$

637. Corollaire I. — *Si deux pyramides ont même hauteur, les aires des sections faites par des plans parallèles aux bases, et à la même distance des sommets, sont dans le rapport des bases.*

En effet, en représentant par B et B′ les aires des bases, par *b* et *b′* celles des sections, par H la hauteur commune et par *h* la distance du sommet à chaque section, on a (3°) :

$$\frac{b}{B} = \frac{h^2}{H^2} \text{ et } \frac{b'}{B'} = \frac{h^2}{H^2},$$

d'où :

$$\frac{b}{B} = \frac{b'}{B'} \text{ et, par suite, } \frac{b}{b'} = \frac{B}{B'}.$$

638. Corollaire II. — *Si deux pyramides ont même hauteur et des bases équivalentes, les sections faites par des plans parallèles aux bases, et à la même distance des sommets, sont équivalentes.*

Car,

$$\frac{b}{b'} = \frac{B}{B'}$$

donne $b' = b$, dans le cas où $B' = B$.

THÉORÈME

639. — *Deux pyramides triangulaires qui ont des bases équivalentes et même hauteur sont équivalentes.*

Soient les deux pyramides S et S′ de bases équivalentes et de même hauteur.

Supposons les bases ABC, A′B′C′ des pyramides sur le même plan ; divisons la hauteur H en un certain nombre de parties égales, cinq par exemple, *mn*, *no*, *op*, *pq*, *qr*, et par les points de division *n*, *o*, *p*, *q*, *r*, menons des plans parallèles aux plans des bases. Puisque les bases sont équivalentes, les sections correspondantes le seront aussi (638). Sur chacune des sections de chaque pyramide, construisons des prismes triangulaires compris entre les plans parallèles, de manière que, dans la pyramide S, la base ABC soit la base *inférieure* du premier prisme ; la première section, la base inférieure du deuxième prisme, etc. ; tandis que, dans la pyramide S′, la première section sera la base *supérieure* du premier prisme ; la seconde section, la base supérieure du deuxième prisme, etc. Le volume de la somme des prismes P, P′, P″, P‴, P⁗ est évidemment plus grand que le volume de la pyramide S, et le volume de la somme des prismes p', p'', p''', p'''', p^v plus petit que le volume de la pyramide S′. Nous aurons donc :

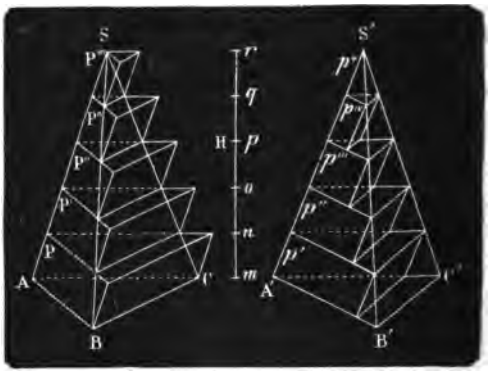


FIG. 430.

$$S < P + P' + P'' + P''' + P''''$$
$$S' > p' + p'' + p''' + p'''' + p^v$$

Retranchant ces inégalités membre à membre, il vient :

$$S - S' < P + P' + P'' + P''' + P'''' - p' - p'' - p''' - p'''' - p^v$$

mais les prismes P′ et p', P″ et p''..., ayant des bases équivalentes et même hauteur, sont équivalents. L'inégalité précédente se réduit donc à :

$S - S' < P - p^v$; *a fortiori* $S - S' < P$. Mais : $P = ABC \times \frac{H}{5}$;

Si au lieu de cinq divisions, on en prend un nombre n, très grand, $\frac{H}{n}$ tend vers o, et par là-même, $P = ABC \times \frac{H}{n}$ tend aussi vers o ; donc à la limite, la différence S — S′ est nulle et S = S′. C.Q.F.D.

THÉORÈME

640. *Le volume d'une pyramide quelconque est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

Soit d'abord la pyramide triangulaire SABC. Menons les droites

AD, CE égales et parallèles à l'arête SB ; puis achevons le prisme triangulaire ABCDES, qui a même base et même hauteur que la pyramide donnée : nous allons démontrer que la pyramide est le tiers du prisme.

En effet, le prisme se compose de la pyramide SABC et de la pyramide quadrangulaire SACED. Or, si nous conduisons le plan SDC, nous diviserons cette pyramide en deux pyramides triangulaires SACD, SCDE, qui ont des bases ACD, CDE égales et même hauteur, la distance du sommet S au plan ADEC; donc ces deux pyramides sont équivalentes (639). Mais la pyramide SCDE, au lieu d'avoir son sommet en S, peut l'avoir en C, et alors elle aura DSE pour base, et sera équivalente à la pyramide SABC; car ces deux pyramides auront des bases égales, ABC = DSE, et pour hauteur commune SO, la hauteur même du prisme. La pyramide SDCE étant équivalente aux pyramides SACD, SABC, les trois pyramides sont équivalentes entre elles, et l'une quelconque, SABC, est le $\frac{1}{3}$ du prisme. Or, le prisme ABCDES a pour mesure ABC × SO; donc la pyramide SABC a pour mesure $\frac{1}{3}$ ABC × SO.

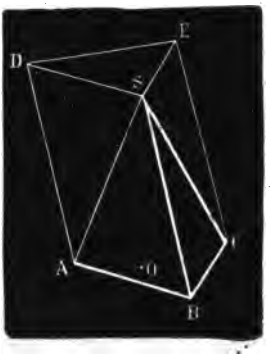


FIG. 431.

Soit en second lieu la pyramide polygonale SABCDE.

Décomposons-la en pyramides triangulaires SABC, SACD, SADE ayant même hauteur SO que la pyramide donnée, nous aurons :

$$\text{Pyramide SABC} = \frac{1}{3}\,\text{ABC} \times \text{SO}.$$

$$\text{Pyramide SACD} = \frac{1}{3}\,\text{ACD} \times \text{SO}.$$

$$\text{Pyramide SADE} = \frac{1}{3}\,\text{ADE} \times \text{SO},$$

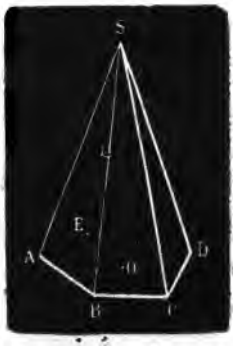


FIG. 432.

donc :

$$\text{Pyramide SABCDE} = \frac{1}{3}(\text{ABC} + \text{ACD} + \text{ADE}).\text{SO} = \frac{1}{3}\,\text{ABCDE} \times \text{SO}.$$

En désignant par V le volume d'une pyramide quelconque, par B sa base, et par H sa hauteur, on a :

$$\text{V} = \frac{1}{3}\,\text{B} \times \text{H}.$$

641. Corollaire I. — *Une pyramide quelconque est le tiers d'un prisme de même base et de même hauteur.*

642. Corollaire II. — *Deux pyramides quelconques qui ont des bases équivalentes et même hauteur sont équivalentes.*

Donc, pour transformer une pyramide à base quelconque en une pyramide triangulaire équivalente, il suffit de transformer en un triangle équivalent la base polygonale de la pyramide donnée.

643. Corollaire III. — *Deux pyramides de bases équivalentes sont dans le rapport des hauteurs. — Deux pyramides de même hauteur sont dans le rapport des bases.*

644. Corollaire IV. — *Lorsqu'on sait évaluer le volume d'une pyramide, on sait aussi trouver le volume d'un polyèdre quelconque.*

Car il suffit de décomposer le polyèdre en pyramides : la somme des volumes de ces pyramides donne le volume du polyèdre.

APPLICATION. — PROBLÈME

645. — *Trouver en fonction de l'arête* a : 1° *le volume du tétraèdre;* 2° *le volume de l'octaèdre.*

1° La base du tétraèdre est $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (454, 1°). Quant à sa hauteur h, elle tombe au centre du cercle circonscrit, et forme par conséquent un triangle rectangle avec l'arête du tétraèdre et le rayon du cercle, de sorte qu'on a :

$$h^2 = a^2 - R^2.$$

Or (399, 2°),

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}} \text{ et } R^2 = \frac{a^2}{3}.$$

On a donc :

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3},$$

d'où :

$$h = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

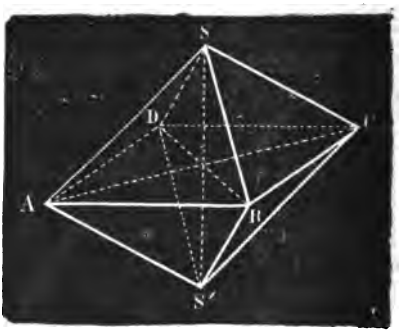


FIG. 433.

On a donc, si l'on désigne par V le volume du tétraèdre :

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

2° L'octaèdre (*fig.* 433) se compose de deux pyramides qui ont pour

base commune le carré ABCD de côté a et, par conséquent, de surface a^2. D'autre part, la hauteur SS′ est visiblement égale à la diagonale du carré de côté a et, par suite, égale à $a\sqrt{2}$. On a donc pour le volume cherché V :

$$V = \frac{1}{3} a^2 \times a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Ainsi, le volume de l'octaèdre vaut 4 fois le volume du tétraèdre de même côté.

THÉORÈME

646. — *Deux pyramides triangulaires qui ont un angle solide égal sont dans le rapport des produits des arêtes de cet angle solide.*

Nous pouvons supposer que les angles solides égaux coïncident. Soient donc les pyramides triangulaires SABC, SA′B′C′. Menons les droites BA′, BC′, et comparons successivement chacune des pyramides proposées à la pyramide auxiliaire SA′BC′.

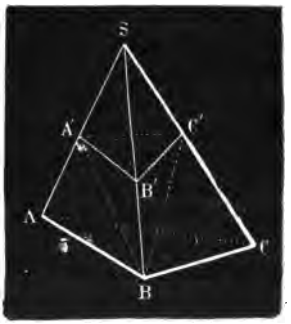


FIG. 434.

Or, si nous prenons le point B pour sommet commun des pyramides SA′BC′ et SABC, nous voyons qu'elles ont même hauteur et sont, par conséquent, dans le rapport de leurs bases SA′C′, SAC; mais ces bases, ayant un angle égal, sont elles-mêmes dans le rapport des produits des côtés qui comprennent cet angle (455). Nous pouvons donc écrire :

$$\frac{SA'BC'}{SABC} = \frac{SA' \times SC'}{SA \times SC}. \qquad (1)$$

D'autre part, si nous prenons le point A′ pour sommet commun des pyramides SA′B′C′ et SA′BC′, nous voyons qu'elles ont même hauteur et sont, par conséquent, dans le rapport de leurs bases SB′C′, SBC′ qui sont elles-mêmes dans le rapport des droites SB′, SB (432). Nous pouvons donc écrire :

$$\frac{SA'B'C'}{SA'BC'} = \frac{SB'}{SB}. \qquad (2)$$

Multipliant les relations (1) et (2) membre à membre et supprimant le facteur commun SA′BC′, il vient celle qu'il fallait trouver :

$$\frac{SA'B'C'}{SABC} = \frac{SA' \times SB' \times SC'}{SA \times SB \times SC}.$$

THÉORÈME

647. — *Le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles équivaut à la somme de trois pyramides ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc, et pour bases respectives la base inférieure du tronc, sa base supérieure et une moyenne géométrique entre ces deux bases.*

Soit d'abord le tronc de pyramide triangulaire ABCDEF, à bases, ABC, DEF, parallèles.

Si nous menons les plans AEC, DEC, nous partagerons le tronc en trois pyramides triangulaires EABC, EDFC, EDAC. La première EABC a pour base ABC, ou la base inférieure du tronc, et pour hauteur la hauteur même du tronc, car son sommet E se trouve sur le plan DEF. La seconde EDFC, au lieu d'avoir son sommet en E, peut l'avoir en C, et alors elle aura DEF pour base, ou la base supérieure du tronc ; d'ailleurs, elle aura même hauteur que lui, puisque son sommet C est sur le plan ABC. Les deux pyramides EABC, EDFC répondent déjà à l'énoncé du théorème.

FIG. 435.

Démontrons que la pyramide restante EDAC est bien équivalente à la troisième annoncée.

Pour cela, menons par le point E une droite EG parallèle à AD, et joignons le point G aux points D et C, nous formerons ainsi une nouvelle pyramide GADC équivalente à la pyramide EADC, car elles ont ADC pour base commune, et leurs sommets étant en G et en E, sur une parallèle EG au plan de la base, elles ont même hauteur ; mais la pyramide GADC peut être considérée comme ayant son sommet en D, sa hauteur sera alors celle du tronc ; nous n'avons plus qu'à montrer que sa base AGC est moyenne proportionnelle entre les deux bases du tronc.

Menons GK parallèle à BC : le triangle AGK sera égal au triangle DEF, car AG = DE et ces triangles sont de plus équiangles. Or, si l'on donne aux triangles AGK et AGC le point G pour sommet, ils ont même hauteur et sont entre eux comme leurs bases AK, AC ; donc :

$$\frac{AGK}{AGC} = \frac{AK}{AC}.$$

De même, si l'on donne aux triangles AGC et ABC, le point C pour sommet, ils ont même hauteur et sont entre eux comme leurs bases AG, AB ; donc :

$$\frac{AGC}{ABC} = \frac{AG}{AB}.$$

Mais GK étant parallèle à BC, les rapports $\frac{AK}{AC}$ et $\frac{AG}{AB}$ sont égaux, et par conséquent :

$$\frac{AGK}{AGC} = \frac{AGC}{ABC}$$

ou, puisque DEF = AGK :

$$\frac{DEF}{AGC} = \frac{AGC}{ABC}.$$

Donc la base AGC de la troisième pyramide est bien moyenne proportionnelle entre les deux autres bases du tronc.

Soit, en second lieu, le tronc de pyramide polygonale ABCDEFGH, qu'on a obtenu en coupant la pyramide SABCD par un plan parallèle à sa base. A côté de cette pyramide, concevons une pyramide triangulaire, S'IKL, ayant même hauteur et une base IKL équivalente à la base ABCD. Ces deux pyramides, ayant des bases équivalentes et même hauteur, sont équivalentes. Si nous les supposons sur un même plan, tout plan sécant parallèle aux bases déterminera deux sections EFGH, MNP équivalentes (638). Les deux pyramides SEFGH, S'MNP, qui ont des bases équivalentes et des hauteurs égales, sont équivalentes.

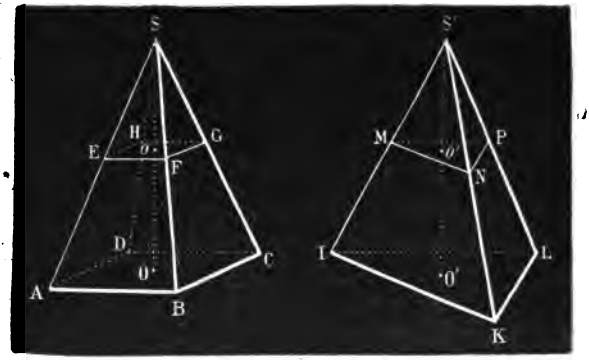


FIG. 436.

Mais, si des deux grandes pyramides équivalentes on retranche les deux petites, également équivalentes, les deux restes ou les troncs le seront aussi. Le théorème, vrai pour une pyramide triangulaire, l'est donc de même pour le tronc de pyramide polygonale.

En désignant par V le volume d'un tronc de pyramide, par B et b ses bases, et par h sa hauteur, on a :

$$V = \frac{1}{3}h \times B + \frac{1}{3}h \times b + \frac{1}{3}h \times \sqrt{Bb}$$

ou

$$V = \frac{1}{3}h(B + b + \sqrt{Bb}).$$

648. Remarque I. — On peut encore déterminer le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles, en considérant ce solide comme la différence de deux pyramides.

En effet, soient B et b les bases du tronc AG (*fig.* 435), h sa hauteur et H, H′ les distances du sommet aux plans des deux bases. En désignant par V le volume du tronc, on a :

$$V = \frac{1}{3}BH - \frac{1}{3}bH'.$$

Il s'agit de déterminer H et H′ en fonction des quantités connues B, b et h. Or, on a (636, 3°) :

$$\frac{B}{b} = \frac{H^2}{H'^2}, \text{ d'où } \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}} = \frac{H}{H'}.$$

Cette dernière égalité donne :

$$\frac{H}{\sqrt{B}} = \frac{H'}{\sqrt{b}} = \frac{H - H'}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} = \frac{h}{\sqrt{B} - \sqrt{b}};$$

d'où :

$$H = \frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \text{ et } H' = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}.$$

Si l'on substitue ces valeurs de H et de H′ dans celle de V, il vient :

$$V = \frac{1}{3}B \times \frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} - \frac{1}{3}b \times \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}},$$

ou (*Cours d'algèbre*)

$$V = \frac{1}{3}h\left(\frac{\sqrt{B^3} - \sqrt{b^3}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}\right),$$

ou enfin, en effectuant la division indiquée,

$$V = \frac{1}{3}h(B + b + \sqrt{Bb}).$$

649. Remarque II. — Le volume du tronc de pyramide à bases parallèles peut aussi s'exprimer en fonction d'une seule des bases et du rapport de similitude.

Si l'on désigne par A et a deux arêtes homologues du tronc, le rapport de similitude des bases est $\frac{a}{A}$; or, on a :

$$\frac{b}{B} = \frac{a^2}{A^2}, \text{ d'où : } b = B \times \frac{a^2}{A^2}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans celle de V, trouvée plus haut, il vient successivement :

$$V = \frac{1}{3} h\left(B + B \times \frac{a^2}{A^2} + \sqrt{B \times B \times \frac{a^2}{A^2}}\right),$$

$$V = \frac{1}{3} h\left(B + B \times \frac{a^2}{A^2} + B\frac{a}{A}\right),$$

$$V = \frac{1}{3} hB\left(1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2}\right).$$

Cette formule, n'exigeant pas d'extraction de racine, est plus commode dans la pratique que la précédente.

THÉORÈME

650. — *Le volume d'un tronc de prisme triangulaire est la somme de trois pyramides triangulaires ayant pour base commune la base du prisme et pour sommets les sommets de l'autre base.*

1° Si nous menons le plan AEC, nous obtiendrons la pyramide EABC, qui est une des pyramides annoncées, car elle a pour base ABC et son sommet est au point E.

2° Cette pyramide détachée, il reste la pyramide quadrangulaire EACFD. Partageons-la par le plan ECD en deux pyramides EDAC, EDCF. A la première de ces pyramides nous pouvons substituer BACD, car elles ont la même base ADC et des hauteurs égales, puisque leurs sommets sont en E et en B sur une même parallèle BE au plan de cette base. Mais la pyramide BACD peut avoir son sommet en D et sa base en ABC; cette pyramide est par conséquent la seconde annoncée.

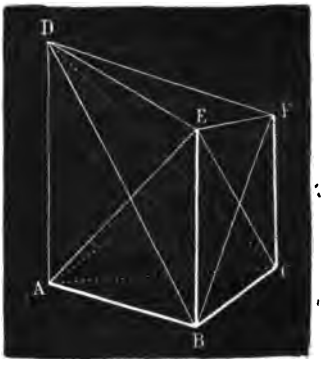


FIG. 437.

3° Enfin, à la pyramide EDCF, nous pouvons substituer la pyramide BACF, car les triangles DCF et ACF, qui sont les bases de ces pyramides, sont équivalents (puisqu'ils ont même base CF et des hauteurs égales, comme ayant leurs sommets respectifs en D et en A, sur une parallèle AD à la base CF); de plus, les deux pyramides ont des hauteurs égales, car leurs sommets respectifs sont en E et en B, sur une parallèle EB au plan de leurs bases; donc ces deux pyramides, ayant des bases équivalentes et des hauteurs égales, sont équivalentes.

Mais la pyramide BACF peut avoir son sommet en F, et sa base sera ABC. Cette pyramide est par conséquent la troisième annoncée.

Donc enfin le théorème est démontré.

651. Corollaire I. — *Le volume d'un tronc de prisme triangulaire droit est égal au produit de sa base par le tiers de la somme de ses arêtes.*

652. Corollaire II. — *Le volume d'un tronc de prisme triangulaire quelconque est égal au produit de la section droite par le tiers de la somme des trois arêtes.*

Soit le tronc AF. Partageons-le par la section droite KLM en deux prismes droits AM, KF. Soit S l'aire de la section droite. Le premier prisme a pour volume

$$S \times \frac{KA + LB + MC}{3}$$

et le second

$$S \times \frac{KD + LE + MF}{3}.$$

Le volume V du prisme donné, somme de ces deux prismes, est donc :

$$V = S. \frac{AD + BE + CF}{3}.$$

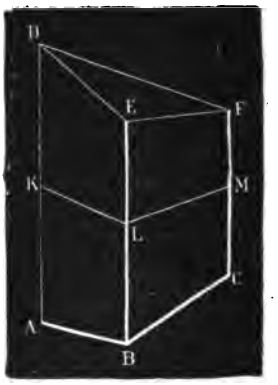


FIG. 438.

653. Remarque. — On calcule les volumes des auges de maçon, des tombereaux, des tas de pierres disposés le long des routes, etc., en considérant chacun de ces polyèdres (*fig.* 439) comme un tronc de prisme quadrangulaire.

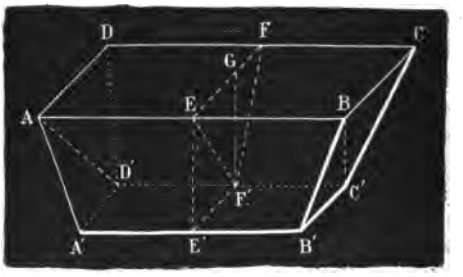


FIG. 439.

Car, si l'on suppose un plan passant par les arêtes opposées AB, D'C' et un autre plan EFF'E' perpendiculaire aux arêtes, le polyèdre se trouve ainsi décomposé en deux troncs de prismes triangulaires, ADD'BCC' et AD'A'BC'B', dont les volumes respectifs sont (652) :

$$\frac{EF \times F'G}{2} \times \left(\frac{AB + DC + D'C'}{3}\right) \text{ et } \frac{E'F' \times F'G}{2} \times \left(\frac{AB + A'B' + D'C}{3}\right).$$

Si l'on représente par a, b les dimensions AB, AD de la base supérieure, par a', b' les dimensions les dimensions correspondantes de

base inférieure, par h la distance entre les bases et qu'on substitue dans l'expression précédente, on aura pour le volume V du tronc de prisme quadrangulaire :

$$V = \frac{b \times h}{2} \times \frac{a'+a+a'}{3} + \frac{b' \times h}{2} \times \frac{a+a'+a'}{3}$$

ou enfin :

$$V = \frac{1}{6} h \left[b(2a+a') + b'(a+2a') \right].$$

CHAPITRE III

FIGURES SYMÉTRIQUES DANS L'ESPACE

Symétrie par rapport à un point, à une droite et à un plan. — Ce dernier mode de symétrie se ramène au premier. — Deux polyèdres symétriques sont équivalents.

Définitions.

654. — Deux points A, A′ sont *symétriques* par rapport à un point O, appelé *centre*, lorsque ce point est le milieu de la droite AA′.

FIG. 440.

655. — Deux points A, A′ sont symétriques par rapport à une droite XY, appelée *axe*, lorsque cette droite est perpendiculaire sur le milieu de la droite AA′. Ces deux définitions sont déjà connues du lecteur (142 et 143).

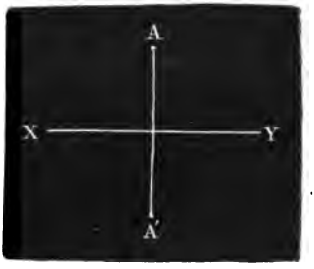


FIG. 441.

656. — Deux points A, A′ sont *symétriques par rapport à un plan*, lorsque ce plan est perpendiculaire au milieu de la droite qui joint ces deux points (*fig.* 442).

Deux figures sont symétriques par rapport *à un centre, à un*

axe ou *à un plan*, lorsque les points de ces deux figures sont deux à deux symétriques par rapport à ce centre, à cet axe ou à ce plan. Le centre, l'axe et le plan sont appelés *centre de symétrie*, *axe de symétrie et plan de symétrie.*

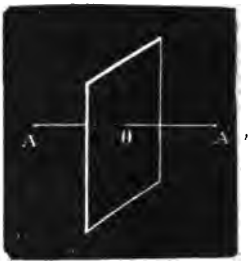


FIG. 442.

THÉORÈME

657. — *Deux figures* F, F′ *symétriques par rapport à un axe, sont égales.*

Soient A, B....., des points de la figure F et A′, B′....., des points symétriques de la figure F′. Puisque par définition l'axe XY est perpendiculaire au milieu des droites AA′, BB′, si l'on fait tourner la figure F′ de 180° autour de l'axe XY, les points A′, B′..... de la figure F′ viendront s'appliquer sur les points A, B... de la figure F; par suite, les figures F et F′ coïncideront. Donc elles sont égales.

Deux figures symétriques par rapport à un axe étant identiques, il n'y a pas lieu d'étudier la symétrie par rapport à une droite.

FIG. 443.

THÉORÈME

658. — *Deux figures* F′, F″ *symétriques d'une même figure* F, *par rapport à deux points différents, sont égales.*

Soient A, B deux points quelconques de la figure F; A′, B′ et A″, B″, leurs points homologues dans les figures F′, F″ par rapport aux deux points O, O′.

Les points O, O′ étant les milieux des droites AA′, AA″, la droite A′A″ est parallèle à OO′ et vaut le double de cette droite; il en est de même de B′B″. Donc A′A″ est égale et parallèle à B′B″. Si donc on transporte la figure F′ de manière que tous ses points décrivent des droites parallèles à OO′ et égales au double de cette droite, on amènera cette figure F′ à coïncider avec la figure F″. Donc ces deux figures sont égales.

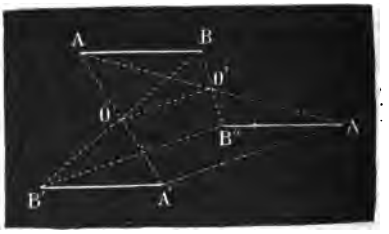


FIG. 444.

659. Remarque. — Les droites A′B′, A″B″ sont égales et parallèles à AB, mais de sens contraire à cette droite. Il résulte de là que

toutes les figures symétriques de F, par rapport à des centres différents, conservent toutes non seulement la même forme et les mêmes dimensions, mais elles ont de plus la même *orientation*.

THÉORÈME

660. — *Deux figures* F′, F″, *symétriques d'une même figure* F, *l'une par rapport à un plan, l'autre par rapport à un point de ce plan, sont égales.*

Soient A un point de la figure F et A′ un point de la figure F′, symétrique de A par rapport au plan P, soit enfin A″ un point de la figure F″ symétrique du même point A par rapport au centre O pris sur le plan P.

Elevons au point O la perpendiculaire XY au plan P. Cette droite étant parallèle à AA′ se trouvera dans le plan AA′A″. D'ailleurs, comme HA = HA′ et OA = OA″, la droite A′A″ est parallèle à OH; mais la droite XY étant parallèle au côté AA′ du triangle AA′A″ et passant au milieu O de AA″ passe aussi par le milieu I de A′A″ et lui est perpendiculaire. Donc le point A″ est symétrique du point A′ par rapport à l'axe XY. Les points homologues des deux figures F′, F″ sont donc deux à deux symétriques par rapport à l'axe XY. Donc ces deux figures sont égales (657).

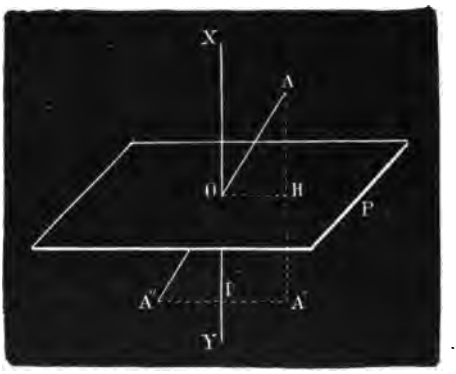


FIG. 445.

661. Corollaire I. — *La symétrie par rapport à un plan se ramène à la symétrie par rapport à un point du plan.*

En effet, une figure F′ (*fig.* 445) étant symétrique d'une figure F par rapport à un plan P, on peut la rendre symétrique de la même figure F par rapport à un point O du plan P en la faisant tourner de 180° autour d'un axe XY perpendiculaire au plan au point considéré O. Alors le point A′ viendra s'appliquer sur le point A″ et il en sera de même de tous les points de la figure F′.

662. Corollaire II. — *Deux figures* F′, F″ *symétriques d'une même figure* F, *l'une par rapport à un plan* P *et l'autre par rapport à un point* O *quelconque, sont égales.*

En effet, soit F‴ une figure symétrique de F par rapport à un point O′ du plan P. Les figures F′ et F‴ sont égales en vertu du

théorème ; les figures F″ et F‴, symétriques l'une et l'autre d'un même F par rapport à deux centres différents O et O′, sont aussi égales (658). Donc les figures F′ et F″ sont égales.

663. Corollaire III. — *Deux figures* F′, F″ *symétriques d'une même figure* F, *par rapport à deux plans différents, sont égales.*

En effet, soit F‴ une figure symétrique de F par rapport à un point quelconque O. D'après le corollaire précédent, les figures F′ et F‴ sont l'une et l'autre égales à la figure F‴, donc elles sont égales entre elles.

664. Remarque. — Il résulte des théorèmes précédents cette importante conséquence : toutes les figures symétriques d'une même figure, soit par rapport à un point, soit par rapport à un plan, sont superposables ; elles ne diffèrent que par leurs diverses positions dans l'espace, mais la forme est la même et la grandeur aussi ; par conséquent, *une figure donnée n'admet qu'une seule figure symétrique.*

Puisque les figures symétriques d'une même figure, l'une par rapport à un point, l'autre par rapport à un plan, sont égales, on peut dans l'étude de la symétrie choisir, dans chaque cas, le mode de symétrie qui simplifie le plus la démonstration.

THÉORÈME

665. — *La figure symétrique d'une figure plane est une figure plane égale à la première.*

En effet, si l'on prend pour plan de symétrie le plan même de la figure donnée, celle-ci coïncide évidemment avec sa symétrique. Nous pouvons en conclure que la figure symétrique *d'une droite, d'un angle, d'un polygone quelconque* est *une droite, un angle, un polygone de même forme et de même grandeur.* (Voir nos 151 et 153.)

666. Corollaire I. — 1° *Une droite et sa symétrique par rapport à un point sont égales, parallèles et de sens contraires ;* 2° *deux angles symétriques par rapport à un point sont égaux, leurs côtés sont parallèles et dirigés en sens opposés ;* 3° *deux plans symétriques par rapport à un point sont parallèles.*

667. Corollaire II. — *Une droite et sa symétrique par rapport à un plan sont parallèles à ce plan ou elles le rencontrent au même point en formant avec lui des angles égaux.*

668. Corollaire III. — *Un plan et son symétrique, par rapport à un plan, sont parallèles à ce plan ou le rencontrent suivant une même droite en formant avec lui des dièdres égaux.*

THÉORÈME

669. — 1° *La figure symétrique d'un dièdre est un dièdre égal ;*
2° *La figure symétrique d'un angle solide est un angle solide dont*

les faces et les dièdres sont respectivement égaux aux faces et aux dièdres du premier.

1° Si l'on prend un point de l'arête du dièdre donné pour centre de symétrie, sa figure symétrique sera évidemment l'angle dièdre opposé par le sommet;

2° Si l'on prend pour centre de symétrie le sommet de l'angle solide donné, sa figure symétrique sera l'angle solide formé par les prolongements des arêtes du premier au delà de ce sommet; mais comme dans les deux angles solides les éléments égaux sont disposés dans un ordre inverse, il en résulte qu'ils ne sont pas, en général, superposables.

670. Corollaire. — *La figure symétrique d'un polyèdre est un nouveau polyèdre.*

Car, d'après le théorème, tous les éléments du second sont respectivement égaux à ceux du premier ; mais comme, en général, leurs angles solides ne sont pas superposables, il en est de même des polyèdres.

Remarque. — Un polyèdre peut coïncider avec son symétrique dans deux cas, c'est lorsque ce polyèdre a un centre ou un plan de symétrie.

Ainsi, deux *parallélipipèdes symétriques* sont suporposables ; car le point de concours des diagonales d'un parallélipipède est un centre de symétrie, puisque chaque sommet a pour symétrique le sommet opposé par rapport au centre.

De même, un *prisme droit et son symétrique* sont superposables ; car, si l'on prend pour *plan de symétrie* le plan parallèle aux bases mené par le milieu d'une arête latérale, chaque sommet du prisme a pour symétrique le sommet situé sur la même arête latérale.

THÉORÈME

671. *Deux polyèdres symétriques sont équivalents.*

Soient d'abord deux pyramides symétriques P et P'. Si ces pyramides sont placées de manière qu'elles soient symétriques par rapport à l'une de leurs bases, cette base ABCDE est alors commune aux deux pyramides. Il arrive, par suite, que les sommets S et S' sont symétriques par rapport à cette base, d'où SO = S'O. Les pyramides P et P' ayant même base et des hauteurs égales sont équivalentes.

FIG. 446.

Soient, en second lieu, deux polyèdres symétriques. Ces polyèdres sont composés d'un même nombre de pyramides respectivement symétriques et, par conséquent, équivalentes deux à deux : donc les polyèdres sont équivalents.

672. Notions sommaires sur les symétries du cube et de l'octaèdre. — On dit qu'un axe de symétrie est binaire, ternaire, quaternaire, sénaire, s'il correspond à une rotation $\frac{2\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{6}$ pour que le polyèdre tout entier puisse être superposé au polyèdre pris dans sa première position.

Le *cube* a un centre de symétrie, trois axes quaternaires, quatre axes ternaires, six axes binaires, trois plans de symétrie perpendiculaires aux axes quaternaires et six plans de symétrie perpendiculaires aux axes binaires :

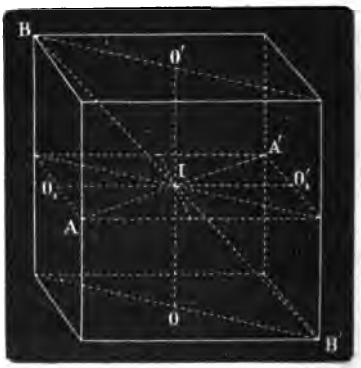


FIG. 446 *bis*.

1° Un centre de symétrie, qui est le point de rencontre I des diagonales ;

2° Trois axes quaternaires, tels que OO', $O_1O'_1$:

3° Quatre axes ternaires, tels que la diagonale BB' ;

4° Six axes binaires, tels que AA' ;

5° Trois plans de symétrie perpendiculaires aux axes quaternaires, tels que $AO_1A'O'_1$.

6° Six plans de symétrie perpendiculaires aux axes binaires, tels que BO'IB'.

Symétrie de l'octaèdre régulier. — On peut former l'octaèdre régulier en joignant les centres des faces du cube. Il a six sommets, 12 arêtes et 8 faces composées de triangles équilatéraux.

Il a les angles solides égaux. Il est composé de deux pyramides quadrangulaires de base commune et de hauteurs égales. Il a *trois plans* de symétrie perpendiculaires aux diagonales, six plans de symétrie passant par le milieu des arêtes opposées. Les axes *quaternaires* sont les diagonales, les axes *ternaires* sont perpendiculaires aux faces opposées et les axes *binaires* joignent les milieux des arêtes opposées. Le centre de symétrie est le point de rencontre des trois diagonales.

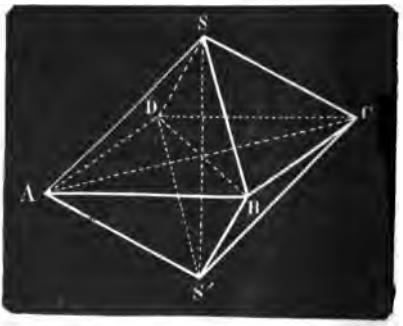


FIG. 446 *ter*.

CHAPITRE IV

Homothétie. — Polyèdres homothétiques. — Polyèdres semblables. — Rapport des volumes de deux polyèdres semblables.

§ Ier. — HOMOTHÉTIE. — POLYÈDRES HOMOTHÉTIQUES

Définitions.

673. — Soient dans l'*espace* une figure F et un point O. Si l'on joint par des droites le point O à différents points A, B, C,... de la figure F, et que l'on prenne sur OA, OB,... des longueurs OA′, OB′,... telles que $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \ldots = K$, on détermine une seconde figure F′ *homothétique* de la première.

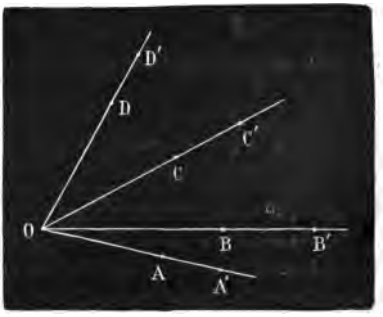


FIG. 447.

Le point O est le *centre d'homothétie* et le nombre constant K est *le rapport d'homothétie.* Les points correspondants A et A′, B et B′,... sont dits *homologues;* les droites OA et OA′, OB et OB′,... qui vont du centre d'homothétie à deux points homologues, sont dits *rayons homologues;* les *droites homologues* sont des lignes qui, dans les deux figures F et F′, joignent des points respectivement homologues.

674. — L'homothétie est *directe*, si les rayons homologues OA et OA′, OB et OB′,... sont de même sens (*fig.* 447) ; l'homothétie est *inverse* si les rayons homologues OA et OA″, OB et OB″,... sont de sens contraire (*fig.* 448).

Les points A, B, C,... A′, B′, C′,... (*fig.* 447) forment ce qu'on appelle deux *systèmes de points homothétiques.* Par conséquent, deux polyèdres sont homothétiques lorsque leurs sommets forment deux systèmes de points homothétiques.

Comme on le voit, la définition des figures homothétiques est la même dans l'espace que pour les figures situées dans le même plan.

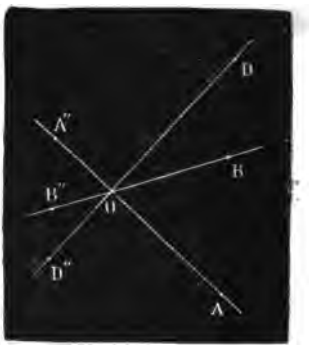


FIG. 448.

THÉORÈME

675. — I. *Dans deux figures homothétiques, deux droites homologues sont parallèles, de même sens ou de sens contraire, selon que l'homothétie est directe ou inverse, et leur rapport est égal au rapport d'homothétie.*

II. *L'angle formé par deux droites d'une figure est égal à l'angle des droites homologues d'une figure homothétique.*

Les démonstrations données n°s 295 et suivants pour des figures situées dans le même plan s'appliquent également aux figures de l'espace.

676. Sections planes parallèles d'angles polyèdres. — Nous avons vu au n° 636 que si l'on coupe une pyramide dont le sommet forme bien un angle polyèdre, par un plan *parallèle* à la base, la section faite dans la pyramide est semblable à la base. On a ainsi deux polygones homothétiques *abcd* et ABCD dont le centre d'homothétie est le sommet S de la pyramide. Le rapport d'homothétie $\frac{So}{SO}$, est le rapport des distances du centre d'homothétie S aux points homologues *o* et *O*.

Aires. — On a vu (636, 3°) que le rapport des *aires* de ces

polygones est égal au carré du rapport des distances du sommet de l'angle polyèdre S aux plans de ces polygones.

THÉORÈME

677. — *Une figure homothétique d'un plan est un plan parallèle.*

En effet, par rapport à un point O situé sur le prolongement de AA′, la droite AB a pour figure homothétique sa parallèle A′B′. Or, si la droite AB tourne autour du point A et engendre un plan P, la droite A′B′ tourne autour du point A′ homologue du point A, et engendre un plan P′. parallèle au plan P.

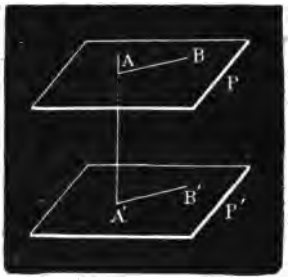


FIG. 449.

678. Corollaire I. — *La figure homothétique d'un dièdre est un dièdre égal.*

679. Corollaire II. — *La figure homothétique d'un angle polyèdre est un angle polyèdre égal ou symétrique.*

680. Corollaire III. — *La figure homothétique d'un polyèdre est un polyèdre.*

681. Polyèdres homothétiques. — Si les deux polyèdres sont *directement* homothétiques, la disposition des faces et des dièdres est la même dans les deux polyèdres ; mais si ces solides sont, au contraire, *inversement* homothétiques, la disposition des faces et des dièdres n'est plus la même dans les deux polyèdres ; elle est en ordre inverse. C'est pourquoi deux angles solides directement homothétiques sont toujours superposables, tandis que, s'ils sont inversement homothétiques, la superposition ne peut pas avoir lieu, en général.

THÉORÈME

682. — *Deux systèmes de points* A, B, C,... *et* A′, B′, C′,.... *sont homothétiques, s'il existe deux points* P *et* P′, *tels que les droites qui joignent le point* P *aux divers points* A, B, C,... *du premier système*

et les droites qui joignent le point P′ *aux divers points* A′, B′, C′,... *du second, soient parallèles et dans le même rapport.*

L'homothétie est directe ou inverse, selon que les droites parallèles sont de même sens ou de sens contraire.

Ce théorème correspond au cas particulier où tous les points considérés sont dans un même plan.

Mais la démonstration donnée pour le cas particulier (299) est identiquement la même que pour le cas général.

683. Remarque. — De même que dans le cas de deux figures situées dans un même plan, si les droites PA, P′A′ sont de même sens et si leur rapport est égal à 1, les droites PP′, AA′, BB′, au lieu de concourir au même point O, sont parallèles. Il arrive alors que les deux figures sont égales et placées de façon qu'à toute droite de l'une correspond dans l'autre une droite égale, parallèle et de même sens. Les deux figures sont toujours directement homothétiques, mais leur centre d'homothétie est rejeté à l'infini.

Comme on le voit, d'après ce théorème, il est toujours facile de construire un solide homothétique à un autre.

THÉORÈME

684. — *Deux figures* F′ *et* F″ *homothétiques à une troisième* F *sont homothétiques entre elles et leur rapport d'homothétie est égal au rapport d'homothétie de* F′ *à* F *divisé par le rapport d'homothétie de* F″ *à* F.

Les figures F′, F″ *sont directement ou inversement homothétiques, suivant qu'elles sont homothétiques de la même façon ou de façons différentes par rapport à la figure* F.

685. Corollaire I. — *Si le rapport d'homothétie des figures* F′ *et* F *est égal au rapport d'homothétie des figures* F″ *et* F, *les figures* F′ *et* F″ *sont égales ou symétriques, égales si elles sont homothétiques de la même façon à la figure* F, *symétriques dans le cas contraire.*

686. Corollaire II. — *Si l'on prend un même point pour centre d'homothétie et que l'on fasse varier de zéro à l'infini le rapport d'homothétie, on pourra construire des figures égales à toutes les figures homothétiques d'une même figure* F.

On peut faire pour ce théorème et ses deux corollaires les mêmes démonstrations qu'aux nos 301 et suivants.

THÉORÈME

687. — *Si trois figures sont deux à deux homothétiques, les trois centres d'homothétie sont en ligne droite.*

Cette droite est l'*axe d'homothétie*. Démonstration identique à celle du n° 305.

THÉORÈME

688. — *Si trois figures à centre sont homothétiques, elles sont à la fois directement et inversement homothétiques. Les trois centres d'homothétie directe sont en ligne droite; et deux centres d'homothétie inverse sont aussi en ligne droite avec le centre d'homothétie directe qui correspond au troisième centre d'homothétie inverse.*

La démonstration est la même que pour les cas particuliers où les trois figures sont trois cercles d'un même plan (310).

Les trois figures ont quatre axes d'homothétie ; celui qui contient les trois centres d'homothétie directe est l'*axe d'homothétie directe*, et chacun des trois autres est un *axe d'homothétie inverse*.

§ II. — POLYÈDRES SEMBLABLES. — RAPPORT DES VOLUMES DE DEUX POLYÈDRES SEMBLABLES

Définitions.

689. — On appelle *polyèdres semblables* ceux qui sont compris sous un même nombre de faces semblables chacune à chacune et dont les angles *solides homologues* sont égaux.

Les angles solides homologues sont ceux qui sont formés par des faces semblables.

690. — Le *rapport de similitude* de deux polyèdres semblables est le rapport de deux arêtes homologues. Ce rapport est constant, car deux arêtes homologues sont formées par l'intersection de deux faces semblables chacune à chacune dans les deux polyèdres. Or, comme les faces homologues sont dans un rapport constant, il en est de même des côtés ou arêtes qui les limitent.

THÉORÈME

691. — 1° *Deux polyèdres directement homothétiques sont semblables ;*

2° *Deux polyèdres inversement homothétiques sont chacun semblables au symétrique de l'autre.*

1° Les deux polyèdres ont leurs angles solides égaux chacun à chacun (679).

Ils ont de plus leurs faces semblables deux à deux ; car les polygones formant ces faces ont leurs angles égaux chacun à chacun (676, II) : donc les deux polyèdres sont semblables.

2° Si l'on construit le symétrique de l'un d'eux par rapport au centre d'homothétie, on obtient un polyèdre homothétique direct de l'autre et qui, par conséquent, lui est semblable.

THÉORÈME *(réciproque).*

692. — *Si deux polyèdres* P *et* P′ *sont semblables, on peut toujours placer l'un d'eux,* P′, *de façon qu'il soit homothétique direct de* P *par rapport à un centre donné* O.

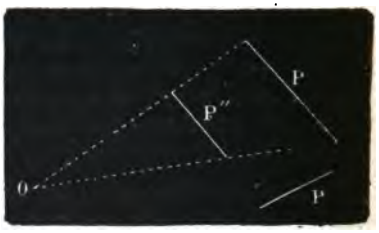


FIG. 450.

En effet, si l'on construit un polyèdre P″ directement homothétique à P par rapport au centre O, et que le rapport d'homothétie de P″ à P soit égal au rapport de similitude de P′ à P, il arrive que P′ est égal à P″ et qu'il suffit par conséquent de superposer P′ à P″ pour qu'il devienne homothétique à P par rapport au centre O.

Il résulte de ce théorème cette autre définition des polyèdres semblables.

693. Définition. — On appelle *polyèdres semblables* des polyèdres qui peuvent être placés de façon à être homothétiques.

THÉORÈME

694. — *Si l'on coupe une pyramide par un plan parallèle à la base, on forme une seconde pyramide semblable à la première.*

Soit la pyramide SABCD coupée par le plan A′B′C′D′ parallèle à la base. Je dis que les pyramides SABCD et S A′B′C′D′ sont semblables.

En effet, ces pyramides sont comprises sous un même nombre de faces semblables ; car les faces latérales sont des triangles semblables, puisque les droites A′B′, B′C′,... sont respectivement parallèles aux droites AB, BC... Les bases sont aussi des polygones semblables. Enfin, les angles solides des deux pyramides sont égaux : l'angle en S est commun et deux trièdres *quelconques*, A et A′, sont égaux comme formés de faces semblables et semblablement placées. Donc les pyramides SABCD, S A′B′C′D′ sont semblables.

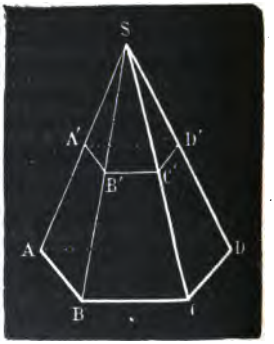


FIG. 451.

THÉORÈME

695. — *Deux tétraèdres sont semblables lorsqu'ils ont un dièdre*

egal compris entre deux faces semblables chacune à chacune et semblablement placées.

Soient les deux tétraèdres SABC, S'A'B'C'. Si l'on admet que le dièdre SA est égal au dièdre S'A', et les faces SAB, SAC respectivement semblables aux faces S'A'B', S'A'C' et disposées de même, ces deux tétraèdres sont semblables.

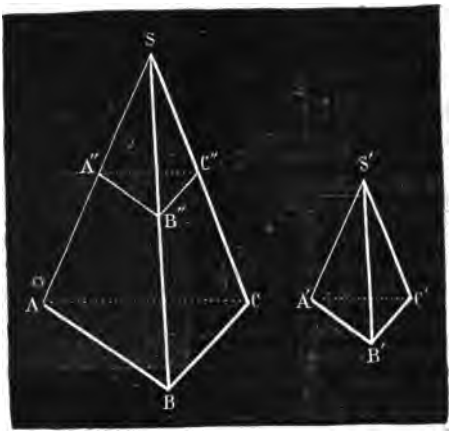


FIG. 452.

En effet, prenons SA″ = S'A' et par le point A″ menons un plan A″B″C″ parallèle à ABC. Ce plan détermine un tétraèdre SA″B″C″ semblable au tétraèdre SABC. Il suffit donc de prouver qu'il est égal au tétraèdre S'A'B'C'.

Or, ces deux tétraèdres ont les dièdres SA″, S'A' égaux par hypothèse ; les faces qui comprennent le premier, disposées de la même façon que celles qui comprennent le second, sont de plus égales chacune à chacune; car les triangles SA″B″, S'A'B' étant l'un et l'autre semblables au triangle SAB et ayant, en outre, deux côtés homologues, SA″, S'A', égaux par construction, sont égaux entre eux; il en est de même des triangles SA″C″, S'A'C'. Si donc nous plaçons le tétraèdre S'A'B'C' sur le tétraèdre SA″B″C″ de manière que les dièdres égaux coïncident dans toute leur étendue, les tétraèdres coïncideront également : donc ils sont égaux, donc enfin S'A'B'C' est semblable à SABC.

THÉORÈME

696. — *Deux polyèdres semblables peuvent être décomposés en un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement placés* (fig. 453).

Soient P et P′ deux polyèdres semblables. Prenons deux sommets homologues quelconques G et G'. Décomposons toutes les faces ABCDE, AEKF... et A'B'C'D'E', A'E'K'F'... qui n'aboutissent pas à ces sommets en triangles que nous considérerons comme les bases de tétraèdres dont les sommets respectifs seront en G et G'. Les polyèdres P et P′ se trouveront ainsi décomposés en un même nombre de tétraèdres semblables et sembla- blement placés.

En effet, soient d'abord les deux tétraèdres GABE, G'A'B'E'; les polyèdres étant semblables, le dièdre AB = le dièdre A'B'; d'ailleurs à cause de la similitude des polygones ABGF, A'B'G'F' et des poly-

gones ABCDE, A′B′C′D′E′, les triangles ABG, ABE, qui forment le dièdre AB, sont respectivement semblables aux triangles A′B′G′, A′B′E′ qui forment le dièdre A′B′; donc les tétraèdres GABE, G′A′B′E′, qui ont un dièdre égal compris entre deux faces semblables, sont semblables (695).

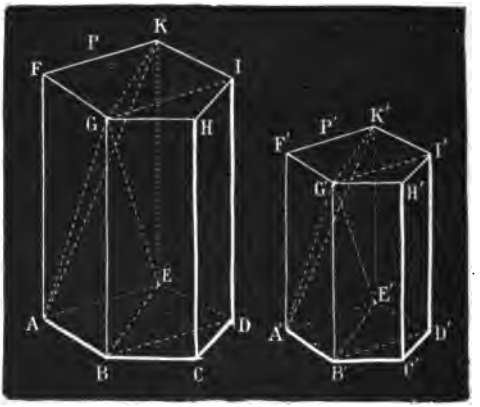


FIG. 453.

Considérons, en second lieu, les tétraèdres GKAE, G′K′A′E′, ils ont encore un dièdre égal compris entre deux faces semblables : car les deux dièdres KAEB et GAEB du polyèdre P et du tétraèdre GBAE étant respectivement égaux aux deux dièdres K′A′E′B′ et G′A′E′B′ du polyèdre P′ et du tétraèdre G′B′A′E′, la différence des deux premiers, ou le dièdre KAEG, est égale à la différence des deux derniers ou au dièdre K′A′E′G′; d'ailleurs, les triangles GAE et G′A′E′ sont semblables comme faces homologues de tétraèdres semblables, les triangles KAE et K′A′E′ sont aussi semblables, à cause de la similitude des polygones AEKF et A′E′K′F′ : donc les tétraèdres GKAE et G′K′A′E′ sont encore semblables. On prouverait de même que tous les autres tétraèdres sont semblables deux à deux.

THÉORÈME *(réciproque).*

697. — *Deux polyèdres composés d'un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement placés sont semblables.*

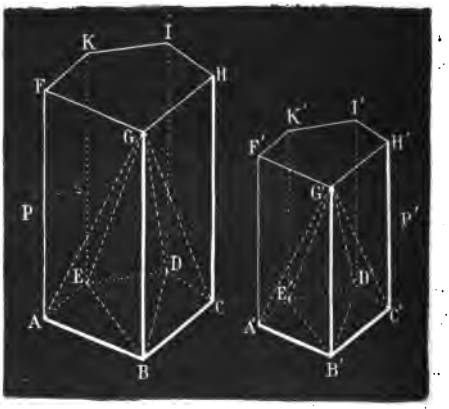


FIG. 454.

Soient P et P′ les deux polyèdres. Deux faces homologues quelconques ABCDE, A′B′C′D′E′ sont semblables, car elles sont composées d'un même nombre de triangles semblables et semblablement placés. D'ailleurs, deux angles solides homologues quelconques, sont égaux comme angles solides égaux dans des tétraèdres semblables, ou

comme somme d'angles solides égaux dans des tétraèdres semblables (Dans la figure, les angles B et B′, se trouvent dans cette dernière condition). Les deux polyèdres auront donc leurs faces semblables chacune à chacune et leurs angles solides homologues égaux, donc ils seront semblables.

698. Remarque. — Nous avons supposé dans cette démonstration que si deux triangles adjacents ABE, BED du polyèdre P sont dans un même plan, les triangles homologues A′B′E′, B′E′D′ du polygone P′ sont aussi dans un même plan. Or, cela a toujours lieu, car, si la somme des dièdres adjacents ABEG, DBEG vaut deux angles droits, la somme des dièdres A′B′E′G′, D′B′E′G′, égaux aux premiers, vaudra aussi deux droits, et, par conséquent, les deux triangles A′B′E′, B′D′E′ seront dans un même plan.

THÉORÈME

699. — *Les volumes de deux polyèdres semblables sont dans le rapport des cubes de deux arêtes homologues.*

Prouvons-le d'abord pour deux tétraèdres semblables. Soient T et t deux tétraèdres semblables, B et b leurs bases, H et h leurs hauteurs, A et a deux côtés homologues des bases.

Puisque les tétraèdres sont semblables, leurs bases B et b le sont aussi et sont entre elles dans le rapport des carrés A^2, a^2, donc :

$$\frac{B}{b} = \frac{A^2}{a^2};$$

mais (636) :

$$\frac{H}{h} = \frac{A}{a}.$$

En multipliant ces deux égalités membre à membre, on obtient :

$$\frac{B \times H}{b \times h} = \frac{A^3}{a^3},$$

d'où :

$$\frac{\frac{1}{3}B \times H}{\frac{1}{3}b \times h} = \frac{A^3}{a^3};$$

or, $\frac{1}{3}B \times H = T$ et $\frac{1}{3}b \times h = t$, donc :

$$\frac{T}{t} = \frac{A^3}{a^3}.$$

2° Considérons, en second lieu, deux polyèdres semblables P et P′ ; soient T, T′, T″... les tétraèdres dont se compose le premier, t, t', t''... les tétraèdres semblables dont se compose le second, A, A′, A″... des

arêtes des tétraèdres T, T', T''..., a, a', a''... leurs homologues dans les tétraèdres t, t', t''... D'après ce qui précède, nous avons :

$$\frac{T}{t} = \frac{A^3}{a^3},$$
$$\frac{T'}{t'} = \frac{A'^3}{a'^3},$$
$$\frac{T''}{t''} = \frac{A''^3}{a''^3}.$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Mais les polyèdres semblables ayant leurs arêtes homologues proportionnelles, leurs cubes sont aussi en proportion, et :

$$\frac{A^3}{a^3} = \frac{A'^3}{a'^3} = \frac{A''^3}{a''^3} = \ldots,$$

donc :

$$\frac{T}{t} = \frac{T'}{t'} = \frac{T''}{t''} = \ldots,$$

d'où :

$$\frac{T + T' + T'' \ldots}{t + t' + t'' \ldots} = \frac{T}{t} = \frac{A^3}{a^3},$$

ou enfin :

$$\frac{P}{P'} = \frac{A^3}{a^3}.$$

CHAPITRE V

Translation d'une figure de forme invariable dans l'espace. — Rotation autour d'un axe.

---

§ I. — TRANSLATION D'UNE FIGURE DE FORME INVARIABLE DANS L'ESPACE

700. Définition. — On dit que le déplacement d'une figure dans l'espace a lieu par *translation* quand ce déplacement s'effectue de manière que tous les points de cette figure décrivent des droites égales, parallèles et de même sens. Nous allons démontrer dans le théorème suivant qu'on peut opérer une telle translation.

THÉORÈME

701. — *Lorsque deux polyèdres égaux dont les éléments égaux sont disposés dans le même ordre, ont deux faces égales parallèles ainsi que les arêtes de ces faces, toutes leurs faces sont deux à deux parallèles, et les droites qui joignent les sommets des angles solides égaux sont égales, parallèles et de même sens.*

Soient d'abord les tétraèdres SABC et S'A'B'C' placés dans les conditions répondant à l'énoncé, c'est-à-dire ayant, par exemple, les faces SBC et S'B'C' parallèles ainsi que les arêtes de ces faces.

Il faut démontrer que les faces SAB et S'A'B' sont parallèles, de même que les faces SAC et S'A'C', ABC et A'B'C'; de plus, que les distances SS', AA', BB' et CC' sont égales, parallèles et de même sens.

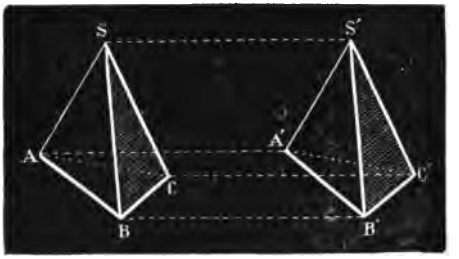


FIG. 455.

En effet, par hypothèse, les faces SBC, S'B'C' sont égales et les arêtes égales SB, S'B' sont de plus parallèles et de même sens, ainsi que SC, S'C' et BC, B'C'.

Par suite, les droites SS', BB' et CC' sont égales, parallèles et de même sens; d'autre part, les angles dièdres SB, S'B' étant égaux et ayant de plus leurs faces SBC et S'B'C' parallèles, ont aussi leurs autres faces parallèles, puisque les éléments des deux polyèdres sont disposés dans le même ordre (car les angles plans de ces deux dièdres, ayant leurs plans parallèles et deux côtés parallèles, ont leurs autres côtés parallèles, les angles étant de même sens); donc la face SAB est parallèle à la face S'A'B'. De plus, les droites égales AB, A'B' sont aussi parallèles entre elles; car elles sont dans deux plans parallèles et elles font *à gauche* de SB et de S'B' des angles SBA et S'B'A' égaux par hypothèse; on en conclut que AA' est égale et parallèle à BB', CC', SS'.

On démontrerait de même que les faces SAC et S'A'C' sont parallèles ainsi que les faces ABC et A'B'C'. On peut donc amener par translation l'un de ces tétraèdres à occuper la position de l'autre en déplaçant ses sommets d'une même longueur, dans le même sens et dans des directions parallèles entre elles.

Il n'y a aucune difficulté pour le lecteur d'étendre cette démonstration au cas de deux polyèdres quelconques.

La réciproque de ce théorème est d'ailleurs évidente.

702. Corollaire. — *Chaque face d'un polyèdre animé d'un mouvement de translation reste parallèle à un plan fixe.*

COMPOSITION DE PLUSIEURS TRANSLATIONS

703. — Si l'on a un point O et divers points A, B, C... dans l'espace, nous dirons, par analogie à ce qu'on a vu en géométrie plane (153), qu'une figure F, mobile dans l'espace, est déplacée successivement par les translations (OA), (OB), (OC)... (*fig.* 106), si tous les points de la figure F décrivent des droites parallèles à OA, de même sens et égale en longueur; de même pour les translations (OB), (OC)... On remarquera aussi, comme en géométrie plane (*fig.* 108), que le déplacement total produit par ces translations successives peut être remplacé par une seule translation OD'. Le point D' est, du reste, obtenu en procédant comme au n° 156. Par le point A, on mène AB' parallèle à OB de même sens et de même longueur; par le point B', on mène B'C' parallèle à OC de même sens et de même longueur; enfin par le point C' on mène C'D' parallèle à OD de même sens et de même longueur. On procéderait toujours ainsi, quel que soit le nombre des translations.

La démonstration est la même qu'en géométrie plane. La seule différence, c'est que les droites OA, OB, OC...., au lieu d'être dans un même plan, se trouvent dans des directions quelconques de l'espace. On voit d'ailleurs, dans l'espace comme dans le plan, que l'ordre des translations composantes n'influe pas sur la translation résultante.

§ II. — ROTATION AUTOUR D'UN AXE

Définitions.

704. — On dit qu'un point A (*fig.* 456) tourne autour d'un axe XY, lorsque ce point décrit sur un plan P perpendiculaire à XY un cercle dont le centre O est sur cette ligne.

705. — On dit qu'un polyèdre de forme invariable est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe, lorsque chacun de ses sommets parcourt une circonférence dont le centre est sur l'axe et dont le plan est perpendiculaire à cet axe.

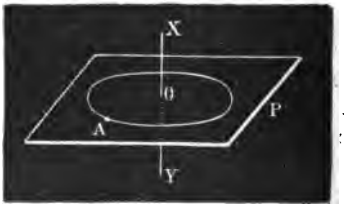


FIG 456.

THÉORÈME

706. — *Lorsqu'un polyèdre de forme invariable est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe, ses sommets parcourent, chacun dans le même temps, des arcs qui correspondent à des angles égaux.*

1° Le polyèdre a une de ses faces passant par l'axe. Si une des faces passe par l'axe XY, par exemple la face ABC, on voit sans peine que les projections de ses côtés, ou arêtes, sur un plan P, perpendiculaire à l'axe, sont sur une même droite B'A'C' qui rencontre l'axe en O. Si

donc le plan se déplace par rotation, en passant constamment par l'axe, la projection de ses arêtes dans sa nouvelle position formera encore une ligne droite $B'_1A'_1C'_1$, angulaire avec la première et qui rencontrera aussi l'axe en O. Les sommets A, B, C ont donc parcouru, dans le même temps, des arcs qui correspondent à des angles égaux.

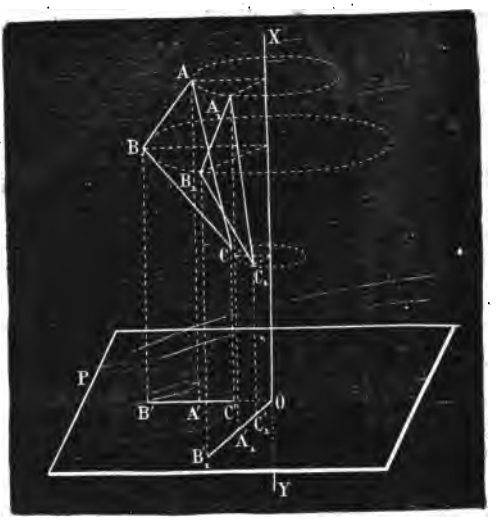


FIG. 457.

2° Le polyèdre n'a aucune face passant par l'axe. Dans ce cas, on peut toujours mener par l'axe un plan rencontrant le polyèdre. Or, tous les points du plan commun au polyèdre décrivent, d'après ce qu'on vient de dire, dans le même temps, des arcs qui correspondent à des angles égaux. Puisque le plan est quelconque, on peut conclure que tous les points du polyèdre, et, par suite, tous les sommets, décrivent dans le même temps des arcs qui correspondent à des angles égaux.

THÉORÈME

707. — *Tout déplacement d'une figure de forme invariable dans l'espace se ramène à une translation et à deux rotations.*

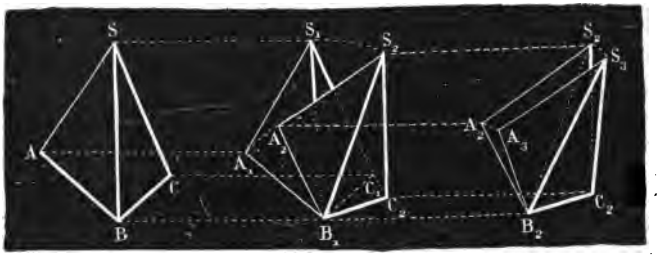


FIG. 458. FIG. 459. FIG. 460.

Je dis, par exemple, que le tétraèdre SABC peut être amené ainsi dans la position $S_3A_3B_3C'_3$, la dernière qu'il doit avoir.

En effet, il est évident que par une seule translation on peut

toujours amener le point B (*fig.* 458) en B_1 (*fig.* 459); puis amener par rotation l'arête B_1C_1 en B_2C_2 (*fig.* 459), et enfin par une seconde rotation amener le sommet S_2 en S_3, ce qui donne la dernière position $S_3A_3B_3C_3$ (*fig.* 460) que le solide doit occuper. Cette démonstration s'appliquant à un polyèdre quelconque, le théorème est démontré.

708. Remarque. — Après avoir vu les théorèmes relatifs à la sphère, on peut démontrer que *tout déplacement d'une figure de forme invariable dans l'espace se ramène à une translation et à une seule rotation;* mais le développement que nous avons donné de cette partie du programme est bien suffisant.

EXERCICES SUR LE LIVRE VI

518. — Mener dans un cube une section qui détermine un carré.

519. — Mener dans un cube une section qui détermine un triangle équilatéral.

520. — Mener dans un cube une section qui détermine un triangle isocèle.

521. — Mener dans un cube une section qui détermine un hexagone régulier.

522. — Les quatre diagonales d'un parallélipipède se coupent au même point qui est le milieu de chacune d'elles.

523. — Dans un parallélipipède rectangle, le carré d'une diagonale est égal à la somme des carrés des 3 dimensions du parallélipipède.

524. — Trouver la longueur de la diagonale d'un parallélipipède rectangle en fonction des 3 arêtes a, b, c, du parallélipipède. Application : $a = 4^m,20$, $b = 0^m,84$, $c = 0^m,60$.

525. — Dans un cube, la diagonale est égale à l'arête du cube multipliée par $\sqrt{3}$.

526. — Dans tout parallélipipède, la somme des carrés des 4 diagonales est égale à la somme des carrés des 12 arêtes.

527. — Le point de concours des diagonales d'un parallélipipède est le centre de cette figure.

528. — La distance du centre d'un parallélipipède à un plan quelconque est le 1/8 de la somme des distances des huit sommets du parallélipipède au même plan.

529. — Lorsque différents points sont à la même distance du centre O d'un parallélipipède, la somme des carrés des distances de chacun aux sommets du parallélipipède est la même pour tous.

530. — Un bûcher a $6^m,80$ de longueur sur $4^m,30$ de largeur et $3^m,90$ de hauteur : combien peut-il contenir de stères de bois ?

531. — Une règle a $0^m,60$ de longueur sur 0,03 de largeur et $0^m,001$ d'épaisseur : quel est son volume en centimètres cubes ?

532. — Un tas de bois à brûler a $4^m,80$ de longueur sur $2^m,70$ de largeur et $6^m,30$ de hauteur : quelle est la valeur de ce tas de bois à raison de 12 francs le stère ?

533. — Quel est le poids de l'air connu dans une chambre qui a 5^m de longueur sur 4^m de largeur et $3^m,20$ de hauteur ? On sait d'ailleurs qu'un litre d'air pèse $1^{gr},29$.

534. — Quelle est la longueur d'un tas de bois contenant 25 stères 5 et qui a 2^m de largeur sur une hauteur de $2^m,80$.

535. — Des bûches ont $1^m,10$ de longueur ; à quelle hauteur devra-t-on en mettre entre les montants du stère pour avoir 1st de bois ?

536. — Deux parallélipipèdes de bases équivalentes ont pour volume $7^{mc},815$ et $4^{mc},45$; le premier a 2^m de hauteur : on demande la hauteur du second et les bases de chacun d'eux.

537. — Un parallélipipède a un volume de $16^{mc},604$. On demande ses dimensions sachant qu'elles sont proportionnelles aux fractions $\frac{1}{8}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$.

538. — Pour creuser une pièce d'eau, on a enlevé $311^{mc},850$ de terre, la surface du fond est de $164^{mq},950$: on demande sa profondeur et le nombre d'hectolitres d'eau qu'elle contiendrait si elle était remplie aux 2/3.

539. — Une poutre ayant la forme d'un parallélipipède droit a pour base un carré. La longueur de cette poutre est de 4^m : on demande le côté du carré qui lui sert de base sachant qu'elle a été payée 40 francs, et que le décistère est estimé 10 francs.

540. — Un cube a $0^m,90$ d'arête : quel est son volume en décimètres cubes ?

541. — Quel est le volume d'un cube dont la diagonale du carré de la base a 4^m ?

542. — Trouver le côté d'un cube équivalant à un parallélipipède dont les dimensions sont 6^m, 3^m, $1^m,50$.

543. — Un vase de forme cubique rempli d'alcool pèse $52^{kg},688$; le poids du vase vide est de 2^{kg} : on demande la profondeur du vase, la densité de l'alcool étant 0,792.

544. — Quel est le volume d'un prisme de 5^m de hauteur et qui a pour base un triangle équilatéral de 3^m de côté ?

545. — Un prisme a pour base un triangle équilatéral dont le côté est a, la hauteur de ce prisme est égale au double de la hauteur du triangle de la base : on demande son volume.

546. — Combien le prisme du problème précédent pèsera-t-il s'il est en fonte et si $a = 2^m$? La densité de la fonte est 7,20.

547. — Un prisme quadrangulaire de 3^m de hauteur a pour base un carré inscriptible dans un cercle de 2^m de rayon : on demande son volume.

548. — Un prisme triangulaire a un volume de 4^{mc} et $1^m,20$ de hauteur : on demande le côté du triangle équilatéral qui sert de base à ce prisme.

549. — Un prisme qui a pour base un hexagone régulier a un volume de $8^{mc},54$ et $2^m,50$ de hauteur : on demande le côté de l'hexagone qui sert de base au prisme.

550. — Combien un bassin de forme hexagonale peut-il contenir d'hectolitres, s'il a $0^m,90$ de profondeur et si le côté de l'hexagone a 2^m ?

551. — Un prisme a pour base un octogone de $0^m,04$ de côté ; la hauteur du prisme est de $0^m,80$: on demande son volume.

552. — Dans le problème précédent, combien le prisme octogonal contiendrait-il de litres s'il était creux et si l'on supposait dans ce cas que le volume de la matière qui le compose soit égal à 1^{dmc} ?

553. — Le volume d'un prisme triangulaire est égal à la moitié du produit de l'une de ses faces par la distance de cette face à l'arête qui lui est opposée.

554 — On demande le volume d'un prisme droit dont la base est un octogone régulier de 2^m de côté et dont la surface latérale est 28^{mq}.

555. — Un prisme droit a pour base un hexagone régulier; on demande le côté de l'hexagone et la hauteur du prisme, sachant que son volume est égal à 4^{mc} 50 et sa surface latérale 12^{mq}.

556. — Un prisme droit a pour base un octogone régulier. Le volume de ce prisme égale 8^{mc} et sa hauteur est de $2^m,20$: on demande la surface latérale de ce prisme.

557. — Un prisme en marbre a pour base un décagone régulier inscrit dans un cercle de $0^m,25$ de rayon : on demande sa hauteur, sachant qu'il pèse 72^{kg} et que la densité du marbre est 2,65.

558. — Transformer un prisme hexagonal en un parallélipipède rectangulaire équivalent.

559. — Une pyramide de 8^m de hauteur a une arête de 9^m; une pyramide semblable a 10^m de hauteur : on demande la longueur de l'arête homologue à celle de 9^m.

560. — Deux pyramides ont même hauteur; la surface de la base de la première est égale à 120^{mq}, la surface de celle de la seconde est de 180^{mq}; une section faite parallèlement à la base dans la première a 70^{mq} de surface : on demande la surface de la section faite dans la seconde, parallèlement à la base et à une même hauteur.

561. — On coupe une pyramide SABCDE par un plan MNPQR parallèle à la base; on a $SA = 15^m$, $SM = 10^m$, et surface ABCDE $= 375^{mq}$: calculer MNPQR.

562. — Une pyramide a 15^m de hauteur; sa base a une surface de 169^{mq} : on demande à quelle distance du sommet a été mené un plan parallèle à la base et dont la surface est de 100^{mq}.

563. — La base d'une pyramide a 144^{mq} de surface; on mène un plan parallèle à la base à 4^m du sommet de cette pyramide, ce plan a 64^{mq} de surface : on demande la hauteur de la pyramide.

564. — Une pyramide dont la hauteur est de 12^m a pour base un carré de 8^m de côté : quelle serait la surface d'une section menée parallèlement à la base et à 4^m du sommet?

565. — Deux pyramides ont même hauteur, 14^m; la 1re a pour base un carré de 9^m de côté, la seconde un hexagone de 7^m de côté : quelle serait, dans chaque pyramide, la surface des sections menées parallèlement à la base et à 6^m du sommet dans l'une et dans l'autre?

566. — Les surfaces de deux pyramides semblables sont proportionnelles aux carrés de deux arêtes homologues.

567. — L'arête SA d'une pyramide a 5^m : on demande de calculer les longueurs à prendre à partir du point S pour que la surface latérale de la pyramide soit divisée en quatre parties équivalentes par des plans parallèles à la base.

568. — Couper une pyramide par un plan parallèle à la base, de manière que la surface de la pyramide déterminée soit à la surface de la pyramide donnée dans le rapport de deux lignes m et n.

569. — L'arête SA d'une pyramide a 8^m; à partir du point S, on prend 5^m sur cette arête et l'on mène un plan parallèle à la base : déterminer dans quel rapport est la surface latérale de cette pyramide à la surface latérale de la pyramide entière.

570. — Indiquer sur les faces d'une pyramide la trace d'un plan parallèle à la base et qui divise la surface latérale en deux parties qui soient dans le rapport de 3 à 4.

571. — ..... En deux parties qui soient dans le rapport de deux lignes m et n.

572. — Indiquer, sur les faces d'une pyramide, les traces de deux plans parallèles à la base et qui divisent la surface latérale en trois parties qui soient dans le rapport de 3, 4 et 5.

573. — .....: En parties de grandeurs données, 3^{mq}, 6^{mq} et 1^{mq}.

574. — Indiquer sur les faces d'un tronc de pyramide la trace d'un plan parallèle aux bases et qui divise la surface latérale en deux parties équivalentes.

575. — ..... En deux parties qui soient dans le rapport des nombres 2 et 3.

576. — ..... En deux parties qui soient dans le rapport de deux lignes données m et n.

577. — Indiquer sur les faces d'un tronc de pyramide les traces de trois plans parallèles aux bases et qui divisent la surface latérale en quatre parties équivalentes.

578. — Indiquer sur les faces d'un tronc de pyramide les traces de trois plans parallèles aux bases et qui divisent la surface latérale en parties qui soient dans le rapport des nombres 3, 4, 5 et 6.

579. — L'arête Aa d'un tronc de pyramide à bases parallèles a 4^m ; deux côtés homologues des bases ont 3^m et 2^m : calculer à 0,01 près les longueurs à prendre sur aA pour que des plans parallèles aux bases divisent la surface latérale en parties de grandeurs données 3^{mq}, 2^{mq}, 4^{mq}.

580. — On double la hauteur d'une pyramide, que devient son volume?

581. — Trouver le volume d'un tétraèdre en fonction de son arête a.

582. — Trouver le rapport du cube au tétraèdre construit avec la diagonale de l'une des faces du cube.

583. — Un tétraèdre en argent pur a $0^m,06$ d'arête : on demande sa valeur. On sait d'ailleurs que la densité de l'argent est 10,47 et que le kilogramme d'argent vaut 220 fr. 55 à la Monnaie.

584. — Trouver le volume d'une pyramide régulière qui a pour base un carré de 6^m de côté et dont les arêtes ont 5 mètres.

585. — Une pyramide tronquée a pour bases deux octogones réguliers; l'octogone de la base inférieure a $0^m,4$ de côté, celui de la base supérieure $0^m,3$, la hauteur du tronc est de $0^m,5$: on demande le volume de la pyramide totale.

586. — Une pyramide qui a pour base un hexagone régulier a 8^m de hauteur; à 3^m du sommet de cette pyramide, on mène parallèlement à la base une section qui a 4^{mq} de surface : on demande le volume de la pyramide.

587. — Une pyramide régulière SABCD a pour base un carré dont la diagonale est a; on demande la surface entière de cette pyramide et son volume en fonction de a dans le cas où l'arête SA $= a$.

588. — Trouver le rapport d'une pyramide hexagonale dont le côté est a et la hauteur a, à une pyramide ayant pour base un triangle équilatéral dont le côté est également a. On sait d'ailleurs que cette pyramide a aussi a pour hauteur.

589. — Une pyramide triangulaire régulière a pour base un triangle équilatéral de 2^m de côté ; les arêtes de cette pyramide ont 3^m : on demande son volume.

590. — La base d'une pyramide régulière est un hexagone régulier dont le côté est 3^m; calculer : 1° la hauteur qu'il faut donner à cette pyramide pour que sa surface latérale soit égale à dix fois la surface de la base ; 2° le volume de cette pyramide.

591. — Un plan mené selon l'arête d'un tétraèdre, et qui passe par le milieu de l'arête opposée, divise le tétraèdre en deux parties équivalentes.

592. — Les droites qui joignent les sommets d'un tétraèdre aux points de concours des médianes des faces opposées, concourent au même point situé aux 3/4 de chacune de ces droites à partir du sommet.

593. — Dans un tétraèdre quelconque, le plan bissecteur d'un dièdre divise l'arête opposée en parties proportionnelles aux faces du dièdre.

594. — Deux tétraèdres SABC, S'A'B'C' qui ont le trièdre S commun sont entre eux dans le rapport des produits SA × SB × SC et SA' × SB' × SC'.

595. — Dans deux tétraèdres SABC, S'A'B'C', on a trièdre S = S', V = 60^{mc}, SA = 8^{m}, SB = 6^{m}, SC = 7^{m}, S'A' = 4^{m}, S'B' = 5^{m}, S'C' = 7^{m} : on demande V'.

596. — Avec un côté donné, on peut toujours construire un hexaèdre régulier.

597. — Avec un côté donné, on peut toujours construire un tétraèdre régulier.

598. — Transformer une pyramide pentagonale en une pyramide triangulaire équivalente.

599. — Transformer une pyramide pentagonale en un prisme triangulaire équivalent.

600. — Les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre concourent au même point qui est le milieu de chacune d'elles.

601. — Les bases d'un tronc de pyramide ont 20^{mq} et 14^{mq} de surface, ce tronc a un volume de 140^{mc} : on demande sa hauteur.

602. — Les bases d'un tronc de pyramide sont deux hexagones réguliers ayant respectivement 1^{m} et 2^{m} de côté : on demande de calculer la hauteur du tronc de pyramide, sachant que son volume est de 12^{mc}.

603. — Un tronc de pyramide de 0^{m},9 de hauteur a pour bases deux octogones réguliers de 0^{m},8 et de 0^{m},5 de côté : on demande le volume de ce tronc.

604. — Un tronc de pyramide de 6^{m} de hauteur a pour base inférieure un pentagone dont la surface est de 20^{mq}; un côté de ce pentagone a 4^{m}, son homologue dans la base supérieure a 3^{m}; quel est le volume du tronc?

605. — Un tronc de pyramide a pour base inférieure un carré de 4^{m} de côté, le volume de ce tronc est 40^{mc}, sa hauteur est 5^{m} : on demande le côté de sa base supérieure.

606. — Un prisme tronqué a pour base un triangle de 2^{mq} de surface ; les trois sommets du prisme sont respectivement à 1^{m}, 0^{m},80 et 0^{m},60 du plan de la base : on demande le volume du prisme.

607. — Une pyramide a pour base un carré de 12^{m} de côté ; à 4^{m} du sommet, on mène un plan parallèle à la base et l'on obtient un carré de 8^{m} de côté : on demande la hauteur de la pyramide.

608. — Une caisse a les dimensions suivantes : 0^{m},40, 0^{m},30, 0^{m},20 : on demande les dimensions d'une caisse semblable et dont la capacité doit être quadruple.

609. — L'arête d'un cube est a : quelle sera l'arête d'un cube double en volume ?

610. — L'arête d'un cube est a. A partir d'un même sommet, on prend sur les arêtes aboutissant à ce sommet trois longueurs égales à $\frac{a}{2}$. On demande le rapport du cube au tétraèdre déterminé par la section passant par les trois points de division des arêtes.

611. — Un tétraèdre a un volume de 30^{mc} et une arête de 5^{m} : on demande le volume d'un tétraèdre semblable dont l'arête homologue à celle du premier a 6^{m}.

612. — L'arête SA d'une pyramide a 4^m ; par un point a pris sur SA, on mène un plan parallèle à la base de la pyramide, et l'on détache ainsi une petite pyramide qui est le 1/3 de la pyramide totale : quelle est la longueur de Sa ?

613. — L'arête SA d'une pyramide a 4^m : quelle longueur faut-il prendre sur cette arête, à partir du sommet, pour qu'un plan parallèle à la base divise le volume de la pyramide en deux parties équivalentes ?

614. — L'arête SA d'une pyramide a 4^m : quelles longueurs faut-il prendre sur cette arête, à partir du sommet, pour que deux plans parallèles à la base divisent le volume de la pyramide en trois parties équivalentes ?

615. — L'arête SA d'une pyramide a 4^m : quelle longueur faut-il prendre sur cette arête, à partir du sommet, pour qu'un plan parallèle à la base divise le volume de la pyramide en parties qui soient entre elles comme les nombres 3 et 4 ?

616. — L'arête SA d'une pyramide a 4^m : quelles longueurs faut-il prendre sur cette arête, à partir du sommet, pour que deux plans parallèles à la base divisent le volume de la pyramide en parties qui soient entre elles comme les nombres 4, 5 et 6 ?

617. — L'arête SA d'une pyramide a 4^m : quelles longueurs faut-il prendre sur cette arête, à partir du sommet, pour que deux plans parallèles à la base divisent le volume de la pyramide en parties de grandeurs données, 2^{mc}, 3^{mc} et 5^{mc} ?

618. — L'arête Aa d'un tronc de pyramide à bases parallèles est de 4^m ; deux côtés homologues des bases ont 3^m et 2^m : calculer à 0,01 près la longueur à prendre sur aA pour qu'un plan parallèle aux bases divise le volume en deux parties équivalentes.

619. — L'arête Aa d'un tronc de pyramide à bases parallèles est de 4^m, deux côtés homologues des bases ont 3^m et 2^m : calculer à 0,001 près les longueurs à prendre sur aA pour que deux plans parallèles aux bases divisent le volume en 3 parties équivalentes.

620. — ..... En trois parties proportionnelles aux nombres 3, 4 et 5.

621. — ..... En parties de grandeurs données, 2^{mc}, 1^{mc} et 4^{mc}.

622. — L'arête SA d'une pyramide a 4^m : on prend sur SA une longueur $Sa = 2^m,60$ et par le point a on mène un plan parallèle à la base de la pyramide : quel est le rapport des volumes déterminés par le plan sécant ?

623. — Couper une pyramide par un plan parallèle à sa base, de telle sorte que le volume de la petite pyramide soit le 1/8 du tronc obtenu.

624. — On mène à $0^m,90$ du sommet d'une pyramide un plan parallèle à sa base, on obtient alors un tronc de pyramide de $2^m,50$ de hauteur ; calculer le volume de ce tronc sachant que la partie enlevée à un volume de $1^{mc},250$.

625. — Un tronc de pyramide, dont la hauteur est de 5^m, a pour base deux hexagones réguliers dont les côtés ont 3^m et 2^m ; en menant un plan parallèle à la base, on obtient un hexagone dont le côté a $2^m,60$: à quelle distance de la base supérieure la section a-t-elle été menée et quel est le rapport des deux troncs de pyramide ?

LIVRE VII

LES CORPS RONDS

CHAPITRE PREMIER

Surface cylindrique, plan tangent. — Surface conique, plan tangent. — Surfaces de révolution simples. — Cylindre. — Cône. — Cylindre droit à base circulaire ou cylindre de révolution, plan tangent. — Surface latérale. — Volume.

§ I. SURFACE CYLINDRIQUE ET SURFACE CONIQUE. PLAN TANGENT

Définitions.

709. Surface cylindrique. — En général, on appelle *surface cylindrique* toute surface engendrée par une droite AA′ indéfinie qui se meut parallèlement à une direction donnée et doit constamment rencontrer une ligne donnée MM′. La droite mobile AA′ est la *génératrice* de la surface ; la ligne fixe MM′ est appelée *directrice*. Lorsque la directrice est une droite, la surface cylindrique n'est plus qu'un plan (498).

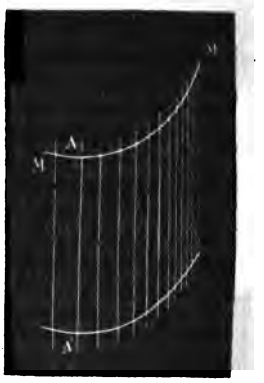


FIG. 462.

Dans le cas où la directrice est une courbe fermée, si l'on coupe la surface cylindrique par deux plans parallèles, le solide compris entre ces plans parallèles et la surface cylindrique est un *cylindre*. Il a pour *bases* les plans parallèles et pour *hauteur* la distance de ces plans.

Le cylindre est *droit*, lorsque les génératrices sont perpendiculaires aux plans des bases ; il est dit *oblique* dans le cas contraire.

710. — Une droite est tangente en un point M d'une surface, lorsqu'elle est tangente en M à une courbe tracée sur cette surface.

THÉORÈME

Plan tangent. — *Le plan tangent à une surface cylindrique en un point* M *est le lieu des tangentes que l'on peut mener par le point* M *à la surface du cylindre.*

Soit M le point donné ; AA′ la génératrice qui passe par ce point. (C) une première courbe passant par le point M et ayant pour tangente MT. ; (C′) une seconde courbe passant par M et ayant pour tangente MT′. Soit M′ un point de (C) voisin de M ; M'_1 le point de (C′) où la génératrice BB′ passant par M′ vient rencontrer (C′). Les deux sécantes MM′ et MM'_1 sont dans un même plan, qui est le plan des génératrices AA′, BB′. Ce plan a une position limite définie par AA′MT, lorsque BB′ se rapproche indéfiniment de AA′ ; autrement dit les sécantes MM′ et MM'_1 auront leurs positions limites dans un même plan avec AA′, MT et MT′. Ce plan limite qui contient tout entière la génératrice de contact AA′ et contient également les tangentes quelconques MT et MT′, est le *plan tangent au cylindre* au point M.

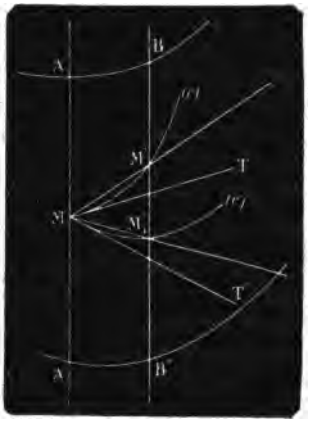


FIG. 463.

711. Surface conique. — En général, on appelle *surface conique* toute surface engendrée par une droite indéfinie, AA′, astreinte à passer par un point fixe S et à se mouvoir en s'appuyant sur une ligne fixe MM′. La droite mobile AA′ est la *génératrice* de la surface ; la ligne fixe MM′ est la *directrice*. Lorsque la directrice est une droite, la surface conique n'est plus qu'un plan (498).

D'après la définition générale de la surface conique, la génératrice se prolonge indéfiniment de part et d'autre du sommet et décrit une surface formée de deux parties distinctes qui se rejoignent au sommet : ce sont les deux *nappes* de la surface.

Dans le cas où la directrice est une courbe fermée, on nomme *cône* le volume limité par une nappe de la surface conique et une section plane rencontrant toutes les génératrices de cette nappe. Le cône a

FIG. 464.

pour *base* la section plane et pour *hauteur* la distance du sommet au plan de la base.

712. Plan tangent. — Théorème. — *Le plan tangent en un point* M *à une surface conique est le lieu des tangentes qu'on peut mener sur la surface conique par ce point* M (*qui doit être autre que le sommet* S).

On démontrerait, comme pour le cylindre, que les tangentes à deux courbes tracées par un même point M d'une génératrice SA sont dans un même plan. Ce plan est la position limite d'une génératrice SA et d'une génératrice SB voisine se rapprochant indéfiniment de SA. Le plan tangent au cône contient tout entière la génératrice de contact SA et contient les tangentes aux courbes tracées sur les différents points de cette génératrice de contact.

§ II. SURFACES DE RÉVOLUTION SIMPLES. CYLINDRE. CONE

713. Définitions. — On appelle *surface* de *révolution* une surface engendrée par la rotation d'une ligne, appelée *génératrice* de la surface, autour d'un *axe* fixe, appelé *axe* de symétrie de la surface de révolution.

Tout plan passant par l'axe est ce qu'on appelle un plan *méridien*. Il coupe la surface de révolution suivant une ligne appelée *méridienne*, qui par sa rotation engendre la surface. Les cercles décrits par ses différents points sont des cercles *parallèles*.

Cylindre (1). — Si la *méridienne* est une droite AB *parallèle* à l'axe de rotation OO′, elle engendre une surface cylindrique de révolution, dont tous les points sont à égale distance de l'axe OO′.

714. Plan tangent au cylindre de révolution. — Le plan tangent en un point quelconque de la surface du cylindre de révolution contient toutes les tangentes aux courbes tracées en ce point sur ce cylindre. Il contient en particulier tout entière la génératrice ou méridienne du cylindre passant par ce point donné. Il contient également la tangente au *cercle parallèle* passant par le point A. Cette tangente est perpendiculaire à l'axe de la surface. Par conséquent, le plan tangent au cylindre est *perpendiculaire au plan méridien passant* par le point de *contact* A. On appelle *normale* AA′ du cylindre au point A, la perpendiculaire au plan tangent, menée par le point A. (*fig.* 465).

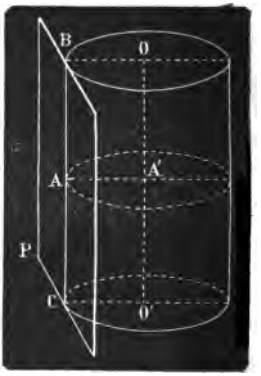


FIG. 465.

1. Dans ce qui suit, nous supposons la génératrice contenue dans le même plan que l'axe de révolution; par conséquent, méridienne et génératrice sont ici des termes synonymes.

715. Surface conique de révolution. Plan tangent. — Si la méridienne est une droite rencontrant l'*axe* et faisant avec lui un *angle constant*, elle engendre un cône de révolution.

On démontre, comme pour le cylindre, que le *plan tangent* au cône de révolution, en un point M, est perpendiculaire au plan méridien passant par la génératrice de contact, qui est tout entière dans le plan tangent à la surface conique de révolution.

Remarque I. — Deux sections parallèles dans un cône de révolution engendrent des courbes homothétiques par rapport au sommet (676). L'homothétie est directe, si les deux sections sont sur la même nappe du cône ; l'homothétie est inverse si une section est tout entière sur une nappe, et l'autre section parallèle sur l'autre nappe de la surface conique.

Remarque II. — Quand on coupe une surface cylindrique de révolution par deux plans perpendiculaires à l'axe, on a un cylindre circulaire droit.

Quand on coupe une surface conique de révolution par un plan perpendiculaire à l'axe, on a un cône circulaire droit.

716. — On appelle encore *cylindre droit à base circulaire* ou *cylindre de révolution* le solide engendré par la révolution d'un rectangle autour d'un de ses côtés.

Ainsi, le rectangle ABCD tournant autour du côté CD engendre un cylindre de révolution.

On nomme *bases* du cylindre les cercles décrits par les côtés AD, BC.

La *hauteur* est la distance entre les bases.

L'*axe* est le côté fixe CD autour duquel la rotation a lieu. Il est évident que l'axe mesure la hauteur du cylindre, car il est perpendiculaire aux deux bases.

La *génératrice* du cylindre est la droite mobile AB, dans chaque position, AB, A'B'..., qu'elle occupe. La génératrice égale aussi la hauteur du cylindre.

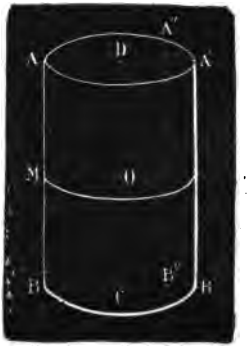


FIG. 466.

La *surface latérale* ou *convexe* du cylindre est la surface décrite par la génératrice.

717. — *Toute section faite dans un cylindre de révolution par un plan parallèle aux bases est un cercle égal aux cercles des bases;* car, si l'on prend un point quelconque M sur AB (*fig.* 466), la perpendiculaire MO, menée de ce point sur CD, décrit un cercle égal et parallèle à ceux des bases, puisqu'il a pour rayon une droite MO égale et parallèle aux droites AD et BC.

718. — *Toute section faite suivant l'axe dans un cylindre de révolution est un rectangle double du rectangle générateur ;* car (*fig.* 462) les deux rectangles ABCD, A'B'CD qui résultent d'une section suivant l'axe, sont l'un et l'autre le rectangle générateur dans deux positions différentes.

Remarque. — Deux cylindres de révolution sont *semblables* si leurs hauteurs sont dans le rapport de leurs rayons de bases, c'est-à-dire s'ils sont engendrés par des rectangles semblables.

§ III. — SURFACE LATÉRALE DU CYLINDRE DE RÉVOLUTION

719. — La surface latérale d'un cylindre de révolution, étant *courbe*, ne peut être comparée avec aucune des unités de surface qui sont planes ; il est donc nécessaire de définir cette espèce de surface.

La *surface latérale* ou *convexe* d'un cylindre de révolution, est *la limite* vers laquelle tend la *surface latérale d'un prisme régulier inscrit dans le cylindre* quand on double indéfiniment le nombre des côtés de sa base. Le théorème suivant va nous montrer que cette limite existe.

THÉORÈME

720. — *La surface latérale d'un cylindre de révolution est égale au produit de la circonférence de base par la hauteur.*

En effet, la surface latérale d'un prisme régulier inscrit est formée de rectangles égaux ABA'B', BCB'C',... ayant chacun pour base un côté de la base du prisme et pour hauteur celle du prisme. Alors, en représentant le périmètre de base du prisme régulier inscrit par P et par H sa hauteur, il a pour surface latérale P $\times$ H. Mais, si l'on double indéfiniment le nombre des côtés de la base du prisme, le périmètre P augmente et a pour limite la circonférence C de la base du cylindre : donc la limite de la surface du prisme considéré est C $\times$ H ; or, par définition, cette limite est précisément la surface latérale du cylindre de même hauteur. Donc le cylindre a pour surface latérale le produit de la circonférence de base par la hauteur.

FIG. 466 *bis.*

En désignant par h la hauteur d'un cylindre de révolution, par r son rayon et par S sa surface latérale, on a la formule

$$S = 2\pi rh.$$

Surface totale du cylindre. — Les surfaces des bases du cylindre étant égales, l'une et l'autre, à πr^2, la surface totale S′ du cylindre de révolution est :

$$S' = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(h + r).$$

721. Remarque. — On peut développer sur un plan la surface latérale d'un cylindre de révolution.

Montrons, en premier lieu, qu'on peut développer la surface latérale d'un prisme. A cet effet, considérons le prisme droit AC′

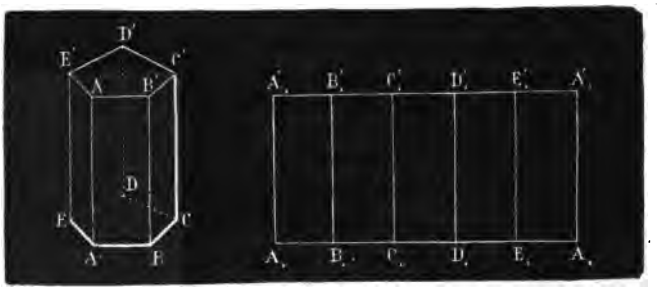


FIG. 466 *ter*.

et supposons sa surface ouverte suivant l'arête AA′. Le prisme étant placé de manière que AB soit en A_1B_1, il est facile de voir que par une rotation autour de l'arête EE′ nous pourrons amener la face AE dans le prolongement de la face ED′ ; puis, par une rotation autour de DD′, amener ces deux faces dans le prolongement de la face suivante DC′ ; et, en continuant de même, toutes

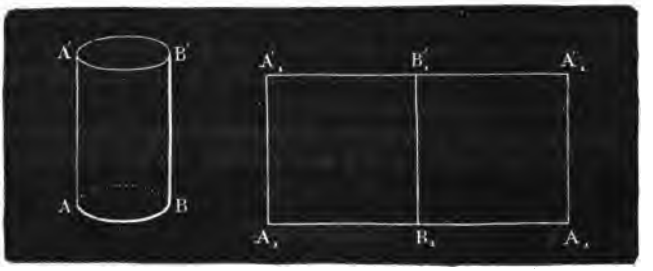


FIG. 467.

les faces se trouveront amenées dans le plan de la première A_1B_1'. D'ailleurs, tous les côtés de base viendront se placer, à la suite les uns des autres, dans le prolongement du côté A_1B_1, puisque toutes les faces du prisme sont des rectangles. De sorte que le développement du prisme se compose d'autant de petits rectangles qu'il y a de faces dans le prisme. L'ensemble de ces petits rectangles forme un rectangle total dont la base égale le péri-

mètre même de la base du prisme et dont la hauteur est celle du prisme.

Il résulte de là que le développement de la surface latérale d'un cylindre droit ABA'B' est un rectangle $A_1A'_1A'_1A_1$ ayant pour base la circonférence de base du cylindre et pour hauteur celle du cylindre ; car la surface latérale d'un cylindre de révolution est la limite de la surface latérale d'un prisme régulier inscrit dont on double indéfiniment le nombre des côtés de la base.

§ IV. — VOLUME DU CYLINDRE DE RÉVOLUTION

722. — On appelle *volume* d'un cylindre de révolution *la limite* vers laquelle tend le volume d'un prisme régulier inscrit dont on double indéfiniment le nombre des côtés de la base. Nous allons démontrer dans le théorème suivant que cette limite existe.

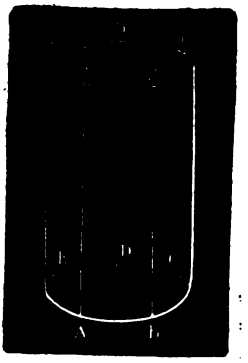


FIG. 468.

THÉORÈME

723. — *Le volume d'un cylindre de révolution est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

En effet, considérons un prisme régulier AC' inscrit dans le cylindre. Son volume est égal au produit de sa base par la hauteur du cylindre. Mais si l'on double indéfiniment le nombre des côtés de sa base, son aire grandit et a pour limite l'aire du cercle qui sert de base au cylindre. Comme la hauteur reste constante, le volume considéré grandit également et a pour limite le cercle de base du cylindre par sa hauteur. Or, nous venons de voir que cette limite est précisément le volume du cylindre. Donc le volume du cylindre de révolution est égal au produit de sa base par sa hauteur

En désignant par r le rayon de la base du cylindre de révolution, par h sa hauteur et par V son volume, on a la formule

$$V = \pi r^2 h.$$

THÉORÈME

724. — 1° *Les surfaces latérales et les surfaces totales de deux cylindres de révolution semblables sont dans le rapport des carrés des rayons de bases ou des hauteurs ;* 2° *les volumes sont dans le rapport des cubes des rayons de bases ou des hauteurs.*

1° Appelons r et r' les rayons de bases, h et h' les hauteurs, S et S' les surfaces latérales, S_1 et S'_1 les surfaces totales, et enfin V et V' les volumes. Les cylindres étant semblables, nous avons :

$$\frac{r}{r'} = \frac{h}{h'}, \text{ d'où } \frac{r}{r'} \times \frac{h}{h'} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{h^2}{h'^2}. \qquad (1)$$

D'autre part :

$$S = 2\pi rh \text{ et } S' = 2\pi r'h';$$

par suite,

$$\frac{S}{S'} = \frac{r}{r'} \times \frac{h}{h'} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{h^2}{h'^2}.$$

De même

$$\frac{S_1}{S'_1} = \frac{2\pi r\ (h + r)}{2\pi r'\ (h' + r')} = \frac{r\ (h + r)}{r'\ (h' + r')};$$

mais

$$\frac{r}{r'} = \frac{h}{h'} = \frac{h + r}{h' + r'};$$

donc

$$\frac{S_1}{S'_1} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{h^2}{h'^2}.$$

2° Enfin

$$\frac{V}{V'} = \frac{\pi r^2 h}{\pi r'^2 h'} = \frac{r^3}{r'^3} \times \frac{h}{h'} = \frac{r^3}{r'^3} = \frac{h^3}{h'^3}.$$

THÉORÈME

725. — *La surface latérale d'un cylindre droit à base non circulaire est égale au produit de son périmètre de base par sa hauteur, et le volume de ce cylindre est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

Car, d'après ce qu'on a vu plus haut (720) et (723), il est facile de voir que la surface et le volume du cylindre considéré sont, ici encore, des limites vers lesquelles tendent les surfaces et les volumes des prismes droits inscrits dans le cylindre et dont on double indéfiniment le nombre des côtés du polygone de base.

CHAPITRE II

Cône droit à base circulaire ou cône de révolution. Sections parallèles à la base. Surface latérale du cône, du tronc de cône à bases parallèles. — Volume du cône, du tronc de cône à bases parallèles.

§ I. — CONE DROIT A BASE CIRCULAIRE. — SECTIONS PARALLÈLES A LA BASE

Définitions.

726. — On appelle encore *cône droit à base circulaire* ou *cône de révolution* le solide engendré par la révolution d'un triangle rectangle autour d'un des côtés de l'angle droit.

Ainsi le triangle rectangle SOA tournant autour du côté SO engendre un cône de révolution.

Dans le mouvement du triangle, le côté OA décrit un cercle dont le plan est perpendiculaire à SO : ce cercle est la *base* du cône.

La droite fixe SO est la *hauteur* ou *axe* du cône.

L'hypoténuse SA qui décrit la *surface latérale* ou *convexe du cône*, est appelée indifféremment *côté* ou *apothème* du cône, c'est encore l'*arête* ou la *génératrice* de la surface latérale.

Le cône à base circulaire est *droit* lorsque la droite qui joint le sommet du cône au centre du cercle de base est perpendiculaire au plan de base ; dans le cas contraire, le cône est *oblique*.

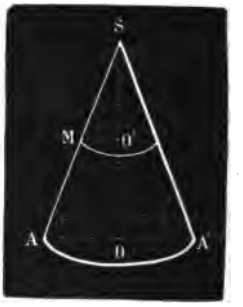


FIG. 469.

727. — *Toute section faite dans un cône de révolution par un plan parallèle à la base est un cercle ;* car, si l'on prend un point quelconque M sur SA (*fig.* 469), la perpendiculaire MO', menée de ce point sur SO, décrit un cercle parallèle à celui de la base du cône, puisqu'il a pour rayon une droite MO' parallèle à la droite AO.

728. — *Toute section faite dans un cône de révolution suivant l'axe est un triangle double du triangle générateur ;* car les deux triangles rectangles SOA, SOA' qui résultent d'une section, sont l'un et l'autre le triangle générateur dans deux positions différentes.

729. Remarque. — Deux cônes de révolution sont *semblables* si leurs hauteurs sont dans le rapport des rayons de bases, c'est-à-dire s'ils sont engendrés par des triangles rectangles semblables.

730. — On appelle *tronc de cône à bases parallèles* le solide compris entre la base d'un cône et une section parallèle à cette base.

Ainsi, le solide AD est un tronc de cône à bases parallèles.

La base du cône et le cercle parallèle CO' sont les *bases* du tronc. La distance OO' entre les bases du tronc en est la *hauteur ;* AC est le *côté ;* la *surface latérale du tronc de cône* est la portion de la surface latérale du cône comprise entre les bases du tronc.

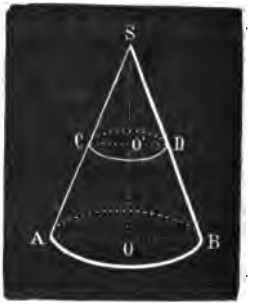


FIG. 470.

Il est visible qu'un tronc de cône à bases parallèles peut être considéré comme engendré par la rotation d'un trapèze birectangle ACO'O autour du côté OO' perpendiculaire aux bases.

Le côté AC engendre la surface latérale du tronc et OO' en est la hauteur.

§ II. — SURFACE LATÉRALE DU CONE DE RÉVOLUTION

731. La surface latérale du cône de révolution étant *courbe*, on ne peut la comparer avec aucune des unités de surface qui sont planes. Il est donc nécessaire de définir cette espèce de surface.

La *surface latérale du cône de révolution* est la *limite* vers laquelle tend la *surface latérale d'une pyramide régulière inscrite* lorsqu'on double indéfiniment le nombre des côtés de sa base.

Le théorème suivant montre que cette limite existe.

THÉORÈME

732. — *La surface latérale du cône de révolution est égale au demi-produit de la circonférence de base par l'apothème.*

Soit la pyramide régulière SABCDEF, inscrite dans le cône SAD. Il est facile de voir que la surface latérale d'une pyramide régulière inscrite est formée de triangles isocèles égaux ayant chacun pour base un côté de la base de la pyramide et pour hauteur l'apothème SI de la pyramide. Si donc on représente le périmètre de la pyramide par P, elle a pour surface latérale $\frac{P \times SI}{2}$. Mais, si l'on double indéfiniment le nombre des côtés de la base de la pyramide, le périmètre P augmente et a pour limite la circonférence C de la base du cône; d'autre part, l'apothème SI tend vers l'apothème a du cône : donc la limite de la surface latérale de la pyramide considérée est $\frac{C \times a}{2}$; or, par définition, cette limite est précisément la surface latérale du cône. Donc le cône a pour surface latérale le demi-produit de la circonférence de base par l'apothème.

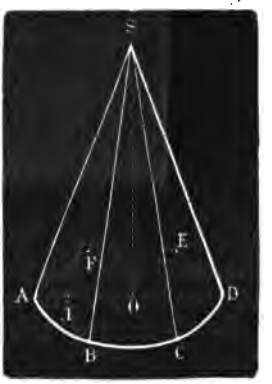


FIG. 471.

En désignant par r le rayon de base d'un cône, par a son apothème et par S sa surface latérale, on a la formule $S = \pi ra$.

Surface totale du cône. — En désignant par S' la surface totale, on a : $S' = \pi ra + \pi r^2 = \pi r(a + r)$.

733. Corollaire. — *La surface latérale d'un cône de révolution est égale au produit de l'apothème par la circonférence d'une section parallèle à la base menée par le milieu de la hauteur.*

Car, deux circonférences étant dans le même rapport que leurs rayons, la seconde est la moitié de la circonférence de base.

§ III. — SURFACE LATÉRALE DU TRONC DE CONE A BASES PARALLÈLES

THÉORÈME

734. — *La surface latérale d'un tronc de cône droit à bases parallèles est égale au produit de la demi-somme des circonférences des bases par l'apothème.*

Soit le tronc de cône droit à bases parallèles AA'B'B, différence des deux cônes SAB, SA'B'. Elevons dans un plan quelconque, passant par l'arête SB, une perpendiculaire BC égale à la longueur de

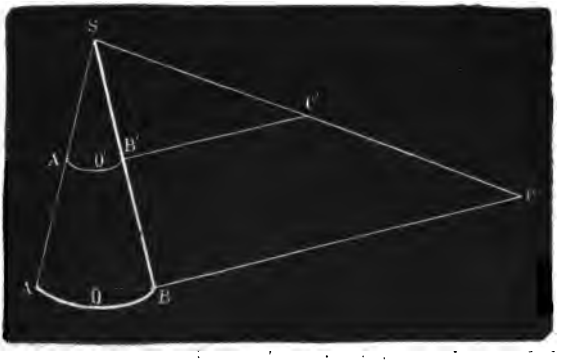


FIG. 472.

la circonférence OB; puis tirons SC et menons B'C' parallèle à BC. Montrons d'abord que circonférence O'B' = B'C'.

En effet, les triangles semblables SO'B', SOB, SB'C', SBC, donnent :

$$\frac{O'B'}{OB} = \frac{SB'}{SB} = \frac{B'C'}{BC}.$$

Multipliant les deux termes du premier rapport par 2π, il vient :

$$\frac{2\pi O'B'}{2\pi OB} = \frac{B'C'}{BC}.$$

Or, les dénominateurs de ces deux derniers rapports sont égaux par construction ; donc les numérateurs sont aussi égaux, et $2\pi O'B'$ ou circ. O'B' = B'C'.

Cela étant démontré, nous ferons remarquer ensuite que la surface latérale du cône SAB est égale à la surface du triangle rectangle SBC : car la surface latérale du cône est $\frac{1}{2}$ circ. OB $\times$ SB et la surface

du triangle rectangle est $\frac{1}{2}$ BC $\times$ SB; or, par construction, circ. OB = BC.

De même, la surface latérale du petit cône SA'B' est équivalente à celle du triangle rectangle SB'C'; car la surface latérale du cône est $\frac{1}{2}$ circ. O'B' $\times$ SB' et la surface du triangle est $\frac{1}{2}$ B'C' $\times$ SB'; or, nous venons de voir que circ. O'B' = B'C'.

Donc la surface latérale du tronc de cône ABB'A', différence des surfaces des deux cônes, est équivalente à la surface du trapèze BCC'B', différence des surfaces des deux triangles. Mais le trapèze BCC'B' a pour surface :

$$\frac{BC + B'C'}{2} \times BB'.$$

Donc la surface latérale du tronc de cône a aussi pour mesure cette expression, ou

$$\frac{\text{circ. OB} + \text{circ. O'B'}}{2} \times BB'.$$

En désignant par r, r', les rayons des bases du tronc, par a son apothème, par S, sa surface latérale, on a la formule

$$S = \frac{2\pi r + 2\pi r'}{2} \times a = \pi (r + r') a.$$

Surface totale du tronc de cône. — En désignant par S' la surface totale, on a :

$$S' = \pi (r + r') a + \pi r^2 + \pi r'^2 = \pi [(r + r') a + r^2 + r'^2].$$

735. Corollaire. — *La surface latérale d'un tronc de cône droit à bases parallèles est égale au produit de l'apothème par la circonférence d'une section équidistante des bases.*

FIG. 476.

Car, si l'on coupe un tronc de cône ABA'B' par une section A''B'' équidistante des bases, il est facile de voir que le rayon O''A'' de la section est égal à la demi-somme des rayons OA, O'A'; par suite, la circonférence O''A'' est égale à la demi-somme des circonférences OA, O'A'. On a :

$$S = \pi (OA + O'A') AA' = 2\pi \times O''A'' \times AA'$$

736. Remarque I. — Il est facile d'arriver par le calcul à la formule : $S = \pi (r + r') a$; car si l'on conserve les même notations, on a visiblement :

$$S = \pi r \times SB - \pi r' \times SB';$$

mais

$$\frac{SB}{r} = \frac{SB'}{r'} = \frac{SB - SB'}{r - r'} = \frac{a}{r - r'},$$

d'où

$$SB = \frac{ar}{r - r'} \text{ et } SB' = \frac{ar'}{r - r'}.$$

Substituant les valeurs de SB et de SB′ dans la première relation, il vient :

$$S = \frac{\pi r^2 a}{r - r'} - \frac{\pi r'^2 a}{r - r'} = \frac{\pi(r^2 - r'^2)a}{r - r'} = \frac{\pi(r + r')(r - r')a}{r - r'},$$

d'où

$$S = \pi(r + r')a.$$

737. Remarque II. — Par analogie à ce que nous avons vu (720), le développement de la surface latérale d'une pyramide régulière SABCDEF sur un plan sera un secteur polygonal régulier S′A′B′C′D′E′F′ (*fig.* 474) dont le rayon S′A′ est égal à l'arête SA de la pyramide et dont le périmètre, A′B′ + B′C′ + C′D′ + D′E′ + E′F′, est évidemment le périmètre de base de la pyramide. De même, le

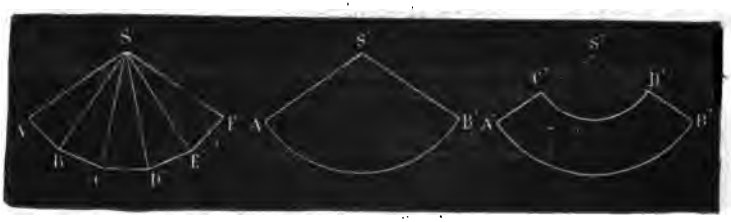


FIG. 474 FIG. 475. FIG. 476.

développement sur un plan de la surface latérale du cône de révolution SAB, limite de la surface latérale d'une pyramide régulière inscrite dont on double indéfiniment le nombre des côtés de la base, sera un secteur circulaire S′A′B′ (*fig.* 475), dont le rayon S′A′ est égal à l'arête SA du cône et dont la longueur de l'arc A′B′ est égale à la longueur de la circonférence de la base du cône.

Enfin, le développement sur un plan de la surface latérale du tronc de cône droit à bases parallèles, et dont les diamètres de ses bases sont AB et CD (*fig.* 476), étant la différence des deux cônes SAB et SCD, sera un trapèze circulaire A′B′D′C′ dont la surface est la différence des surfaces des deux secteurs circulaires S′A′B′ et S′C′D′.

§ IV. — VOLUME DU CONE DE RÉVOLUTION

738. — On appelle volume du cône de révolution la *limi* vers laquelle tend le *volume d'une pyramide régulière inscrite dans cône*, lorsqu'on double indéfiniment le nombre des côtés de la bas de cette pyramide. Nous allons démontrer dans le théorème suivar que cette limite existe.

THÉORÈME

739. — *Le volume d'un cône de révolution est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

Soit la pyramide régulière SABCDEF inscrite dans le cône SAD. Si l'on représente par h la hauteur commune et par S l'aire de la base de la pyramide, son volume est égal (728) à $\frac{1}{3}S \times h$. Or, si l'on double indéfiniment le nombre des côtés de sa base, l'aire de cette base augmente et tend vers l'aire du cercle de base ou vers πr^2, si r désigne le rayon de la base du cône : donc la limite du volume de la pyramide considérée est $\frac{1}{3}\pi r^2 h$; mais cette limite est, par définition, le volume du cône. Donc le cône a pour volume le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

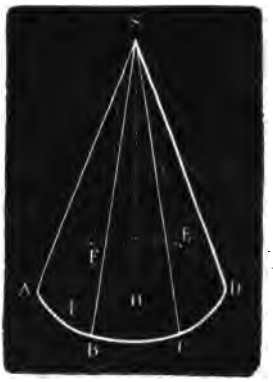


FIG. 477.

En représentant ce volume par V, on a la formule

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

740. Corollaire. — *Un cône de révolution est le tiers du cylindre de révolution de même base et de même hauteur.*

THÉORÈME

1° *Les surfaces latérales et les surfaces totales de deux cônes de révolution semblables sont dans le rapport des carrés des rayons des bases ou des hauteurs ;* 2° *les volumes sont dans le rapport des cubes des rayons des bases ou des hauteurs.*

1° Appelons r et r' les rayons des bases, h et h' les hauteurs, a et a' les arêtes, S et S' les surfaces latérales, S_1 et S'_1 les surfaces totales et enfin V et V' les volumes. Les cônes étant semblables, nous avons :

$$\frac{r}{r'} = \frac{a}{a'} = \frac{h}{h'}, \text{ d'où } \frac{r}{r'} \times \frac{a}{a'} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{h^2}{h'^2}$$

D'autre part,

$$S = \pi r a \text{ et } S' = \pi r' a',$$

d'où

$$\frac{S}{S'} = \frac{r}{r'} \times \frac{a}{a'} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{h^2}{h'^2}.$$

De même

$$\frac{S_1}{S'_1} = \frac{\pi r(a+r)}{\pi r'(a'+r')} = \frac{r(a+r)}{r'(a'+r')};$$

mais

$$\frac{r}{r'} = \frac{a}{a'} = \frac{a+r}{a'+r'},$$

donc

$$\frac{S_1}{S'_1} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{h^2}{h'^2}.$$

2° On a :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ et } V' = \frac{1}{3}\pi r'^2 h',$$

d'où

$$\frac{V}{V'} = \frac{\pi r^2 h}{\pi r'^2 h'} = \frac{r^2}{r'^2} \times \frac{h}{h'} = \frac{r^3}{r'^3} = \frac{h^3}{h'^3}.$$

§ V. — VOLUME DU TRONC DE CONE

THÉORÈME

741. — *Le volume du tronc de cône droit à bases parallèles équivaut à la somme de trois cônes ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc et pour bases respectives la base inférieure du tronc, sa base supérieure et une moyenne géométrique entre ces deux bases.*

En effet, soit le cône SAD. Inscrivons dans ce cône une pyramide régulière SABCDEF ; puis menons par un point A′ de l'arête SA une section A′D′ parallèle à la base. Cette section détermine un tronc de pyramide inscrit dans un tronc de cône. Mais les volumes des cônes SAD, SA′D′ étant les limites vers lesquelles tendent les volumes des pyramides régulières SABC.., SA′B′C′... inscrites dans ces cônes lorsqu'on double indéfiniment le nombre des côtés des bases, le volume du tronc de cône ADA′D′, différence des volumes des deux cônes, est la limite vers laquelle tend le volume du tronc de pyramide AD′, différence des deux pyramides. Or, si l'on représente par h la hauteur du tronc de pyramide et ses bases par B et b, son volume est égal à

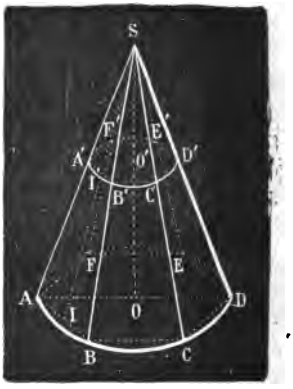


FIG. 478.

$$\frac{h}{3}(B + b + \sqrt{Bb}).$$

Mais, si l'on double indéfiniment le nombre des côtés des bases du

tronc de pyramide, sa hauteur h ne change pas, tandis que ses bases B et b augmentent et tendent vers les bases πr^2 et $\pi r'^2$ du tronc de cône et le volume du tronc de pyramide vers le volume V du tronc de cône. Donc à la limite :

$$V = \frac{h}{3}(\pi r^2 + \pi r'^2 + \sqrt{\pi^2 r^2 r'^2})$$

ou

$$V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + r'^2 + rr') \qquad \text{C. q. f. d.}$$

742. Remarque. — Si l'on considère le volume du tronc de cône comme la différence des volumes des deux cônes SAD, SA'D' (*fig.* 478), on arrive facilement par le calcul à la formule du tronc de cône. Si l'on conserve les mêmes notations, on a évidemment :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times SO - \frac{1}{3}\pi r'^2 \times SO';$$

mais

$$\frac{SO}{r} = \frac{SO'}{r'} = \frac{SO - SO'}{r - r'} = \frac{h}{r - r'},$$

d'où

$$SO = \frac{rh}{r - r'} \text{ et } SO' = \frac{rh'}{r - r'}.$$

Substituant les valeurs de SO et de SO' dans la première relation, il vient :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times \frac{rh}{r - r'} - \frac{1}{3}\pi r'^2 \times \frac{r'h}{r - r'},$$

d'où

$$V = \frac{1}{3}\pi h\left(\frac{r^3 - r'^3}{r - r'}\right);$$

effectuant la division indiquée, on a enfin :

$$V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + r'^2 + rr').$$

CHAPITRE III

Sphère. — Sections planes, grands cercles, petits cercles. — Pôles d'un cercle. — Étant donnée une sphère, trouver son rayon par une construction plane. — Problèmes. — Plan tangent.

§ I. — SPHÈRE. — SECTIONS PLANES, GRANDS CERCLES, PETITS CERCLES

Définitions.

743. — La *sphère* est un solide terminé par une surface convexe dont tous les points sont à égale distance d'un point intérieur appelé *centre*.

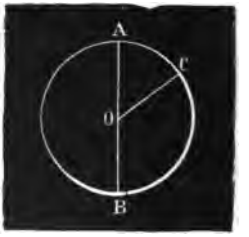


FIG. 479.

On peut considérer la sphère comme engendrée par la rotation d'un demi-cercle ACB autour de son diamètre AB, car dans ce mouvement un point quelconque C est toujours à la même distance du centre O, qui reste fixe.

On appelle *rayon* de la sphère toute droite OC qui va du centre à un point de la surface.

On appelle *diamètre* toute droite AB qui passe par le centre et se termine de part et d'autre à la surface.

Tous les rayons sont évidemment égaux entre eux, de même que les diamètres, qui sont doubles des rayons.

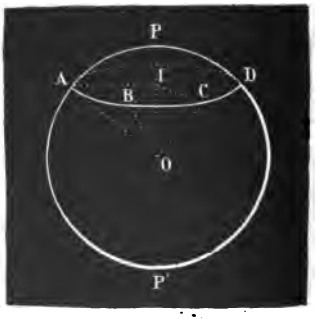


FIG. 480.

THÉORÈME

744. — *Toute section plane de la sphère est un cercle.*

En effet, soit une section plane ABCD de la sphère O. Abaissons du centre O la perpendiculaire OI sur le plan ABCD, et menons les rayons OA, OB... de la sphère à différents points du contour de la section ABCD; ces rayons sont des obliques égales, donc ils s'écartent également du pied I de la perpendiculaire OI et IA = IB = IC = ...; par suite, les points A, B, C, D,... se trouvent sur une circonférence de cercle dont le centre est en I.

745. Remarque. — Si l'on désigne par R (*fig.* 400) le rayon OA de la sphère, par r le rayon IA de la section et par d la distance OI du centre de la sphère à la section, on a la relation

$$r^2 = R^2 - d^2.$$

Si $d = 0$, on a $r = R$; donc, le rayon de la section plane qui passe par le centre est égal au rayon de la sphère. On dit, dans ce cas, que la section est un *grand cercle*.

Si d est différent de 0, alors r est moindre que R. On dit, dans ce cas, que la section est un *petit cercle*.

Lorsque la section plane, tout en s'éloignant du centre, reste perpendiculaire au diamètre PP', il est évident que d augmente de 0 à R, tandis que le rayon de la section, au contraire, diminue de R à 0.

746. Corollaire I. — *Tous les grands cercles d'une même sphère sont égaux.* Car tous ont même rayon.

747. Corollaire II. — *Tous les petits cercles à la même distance du centre sont égaux.* Car ils ont tous des rayons égaux.

748. Corollaire III. — *Un grand cercle de la sphère divise sa surface et son volume en deux parties égales.* Car, si l'on fait tourner l'une des parties de la sphère de 180° autour d'un diamètre du grand cercle, ce cercle viendra coïncider avec lui-même, et les deux portions de la surface sphérique aussi; sans quoi, tous les points de cette surface ne seraient pas à la même distance du centre. Par ce fait même, les deux portions du volume se confondront également.

La demi-sphère limitée par un grand cercle se nomme *hémisphère;* de sorte que la sphère se compose de deux hémisphères.

§ II. — POLES D'UN CERCLE. — ÉTANT DONNÉE UNE SPHÈRE, TROUVER SON RAYON PAR UNE CONSTRUCTION PLANE. — PROBLÈMES.

749. Définitions. — On appelle *pôles* d'un cercle de la sphère les extrémités du diamètre de la sphère perpendiculaire au plan de ce cercle. Ainsi (*fig.* 481) les extrémités P et P' du diamètre PP' perpendiculaire au plan du cercle ABC sont les pôles de ce cercle.

750. — Tous les cercles perpendiculaires à un même diamètre sont des *cercles parallèles* qui ont évidemment les mêmes pôles.

THÉORÈME

751. — *Chacun des pôles d'un cercle est équidistant de tous les points de la circonférence de ce cercle.*

Soit P, l'un des pôles du cercle ABC. Les distances du pôle **P à** tous les points de la circonférence de ce cercle sont égales; car **les** droites PA, PB, PC,... sont égales comme obliques également écartées du pied I de la perpendiculaire PI au plan ABC. Il en est évidemment de même pour le pôle P'.

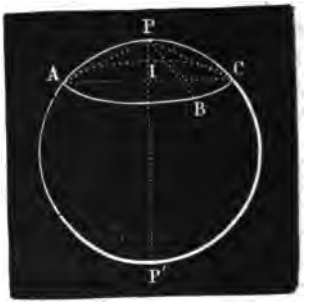


FIG. 481.

752. Définitions. — On appelle *distance polaire* d'un cercle ABC (*fig.* 481) la distance *constante*, telle que PA, des points de sa circonférence au pôle le plus rapproché.

On nomme *rayon sphérique* du cercle ABC la longueur *constante* de *l'arc* de grand cercle PA compris entre le pôle et un point quelconque A de la circonférence ABC.

753. Corollaire. — *La distance polaire* PA *d'un grand cercle* ABA' *est égale à la corde d'un quadrant.*

Car le centre du grand cercle étant le centre O de la sphère, l'angle POA est droit; par suite, l'arc PA du grand cercle PAP' qu'il intercepte est un quadrant. La distance polaire PA est donc la corde du quadrant du grand cercle PAP'.

FIG. 482.

THÉORÈME

754. — *Les plans de deux grands cercles* ABA', PBP' *sont perpendiculaires, lorsque le pôle* P *de l'un,* ABA', *est sur la circonférence de l'autre,* PBP'.

En effet, la droite PP' est perpendiculaire sur le plan ABA' (749), donc les plans des grands cercles, tel que PBP', passant par les pôles P, P' du cercle ABA', sont perpendiculaires sur le plan de ce cercle.

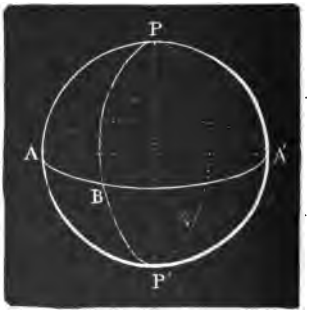


FIG. 483.

755. Réciproquement, *si deux grands cercles* ABA', PBP' *sont perpendiculaires, le pôle* P *de l'un,* ABA', *est sur la circonférence de l'autre,* PBP'. Car, les plans des grands cercles ABA', PBP' étant perpendiculaires l'un sur l'autre, le diamètre PP', perpendiculaire au

plan ABA′ est tout entier dans le plan PBP′; le diamètre AA′ est de même tout entier dans le plan ABA′.

756. Remarque. — Les propriétés des pôles (859) permettent de tracer sur une sphère des arcs ou des cercles comme sur un plan. On emploie, à cet effet, un compas à branches recourbées, appelé *compas d'épaisseur* ou *compas sphérique*. Si l'on veut, par exemple, tracer un cercle tel que ABC (*fig.* 481), il suffit de prendre une ouverture de compas égale à PA, et de maintenir l'une des pointes en P pendant que l'autre décrit sur la sphère la circonférence ABC.

FIG. 484.

Les grands cercles sont ceux dont l'usage est le plus fréquent; mais pour les tracer il faut connaître la corde d'un quadrant et, par suite, savoir déterminer le rayon de la sphère. C'est l'objet du problème suivant.

PROBLÈME

757. — *Étant donnée une sphère, trouver son rayon par une construction plane.*

Première méthode. — On prend sur la sphère O deux points quelconques A et B. Le point O est à égale distance des points A et B; par suite, si l'on suppose un plan perpendiculaire au milieu de la droite AB, ce plan contiendra le centre O de la sphère et sa section sera un grand cercle dont chacun des points se trouvera équidistant de A et de B.

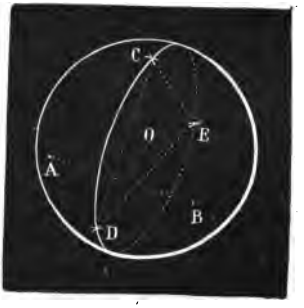


FIG. 485.

On aura donc un point de ce grand cercle, en décrivant des points A et B comme pôles, avec une même distance polaire, deux arcs de cercle qui se coupent en un point C. On déterminera ensuite de la même manière deux autres points D et E appartenant, comme le point C, au grand cercle; de sorte que le triangle CDE se trouve inscrit dans ce grand cercle. On prendra donc avec le compas sphérique les distances CD, CE, DE et l'on construira sur un plan un triangle C′D′E′ : le rayon O′C′ du cercle circonscrit à ce triangle sera évidemment le rayon de la sphère.

Deuxième méthode. — D'un point quelconque P pris comme pôle, et avec une ouverture de compas arbitraire PA, on décrit un cercle sur lequel on marque trois points à volonté A, B, C; puis, à

l'aide du compas sphérique on prend les longueurs rectilignes AB, BC, CA, et l'on construit un triangle ayant pour côtés ces trois longueurs. Le cercle circonscrit à ce triangle sera égal au petit cercle ABC, car l'un et l'autre seront circonscrits à des triangles égaux. Si A'I' est le rayon du cercle égal au cercle ABC, on aura A'I' = AI.

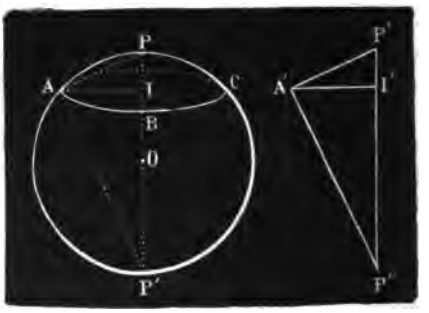


FIG. 486.

Cela posé, soit PAP'C un grand cercle passant par le diamètre PP' perpendiculaire au plan ABC. Si l'on considère le triangle rectangle API, on connaît dans ce triangle l'hypoténuse AP et le côté de l'angle droit AI = A'I', on peut donc le construire en A'P'I'. Si l'on mène ensuite la perpendiculaire A'P'' à A'P' et qu'on prolonge P'I' jusqu'en P'' à la rencontre de cette perpendiculaire, on aura évidemment P'P'' = PP' ou le diamètre de la sphère.

758. Corollaire. — *Une sphère étant donnée, on peut trouver la distance polaire d'un grand cercle.*

Car on peut construire ce grand cercle et, par conséquent, connaître le côté du carré inscrit dans ce cercle.

PROBLÈME

759. — *Tracer le grand cercle passant par deux points donnés sur la surface de la sphère.*

Soient A et B les points donnés. On prend chacun de ces points comme pôles, et avec la distance polaire d'un grand cercle pour rayon on décrit deux arcs qui se coupent en P; puis du point P comme pôle on décrit un grand cercle qui passe évidemment par les points donnés A et B.

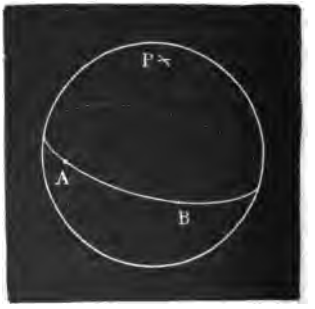


FIG. 487.

760. Remarque. — Il peut arriver que les points A et B soient les extrémités d'un même diamètre; alors le problème est indéterminé, car les arcs décrits des points A et B comme pôles coïncident en un même grand cercle. En prenant comme pôle un point quelconque de ce cercle, le grand cercle que l'on décrira passera par les points A et B.

PROBLÈME

761. — *Par un point de la sphère, tracer un grand cercle perpendiculaire à un grand cercle donné.*

Soit A le point donné et BC l'arc de grand cercle. Du point A comme pôle, on décrit un arc de grand cercle qui coupe l'arc BC en P; puis du point P comme pôle, on décrit un arc de grand cercle qui passe évidemment par le point A et qui est perpendiculaire à BC, car son pôle P est sur l'arc de grand cercle BC (754).

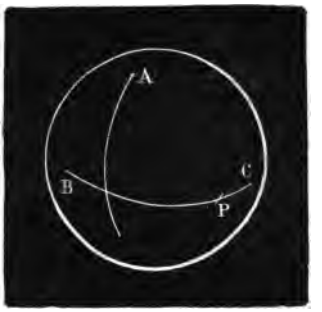


FIG. 488.

PROBLÈME

762. — *Tracer un arc de grand cercle perpendiculaire au milieu d'un arc de grand cercle donné.*

Soit AB l'arc de grand cercle donné. De chacun des points A et B comme pôle et avec une distance polaire suffisante, on décrit des arcs de cercle qui se coupent en D et D'. L'arc de grand cercle passant par ces deux points est l'arc demandé, car le plan déterminé par ces points et le centre de la sphère est perpendiculaire au milieu de la droite AB, puisque chacun des points de ce plan est à égale distance de A et de B. Donc, le grand cercle passant par D et D' est perpendiculaire au milieu C de l'arc de grand cercle AB.

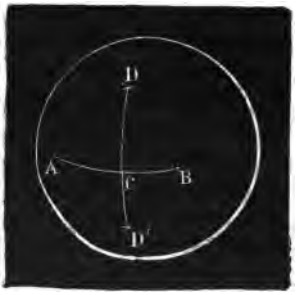


FIG. 489.

On trouve de même le milieu C d'un arc de grand cercle AB.

PROBLÈME

763. — *Tracer un cercle passant par trois points donnés de la surface de la sphère.*

Soient A, B, C les points donnés. Le pôle du cercle cherché est à égale distance des trois points A, B, C, il sera donc à la fois sur le grand cercle PD, perpendiculaire au milieu de l'arc AB, et sur le grand cercle PE, perpendiculaire au milieu de l'arc BC : donc, il sera à l'intersection P de ces deux arcs. Par conséquent, le cercle tracé du point P, comme pôle, avec la distance polaire PA passera par les trois points A, B, C.

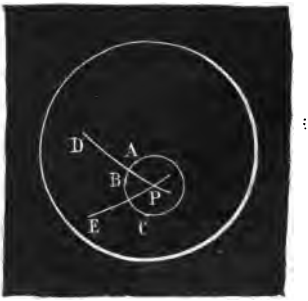


FIG. 490.

§ III. — PLAN TANGENT

Définition.

764. — Un *plan* est dit *tangent* à une sphère quand il n'a qu'un point de commun avec sa surface. Ce point commun au plan et à la sphère est appelé *point de contact*.

Le théorème suivant nous prouve qu'un plan peut bien n'avoir qu'un seul point de commun avec une sphère.

THÉORÈME

765. — *Le plan perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon est tangent à la sphère.*

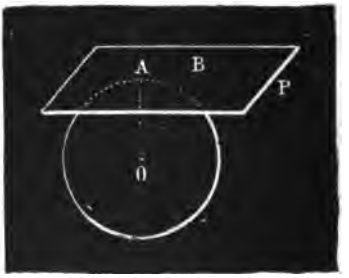


FIG. 491.

Soit le plan P perpendiculaire à l'extrémité A du rayon OA de la sphère O. Il faut démontrer que le plan P est tangent au point A.

En effet, prenons sur le plan P un point quelconque B autre que A et menons la droite OB; cette ligne étant oblique par rapport à OA sera plus longue que OA, donc le point B est situé hors de la sphère. Il en serait de même de tout autre point du plan P, à l'exception du point A. Le plan P n'ayant que le point A de commun avec la sphère lui est tangent.

766. — **Réciproquement**, *le plan tangent à une sphère est perpendiculaire au rayon mené au point de contact* (*fig.* 491).

Le plan P est tangent à la sphère au point A. Il faut démontrer que ce plan est perpendiculaire à l'extrémité du rayon OA.

En effet, tout point B, autre que le point A, pris sur le plan P, étant situé hors de la sphère, est plus éloigné du centre que le point A; la droite OA est donc la plus courte distance du point O au plan P. Donc, le rayon OA est perpendiculaire à ce plan.

767. Corollaire I. — *Par un point* A *de la sphère, on peut mener un plan tangent à la sphère et un seul;* car, par le point A, on ne peut mener qu'un seul plan qui soit perpendiculaire au rayon OA.

768. Corollaire II. — *La perpendiculaire menée au plan tangent* P, *par le point de contact* A, *passe par le centre* O ; car elle se confond avec le rayon OA.

769. Corollaire III. — *Le plan tangent à la sphère en un point*

A *contient les tangentes en ce point à tous les cercles passant par le point* A.

En effet, soit une sécante quelconque ABS à l'un des cercles passant au point A. La droite OI menée du centre au milieu de la base du triangle isocèle AOB est perpendiculaire à cette base. Or, si la sécante ABS tourne autour du point A jusqu'à ce que le point B vienne se confondre avec lui, il arrive, dans ce mouvement, que OI, sans cesser d'être perpendiculaire à AB, vient se confondre avec OA et la sécante ABS devient la tangente AT. Donc, les tangentes à tous les cercles de la sphère en un point A de sa surface sont perpendiculaires à l'extrémité du rayon OA ; elles sont donc dans un même plan tangent en A à la sphère.

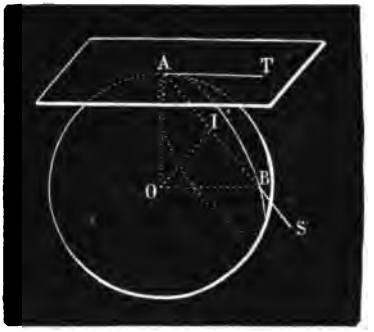


FIG. 491 *bis*.

770. Corollaire IV. — *Le dièdre* BACD *formé par les plans de deux grands cercles* et qu'on appelle l'**angle des grands cercles**, *a même mesure que l'angle* EAF *des tangentes au point* A.

En effet, les tangentes AE, AF au point A sont perpendiculaires à l'arête AC du dièdre BACD : donc l'angle plan EAF correspond au dièdre BACD et est, par conséquent, la mesure de ce dièdre ou de l'angle des deux grands cercles.

On peut dire aussi :

L'angle de deux grands cercles ABC, ADC *a même mesure que l'arc de grand cercle* BD *qu'ils comprennent, et dont le pôle est un des points communs* A *ou* C *à ces deux grands cercles.*

FIG. 492.

En effet, si l'on mène dans les plans des cercles les perpendiculaires OB, OD, l'angle rectiligne BOD sera la mesure de l'angle des deux cercles ; mais, comme l'angle AOB est droit, il en résulte que l'arc AB est un quadrant ; il en est de même de l'arc AD : dont l'arc BD, qui mesure l'angle BOD, est un arc de grand cercle décrit du point A comme pôle.

771. Corollaire V. — *On peut mener à une sphère deux plans tangents parallèles à un plan donné.*

772. Corollaire VI. — *Le lieu des tangentes à une sphère menées par un point extérieur* A, *est la surface d'un cône de révolution qui touche la sphère suivant un petit cercle* DFE *dont le plan est perpendiculaire au diamètre* OA.

En effet, menons par le diamètre OA un plan qui coupe la sphère suivant le grand cercle BDC. Il est évident qu'une tangente AD à ce grand cercle est aussi tangente à la sphère. Or, si l'on fait tourner la partie supérieure de la figure autour du diamètre OA, pendant que la demi-circonférence BDC engendre la surface de la sphère, la tangente AD engendre la surface latérale d'un cône de révolution qui a DFE pour circonférence de base, c'est-à-dire la circonférence décrite par le point de contact D, dans un plan perpendiculaire, au point I, au diamètre OA.

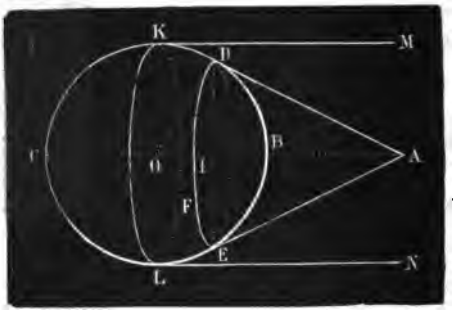


FIG. 492 *bis*.

On dit, dans ce cas, que le cône ADFE est *circonscrit* à la sphère O. Le cercle DFE est le *cercle de contact* des deux surfaces.

773. Corollaire VII. — *Le rayon de la sphère est moyen proportionnel entre les distances du centre de la sphère au sommet du cône circonscrit et au cercle de contact*, car le triangle ODA est rectangle en D.

774. Remarque. — Si le sommet A du cône (*fig.* 492 *bis*) s'éloigne à l'infini, les tangentes AD, AE... deviennent parallèles au diamètre OA et forment la surface d'un cylindre de révolution KLMN circonscrit à la sphère, et dont le cercle de contact est un grand cercle KL de la sphère perpendiculaire au diamètre OA.

PROBLÈME

775. — *Mener à une sphère un plan tangent passant par une droite donnée.*

Supposons le problème résolu. Soit P le plan tangent en I à la sphère O et mené suivant la droite KL. Le rayon OI, passant au point de contact, est perpendiculaire au plan P. Par suite, un plan M mené, par le rayon OI, perpendiculairement à KL, coupera le plan P suivant une droite AI évidemment tangente en I au cercle d'intersection du plan M et de la sphère. D'où cette construction : on mène par le centre O de la sphère un plan M perpendiculaire à la droite KL, et par le point de rencontre A de la

droite et du plan on mène une tangente au cercle d'intersection du plan M et de la sphère. Si le point I est le point de contact, le plan P déterminé par la droite KL et le point I est tangent à la sphère en I.

Par le point A, on peut mener deux tangentes AI, AI′ au grand cercle de la sphère déterminé par le plan sécant M. Le problème a donc deux solutions, les plans P et P′, lorsque la droite KL n'a aucun point de commun avec la sphère ; si cette droite a le point A de commun avec la sphère, les deux plans P et P′ se confondent en un seul tangent au point A ; enfin, si la droite KL coupe la sphère, le point A est intérieur à ce solide et il n'y a évidemment plus aucune solution.

FIG. 493.

CHAPITRE IV

Positions relatives de deux sphères. — Centres et axes de similitude des sphères

§ I. — POSITIONS RELATIVES DE DEUX SPHÈRES

776. — *L'intersection de deux sphères est une circonférence dont le plan est perpendiculaire à la ligne des centres, et dont le centre est sur cette ligne.*

En effet, soient O et O′ deux sphères qui se coupent. Si nous menons un plan par la ligne des centres, il coupera les sphères suivant deux circonférences de grands cercles, dont les points communs A et B sont symétriques par rapport à OO′ (207). Or, si l'on fait tourner la partie supérieure de la

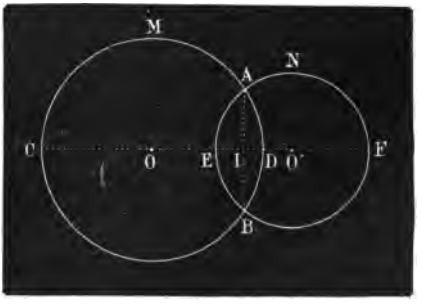


FIG. 493 *bis*.

figure autour de la ligne OO′, les demi-circonférences CMD, ENF engendreront les surfaces sphériques, tandis que le point A, commun aux deux demi-circonférences, engendrera la ligne d'intersection des deux surfaces sphériques. Or, il est évident que cette ligne sera une circonférence dont le plan est perpendiculaire à OO′ et dont le centre I est sur cette ligne.

Remarque I. — Si les centres O et O′ des sphères (*fig.* 569) s'éloignent ou se rapprochent jusqu'à ce que les circonférences M et N soient tangentes extérieurement ou intérieurement, ces deux sphères n'ont plus alors qu'un point de commun situé sur la ligne des centres; on dit, dans ce cas, qu'elles sont tangentes.

Remarque II. — Deux sphères, de même que deux cercles, peuvent occuper, l'une par rapport à l'autre, cinq positions différentes. Ce qui donne lieu à un théorème qui s'énonce comme en géométrie plane et se démontre également de même, de sorte que, si l'on désigne par d la distance des centres des sphères et par r et r' leurs rayons, on a les relations déjà établies au n° 215 :

1° Si l'on a : $d > r + r'$, les deux sphères sont extérieures;

2° Si l'on a : $d = r + r'$, les deux sphères sont tangentes extérieurement.

3° Si l'on a : $r + r' > d > r - r'$, les sphères sont sécantes;

4° Si l'on a : $d = r - r'$, les sphères sont tangentes intérieurement;

5° Si l'on a : $d < r - r'$, les sphères sont intérieures.

Dans le cas où l'on aurait $d = r - r' = o$, les deux sphères seraient concentriques.

THÉORÈME

777. — *Par quatre points non situés dans un même plan passe une surface sphérique et une seule.*

Soient les quatre points donnés A, B, C, D. Il est évident que toute la question revient à trouver un point, et un seul, qui soit équidistant de ces quatre points.

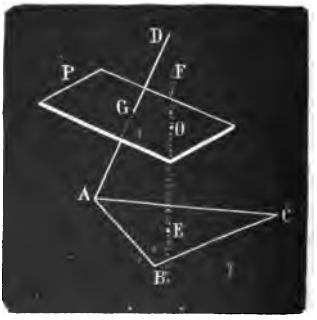


FIG. 494.

Nous voyons d'abord que les trois points A, B, C ne peuvent être en ligne droite, car les quatre points A, B, C, D seraient dans un même plan (584), ce qui est contraire à l'hypothèse. Les trois points A, B, C déterminent donc un triangle. Or, le centre cherché O devant être à égale distance des trois points A, B, C, doit se trouver sur la perpendiculaire EF menée au plan du triangle ABC par le centre du cercle

circonscrit à ce triangle; le même point O devant se trouver à égale distance des points A et D est encore sur le plan P perpendiculaire au milieu G de AD. Donc, le point O est au point d'intersection de la droite EF avec le plan P. D'autre part, comme tout point équidistant des quatre points A, B, C, D doit appartenir en même temps à la droite EF et au plan P, il n'y a pas d'autre point que le point O qui jouisse de cette propriété. C. q. f. d.

Corollaire. — *On peut circonscrire une sphère à un tétraèdre donné* ABCD. — Le centre O de cette sphère est à la fois commun aux plans perpendiculaires au milieu des six arêtes du tétraèdre et aux perpendiculaires à ses quatre faces menées aux centres des cercles circonscrits à ces faces.

§ II. — CENTRES ET AXES DE SIMILITUDE DES SPHÈRES

THÉORÈME

778. — *Deux sphères sont à la fois directement et inversement homothétiques.*

Car, si l'on mène un plan par la ligne des centres, les grands cercles de section permettront de démontrer ce théorème comme en géométrie plane. Les centre O et O′ de similitude de ces grands cercles sont les *centres de similitude des deux sphères*.

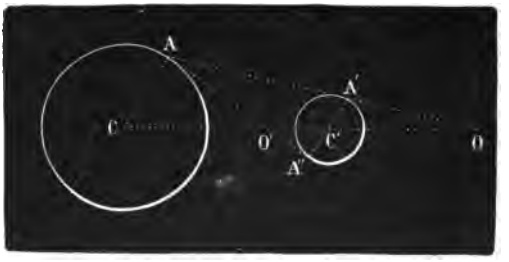


FIG. 495.

THÉORÈME

779. — *Trois sphères considérées deux d deux ont trois centres de similitude directe et trois de similitude inverse : les trois centres directs sont en ligne droite et deux centres inverses sont en ligne droite avec le troisième centre direct.*

Ce théorème se démontre comme en géométrie plane; car si l'on coupe les sphères par le plan des centres, on obtient trois grands cercles dont les centres de similitude sont ceux des trois sphères.

Les quatre axes de similitude de ces trois cercles appartiennent aussi au système des trois sphères et portent les mêmes noms qu'en géométrie plane, c'est-à-dire que l'un est l'*axe de similitude directe* des sphères et les trois autres des *axes de similitude inverse* des mêmes solides.

CHAPITRE V

Mesure de la surface engendrée par une ligne brisée régulière tournant autour d'un de ses diamètres. — Aire de la zone. — Aire de la sphère.

§ I. — MESURE DE LA SURFACE ENGENDRÉE PAR UNE LIGNE BRISÉE RÉGULIÈRE TOURNANT AUTOUR D'UN DE SES DIAMÈTRES

Définition.

780. — Nous rappelons qu'*une ligne brisée régulière* est une ligne plane convexe qui a ses angles égaux et ses côtés égaux. Une telle ligne peut être inscrite et circonscrite à un cercle. Le centre de ce cercle est aussi le centre de la ligne brisée régulière.

THÉORÈME

781. — *La surface engendrée par une ligne brisée régulière, tournant autour d'un de ses diamètres, a pour mesure le produit de la circonférence inscrite par la projection de cette ligne brisée sur le diamètre.*

Soit la ligne brisée régulière ABCDE tournant autour de l'un de ses diamètres XY, et OI le rayon de la circonférence inscrite. Il est évident que la surface engendrée par cette ligne brisée, en tournant autour du diamètre XY, se compose de la somme des surfaces engendrées séparément par les côtés AB, BC, CD, DE... Or, il est facile de voir que parmi les côtés de la ligne brisée, l'un, comme DE, peut avoir l'une de ses extrémités sur le diamètre XY; un autre, comme BC, peut être parallèle à ce même diamètre; tous les autres sont inclinés sur le diamètre, sans s'appuyer sur lui, comme AB. Nous allons prouver que le théorème est vrai quelle que soit la position d'un côté par rapport au diamètre.

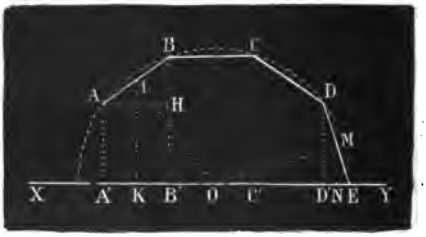


FIG. 496.

1° Soit d'abord le *côté* AB *non parallèle au diamètre*. Ce côté engendre la surface d'un *tronc de cône* à bases parallèles. Par conséquent, si par le point I, milieu de AB, on abaisse IK perpendiculaire au diamètre XY, on a (735) :

$$\text{Surf. AB} = 2\pi \text{IK} \times \text{AB}. \qquad (1)$$

Or, si l'on mène les droites AA′, BB′ perpendiculaires au diamètre XY, et AH parallèle à ce même diamètre, on détermine deux triangles rectangles ABH, OIK semblables, comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires; par suite de cette similitude, on a :

$$\frac{IK}{AH} = \frac{OI}{AB},$$

d'où l'on tire :

$$IK \times AB = OI \times AH;$$

et comme $AH = A'B'$, on a encore :

$$IK \times AB = OI \times A'B'.$$

Remplaçant, dans la relation (1), le produit $IK \times AB$ par le produit $OI \times A'B'$, il vient :

$$\text{Surf. } AB = 2\pi\, OI \times A'B'.$$

Mais $2\pi OI$ égale la circonférence du cercle inscrit dans la ligne brisée régulière et A′B′ est la projection du côté AB. Donc la surface engendrée pour le côté AB, non parallèle au diamètre XY, a pour mesure le produit de la circonférence inscrite par la projection de ce côté sur le diamètre. Il en est de même pour tout côté de la ligne brisée incliné sur XY.

2° Soit donc en second lieu le *côté BC parallèle au diamètre.* La surface engendrée par ce côté est la surface latérale d'un *cylindre;* elle a pour mesure la circonférence OI multipliée par la hauteur. Donc :

$$\text{Surf. } BC = 2\pi OI \times B'C'.$$

3° Soit enfin le *côté DE dont l'extrémité E est sur le diamètre.* La surface engendrée par ce côté est la surface latérale d'un *cône droit* à base circulaire; elle a pour mesure le produit de la circonférence MN, équidistante du sommet et de la base, par l'arête DE. Donc :

$$\text{Surf. } DE = 2\pi MN \times DE. \qquad (2)$$

Mais si l'on mène OM et la perpendiculaire DD′, on a deux triangles rectangles OMN et DD′E qui sont semblables comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires. Leur similitude donne :

$$\frac{MN}{D'E} = \frac{OM}{DE},$$

d'où

$$MN \times DE = OM \times D'E$$

et comme $OM = OI$, on a encore :

$$MN \times DE = OI \times D'E.$$

Remplaçant, dans la relation (2), le produit MN $\times$ DE par le produit OI $\times$ D'E, il vient :

$$\text{Surf. DE} = 2\pi\text{OI} \times \text{D'E}.$$

Or, D'E est la projection de DE sur le diamètre. Donc la surface engendrée par un côté quelconque de la ligne brisée a pour mesure le produit de la circonférence inscrite, 2πOI, par la projection de ce côté sur le diamètre XY. Par suite, la surface engendrée par la ligne brisée ABCDE a pour mesure le produit de la circonférence inscrite 2πOI par la projection A'E de cette ligne sur ledit diamètre.

782. Corollaire. — *La surface engendrée par une droite tournant autour d'un axe, situé dans son plan, a pour mesure le produit de la projection de cette droite sur l'axe par la circonférence dont le rayon est la perpendiculaire menée de l'axe au milieu de la droite* (1).

783. Définitions. — On appelle *zone* la portion de la surface d'une sphère comprise entre deux plans parallèles. Les deux cercles déterminés par ces plans sont les *bases* de la zone, et la distance de ces bases en est la *hauteur*.

Dans le cas où l'un des plans considérés est tangent à la sphère, la zone n'a plus qu'une base et s'appelle alors *calotte sphérique*.

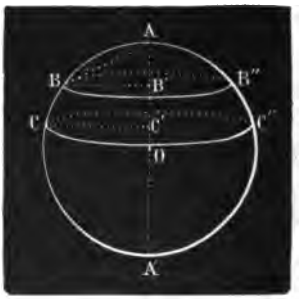


FIG. 497.

Il est facile de voir que si le demi-cercle ABCA' fait une révolution autour du diamètre AA' pour engendrer la surface de la sphère, l'arc BC engendre une zone ayant pour bases les cercles décrits par les perpendiculaires BB', CC' abaissées sur le diamètre de rotation et dont la hauteur est B'C' De même l'arc AB engendre une calotte sphérique ayant pour base le cercle de rayon BB' et pour hauteur AB'.

Il résulte de là que la hauteur d'une zone quelconque est la projection sur le diamètre de l'arc qui engendre la zone.

§ II. -- AIRE DE LA ZONE ET DE LA SPHÈRE

784. — La surface d'une zone étant courbe ne peut être comparée avec aucune des unités de surface qui sont planes ; il est donc nécessaire de définir cette espèce de surface.

On appelle *aire de la zone* la *limite* vers laquelle tend *la surface engendrée par une ligne brisée régulière, inscrite dans un arc de cercle*, en tournant autour du diamètre perpendiculaire aux bases de la zone, quand on double indéfiniment le nombre des côtés de cette ligne brisée.

Le théorème suivant montre l'existence de cette limite.

(1) En mécanique, le théorème de Guldin fait voir que : La surface engendrée par une ligne plane tournant autour d'un axe situé dans son plan est égale au produit de la longueur de cette ligne, par la circonférence que décrit son centre de gravité.

THÉORÈME

785. — *L'aire d'une zone a pour mesure le produit de la circonférence d'un grand cercle par la hauteur de la zone.*

En effet, soit la zone engendrée par l'arc de cercle BC, en tournant autour du diamètre AA'. Inscrivons dans l'arc BC la ligne brisée régulière BDEC et menons les rayons OI et OD. La surface engendrée par la ligne BDEC tournant autour de AA', a pour mesure (778) le produit

$$2\pi OI \times B'C'.$$

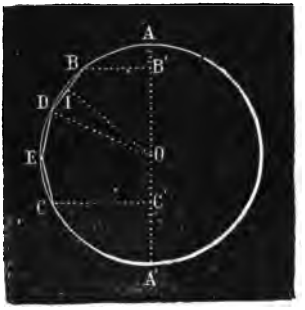


FIG. 498.

Or, si l'on double indéfiniment le nombre des côtés de cette ligne brisée, le facteur B'C' reste constant, tandis que la circonférence $2\pi OI$ grandit et a pour limite $2\pi OD$; l'aire engendrée par la ligne brisée grandit donc également et a pour limite $2\pi OD \times B'C'$. Comme cette limite est par définition l'aire de la zone, il en résulte que le théorème est démontré.

Si l'on désigne par R le rayon de la sphère et par h la hauteur de la zone, on a :

$$\text{Surf. zone BC} = 2\pi R \times h.$$

Il est évident que ce théorème est vrai pour la zone à une base, c'est-à-dire pour la *calotte sphérique*.

786. Corollaire I. — *Dans une même sphère, deux zones sont dans le rapport des hauteurs de ces zones.*

Car, en désignant par S et S' les aires de deux zones d'une sphère de rayon R et par h et h' les hauteurs de ces zones, on a :

$$S = 2\pi R \times h \text{ et } S' = 2\pi R \times h', \text{ d'où } \frac{S}{S'} = \frac{h}{h'}.$$

787. Corollaire II. — *Les plans qui coupent perpendiculairement un même diamètre en parties égales partagent la surface ed la sphère en parties équivalentes.*

C'est une conséquence immédiate du corollaire précédent.

THÉORÈME

788. — *L'aire d'une sphère a pour mesure le produit de la circonférence d'un grand cercle par son diamètre.*

Car la surface d'une sphère n'est autre que celle d'une zone dont la hauteur est le diamètre ou 2R. D'où :

$$\text{Surf. sphère} = 2\pi R \times 2R = 4\pi R^2.$$

Si l'on remplace dans cette formule R par sa valeur $\frac{D}{2}$, on a :

$$\text{Surf. sphère} = \pi D^2.$$

789. Corollaire I. — *La surface d'une sphère vaut quatre fois celle d'un grand cercle.*

790. Corollaire II. — *Les aires de deux sphères sont dans le rapport des carrés de leurs rayons ou de leurs diamètres.*

CHAPITRE VI

Mesure du volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe mené, dans son plan, par un de ses sommets. Application au volume engendré par un secteur polygonal régulier tournant autour d'un de ses diamètres. — Volume du secteur sphérique de la sphère et du segment sphérique.

§ I. — MESURE DU VOLUME ENGENDRÉ PAR UN TRIANGLE TOURNANT. — VOLUME DU SECTEUR POLYGONAL

THÉORÈME

791. — *Le volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe extérieur mené dans son plan par un de ses sommets, a pour mesure le produit de la surface engendrée par le côté opposé à ce sommet par le tiers de la hauteur correspondante à ce côté.*

Il y a trois cas à considérer : 1° l'un des côtés coïncide avec l'axe; 2° les trois côtés sont obliques à l'axe; 3° un côté est parallèle à l'axe.

Soit le triangle ABC tournant autour de l'axe XY.

1° Le côté AC coïncide avec l'axe.

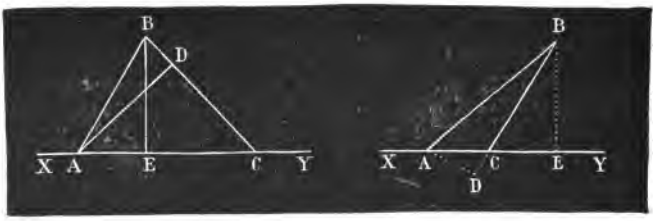


FIG. 500. FIG. 501.

Menons les hauteurs AD, BE. Il faut démontrer que

$$\text{Vol. ABC} = \text{Surf. BC} \times \frac{1}{3}\text{AD}.$$

Supposons d'abord que le pied E de la perpendiculaire BE tombe entre A et C. Il est facile de voir que le volume engendré par le triangle ABC est la somme des deux cônes engendrés par les triangles rectangles ABE, EBC (*fig.* 500).

Par conséquent,

$$\text{Vol. ABC} = \text{vol. ABE} + \text{vol. EBC}.$$

Or,

$$\text{Vol. ABE} = \frac{1}{3}\pi\overline{BE}^2 \times AE,$$

et

$$\text{Vol. EBC} = \frac{1}{3}\pi\overline{BE}^2 \times EC;$$

par suite,

$$\text{Vol. ABC} = \frac{1}{3}\pi\overline{BE}^2 \times AE + \frac{1}{3}\pi\overline{BE}^2 \times EC = \frac{1}{3}\pi\overline{BE}^2 (AE + EC),$$

ou encore

$$\text{Vol. ABC} = \frac{1}{3}\pi BE \times BE \times AC.$$

Mais $BE \times AC = BC \times AD$, car ces deux produits représentent l'un et l'autre le double de l'aire du triangle ABC; donc

$$\text{Vol. ABC} = \frac{1}{3}\pi BE \times BC \times AD.$$

D'autre part, le côté BC, en tournant autour de AC, engendre la surface latérale d'un cône circulaire droit; alors on a (732) :

$$\text{Surf. BC} = 2\pi BE \times \frac{BC}{2} = \pi BE \times BC.$$

Remplaçant dans l'expression du volume ABC, le produit $\pi BE \times BC$ par surface BC, sa valeur, il vient enfin :

$$\text{Vol. ABC} = \text{Surf. BC} \times \frac{1}{3}AD.$$

Si le pied E de la perpendiculaire BE tombe sur le prolongement de AC (*fig.* 501), on a :

$$\text{Vol. ABC} = \text{vol. ABE} - \text{vol. BEC}.$$

Dans ce cas encore, un raisonnement analogue au précédent donne aussi :

$$\text{Vol. ABC} = \text{Surf. BC} \times \frac{1}{3}AD.$$

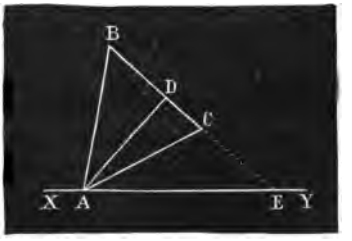


FIG. 502.

2° Le côté AC n'a que le point A de commun avec l'axe et le côté BC opposé au sommet A n'est point parallèle à l'axe (fig. 502).

On a aussi :

$$\text{Vol. ABC} = \text{Surf. BC} \times \frac{1}{3}AD.$$

Car, si l'on prolonge BC jusqu'à sa rencontre en E avec l'axe, il est clair que

$$\text{Vol. ABC} = \text{vol. ABE} - \text{vol. ACE}.$$

Or,

$$\text{Vol. ABE} = \text{Surf. BE} \times \frac{1}{3}\text{AD} \text{ et vol. ACE} = \text{Surf. CE} \times \frac{1}{3}\text{AD}.$$

Donc

$$\text{Vol. ABC} = (\text{Surf. BE} - \text{Surf. CE}) \times \frac{1}{3}\text{AD} = \text{Surf. BC} \times \frac{1}{3}\text{AD}.$$

3° Le côté BC est parallèle à l'axe. On a encore :

$$\text{Vol. ABC} = \text{Surf. BC} \times \frac{1}{3}\text{AD}.$$

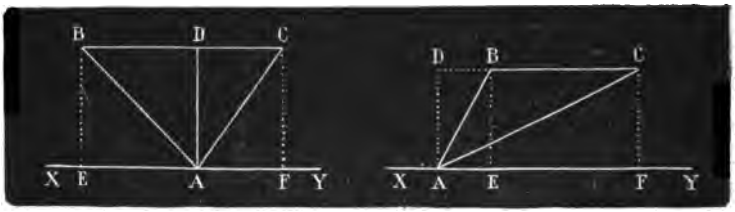


FIG. 503. FIG. 504.

Menons la hauteur AD et supposons que le point D tombe entre B et C (*fig.* 503). Il est évident que le cône engendré par le triangle EAB est le tiers du cylindre engendré par le rectangle EADB; par conséquent le volume engendré par le triangle ABD est les deux tiers de ce cylindre. De même, le volume engendré par le triangle ADC est les deux tiers du cylindre engendré par le rectangle AFCD; donc le volume engendré par ABC est les deux tiers du cylindre engendré par le rectangle EBCF. Ainsi

$$\text{Vol. ABC} = \frac{2}{3}\pi\overline{\text{AD}}^2 \times \text{BC} = 2\pi\text{AD} \times \text{BC} \times \frac{\text{AD}}{3}.$$

Mais la surface engendrée par BC est la surface latérale d'un cylindre qui a pour mesure $2\pi\text{AD} \times \text{BC}$; on peut donc remplacer $2\pi\text{AD} \times \text{BC}$ par surface BC, et il vient enfin :

$$\text{Vol. ABC} = \text{Surf. BC} \times \frac{1}{3}\text{AD}.$$

Si le pied D de la perpendiculaire AD tombe sur le prolongement de BC (*fig.* 504), on trouve encore par un raisonnement analogue au précédent, que

$$\text{Vol. ABC} = \text{Surf. BC} \times \frac{1}{3}\text{AD}.$$

792. Définitions. — On appelle *secteur polygonal régulier* la portion de plan OABCD (*fig.* 505) comprise entre une ligne brisée régulière ABCD et les deux rayons extremes OA, OD. Le rayon OI du cercle inscrit dans la ligne brisée régulière est l'*apothème* de cette ligne.

THÉORÈME

793. — *Le volume engendré par un secteur polygonal régulier, tournant autour d'un de ses diamètres extérieurs, a pour mesure le produit de la surface engendrée par la ligne brisée régulière par le tiers de l'apothème.*

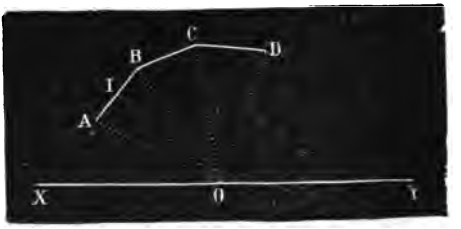


FIG. 505.

Soit, en effet, le secteur polygonal régulier OABCD. Le volume qu'il engendre en tournant autour du diamètre XY est la somme des volumes engendrés par les triangles OAB, OBC, OCD. On a donc :

$$\text{Vol. OABCD} = \text{vol. OAB} + \text{vol. OBC} + \text{vol. OCD}.$$

Or,

$$\text{Vol. OAB} = \text{Surf. AB} \times \frac{1}{3}\,\text{OI}$$

$$\text{Vol. OBC} = \text{Surf. BC} \times \frac{1}{3}\,\text{OI}$$

$$\text{Vol. OCD} = \text{Surf. CD} \times \frac{1}{3}\,\text{OI}.$$

Ajoutant membre à membre, on a :

$$\text{Vol. OABCD} = (\text{Surf. AB} + \text{Surf. BC} + \text{Surf. CD}) \times \frac{1}{3}\,\text{OI},$$

ou enfin :

$$\text{Vol. OABCD} = \text{Surf. ABCD} \times \frac{1}{3}\,\text{OI}.\ (^1)$$

§ II. — VOLUME DU SECTEUR SPHÉRIQUE, DE LA SPHÈRE ET DU SEGMENT SPHÉRIQUE

794. Définitions. — On appelle *secteur sphérique* le solide engendré par un secteur circulaire COD (*fig.* 506) tournant autour d'un diamètre AB qui lui est extérieur. L'arc CD du secteur décrit, en tournant, une zone qui est la *base* du secteur sphérique.

(1) En mécanique, le théorème de Guldin fait voir que : Le volume engendré par une surface plane tournant autour d'un axe situé dans son plan est égal au produit de l'aire de cette figure par la circonférence que décrit son centre de gravité.

Le secteur circulaire AOC engendre également, en tournant autour de AB, un secteur sphérique qui a pour *base* la calotte sphérique décrite par l'arc AC.

795. — On nomme *segment sphérique* la portion du volume de la sphère comprise entre deux plans parallèles qui sont les bases du segment. Si l'un de ces plans est tangent à la sphère, le segment sphérique n'a plus qu'une base. La distance des bases est la *hauteur* du segment.

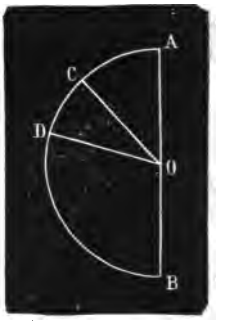


FIG. 506.

796. — On appelle volume d'un secteur sphérique la *limite* vers laquelle tend le *volume engendré par un secteur polygonal régulier inscrit dans un secteur circulaire*, quand on double indéfiniment le nombre de ses côtés. Le théorème suivant montre l'existence de cette limite.

THÉORÈME

797. — *Le volume d'un secteur sphérique a pour mesure le produit de la zone qui lui sert de base par le tiers du rayon.*

En effet, soit le secteur sphérique engendré par le secteur circulaire AOE tournant autour du diamètre PP'. Inscrivons dans l'arc AE la ligne brisée régulière ABCDE. Le volume engendré par le secteur polygonal régulier OABCDE, tournant autour du diamètre PP', a pour mesure (793) le produit :

$$\text{Surf. ABCDE} \times \frac{1}{3}\text{OI}.$$

FIG. 507.

Or, si l'on double indéfiniment le nombre des côtés du secteur polygonal, la surface engendrée par ce secteur grandit et a pour limite la zone engendrée par l'arc AE ; l'apothème OI grandit aussi et a pour limite le rayon R de la sphère. Par suite, le volume OABCDE grandit en même temps et a pour limite le produit de l'aire de la zone par le tiers du rayon de la sphère. Mais, par définition, cette limite est le volume du secteur sphérique. Le théorème est, par conséquent, démontré. Donc :

$$\text{Vol. sect. sph. AOE} = \text{Surf. zone AE} \times \frac{1}{3}\text{R};$$

et, si l'on remplace surf. zone AE par son expression $2\pi R \times h$, on a :

$$\text{Vol. sect. sph. AOE} = 2\pi R \times h \times \frac{1}{3}R = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

THÉORÈME

798. — *Le volume de la sphère a pour mesure le produit de sa surface par le tiers de son rayon.*

Car la sphère peut être considérée comme le secteur sphérique engendré par un demi-cercle autour de son diamètre. La zone correspondante est évidemment la surface entière de la sphère. Donc, en appelant R le rayon de la sphère, on a :

$$\text{Vol. sph.} = 4\pi R^2 \times \frac{1}{3}R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Si l'on remplace dans cette formule R par sa valeur $\frac{D}{2}$, on a :

$$\text{Vol. sph.} = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

Autre démonstration. — La surface de la sphère peut être décomposée en une infinité de petites faces, sensiblement planes, et son volume en une infinité de petites pyramides ayant ces faces pour bases, pour sommet commun le centre de la sphère et pour hauteur le rayon. Or, le volume d'une pyramide est égal au produit de l'aire de sa base par le tiers de sa hauteur. Donc la somme de toutes ces petites pyramides, ou le volume de la sphère, est égal au produit de la somme de toutes leurs petites bases, ou à la surface de la sphère, par le tiers de la hauteur commune ou du rayon.

THÉORÈME

799. Corollaire. — *Les volumes de deux sphères sont dans le rapport des cubes de leurs rayons ou de leurs diamètres.*

Démonstration identique à celle du n° 783.

THÉORÈME

800. — *Le volume de l'anneau sphérique engendré par le segment circulaire* AMB, *tournant autour du diamètre* XY, *extérieur à ce segment, a pour mesure le sixième du produit de l'aire du cercle ayant pour rayon la corde* AB *du segment par la hauteur* CD *de l'anneau.*

FIG. 508.

Il faut démontrer que l'on a :

$$\text{Vol. AMB} = \frac{1}{6}\pi\overline{AB}^2 \times \text{CD}.$$

En effet,

$$\text{Vol. AMB} = \text{Sect. sphér. OAMB} - \text{vol. OAB}.$$

Or (797), Sect. sphér. $OAMB = \frac{2}{3}\pi\overline{OA}^2 \times CD$,

et (791)

$$\text{Vol. OAB} = \text{Surf. AB} \times \frac{1}{3}\,OI = 2\pi OI \times CD \times \frac{1}{3}\,OI = \frac{2}{3}\pi\overline{OI}^2 \times CD;$$

par suite, on a : $\text{Vol. AMB} = \frac{2}{3}\pi\overline{OA}^2 \times CD - \frac{2}{3}\pi\overline{OI}^2 \times CD$

ou $$\text{Vol. AMB} = \frac{2}{3}\pi CD\left(\overline{OA}^2 - \overline{OI}^2\right) = \frac{2}{3}\pi CD \times \overline{AI}^2;$$

mais $$AI = \frac{AB}{2}, \text{ d'où } \overline{AI}^2 = \frac{\overline{AB}^2}{4}.$$

Donc enfin : $\text{Vol. AMB} = \frac{2}{3}\pi CD \times \frac{\overline{AB}^2}{4} = \frac{1}{6}\pi\overline{AB}^2 \times CD$. C. q. f. d.

THÉORÈME

801. — *Le volume d'un segment sphérique est équivalent au volume d'une sphère ayant pour diamètre la hauteur du segment, augmenté du produit de la demi-somme de ses bases par cette même hauteur.*

FIG. 509.

Soit le segment sphérique engendré par la rotation, autour du diamètre XY, du plan circulaire CAMBD. Ce segment, dont les rayons des bases sont AC et BD, est évidemment la somme des volumes engendrés par le segment circulaire AMB et par le trapèze CABD. Il s'agit donc de démontrer que l'on a :

$$\text{Vol. seg. CAMBD} = \frac{1}{6}\pi\overline{CD}^3 + \frac{1}{2}\pi\left(\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2\right) \times CD.$$

En effet, on a d'abord (800) : $\text{Vol. AMB} = \frac{1}{6}\pi\overline{AB}^2 \times CD$;

puis (741), $\text{Vol. CABD} = \frac{1}{3}\pi\left(\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + AC \times BD\right) \times CD$.

Faisant la somme de ces deux derniers volumes en donnant 6 pour dénominateur au second, il vient :

$$\text{Vol. seg. CAMBD} = \frac{1}{6}\pi\left(\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 + 2\overline{BD}^2 + 2AC \times BD\right) \times CD(1).$$

Éliminons $\overline{AB}^2$ qui ne doit point figurer au résultat. A cet effet, abaissons la perpendiculaire BI sur AC. Le triangle rectangle ABI donne :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{BI}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{CD}^2;$$

mais, $AI = AC - IC = AC - BD$, d'où $\overline{AI}^2 = (AC - BD)^2$:

donc, $\overline{AB}^2 = (AC - BD)^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 - 2AC \times BD + \overline{CD}^2$.

Substituant la valeur de $\overline{AB}^2$ dans (1), on a, après simplification,

$$\text{Vol. seg. CAMBD} = \frac{1}{6}\pi\left(\overline{CD}^2 + 3\overline{AC}^2 + 3\overline{BD}^2\right) \times CD$$

ou enfin : $$\text{Vol. seg. CAMBD} = \frac{1}{6}\pi CD^3 + \frac{1}{2}\pi\left(\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2\right) \times CD.$$

En désignant les bases du segment sphérique par r, r', sa hauteur par h et son volume par V, on a la formule :

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi\left(r^2 + r'^2\right) \times h.$$

802. Remarque I.— Si le rayon BD devient nul, le segment sphérique n'a plus qu'une base. Dans ce cas, $\overline{BD}^2$ disparaît et la hauteur du segment est CX ; par suite :

$$\text{Vol. seg. ACX} = \frac{1}{6}\pi\overline{CX}^3 + \frac{1}{2}\pi\,\overline{AC}^2 \times CX.$$

Si donc on conserve les mêmes notations que plus haut, on a la formule :

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi r^2 h.$$

803. Remarque II. — On peut trouver facilement le volume du segment sphérique à une base en fonction de sa hauteur h et du rayon R de la sphère, car

$$\overline{AC}^2 = CX \times CY = h(2R - h);$$

par suite, on a successivement :

$$\text{Vol. seg. ACX} = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h(2R - h) \times h,$$

$$\text{Vol. seg. ACX} = \frac{1}{6}\pi h^3 + \pi h^2\left(R - \frac{h}{2}\right),$$

$$\text{Vol. seg. ACX} = \pi h^2\left(\frac{h}{6} + R - \frac{h}{2}\right),$$

$$\text{Vol. seg. ACX} = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right).$$

Donc, le volume du segment sphérique à une base est équivalent au volume d'un cylindre ayant pour rayon de base la hauteur du segment et pour hauteur la différence entre le rayon de la sphère et le tiers de la hauteur du segment.

VOLUME APPROCHÉ D'UN SOLIDE LIMITÉ PAR UNE SURFACE QUELCONQUE

804. — On sait qu'un corps plongé dans un liquide déplace un volume de liquide égal au sien propre; donc, si l'on plonge un corps dans un vase régulier entièrement rempli d'eau, le volume de l'eau échappée donnera le volume du corps. Plus généralement on place le corps dans une caisse de capacité connue ou facile à connaître, et l'on achève de la remplir avec du sable : la capacité de la caisse, moins le volume du sable, donne le volume du corps.

Dans le cas où le corps a un volume considérable, on peut aussi le décomposer, au moyen de plans verticaux et horizontaux, en petits solides dont on sait trouver les volumes. La somme de ces différents volumes représente évidemment le volume total du corps.

Enfin, on peut encore, au moyen des mêmes plans, ramener des corps irréguliers à des figures régulières qui représentent approximativement les volumes de ces corps. C'est ainsi qu'on peut trouver les volumes des déblais, des monticules de terre, etc.

APPLICATION I. — PROBLÈME

805. — *Un cube est inscrit dans une sphère : trouver le volume du cube en fonction du rayon de la sphère.*

Soit a l'arête du cube et R le rayon de la sphère. Si l'on suppose un grand cercle de la sphère mené selon la diagonale d'une face du cube, ce grand cercle sera circonscrit à un rectangle ABCD dont deux des côtés AB, DC sont les arêtes du cube et les deux autres AD, BC sont les diagonales des faces du cube. De plus, la diagonale BD = le diamètre de la sphère = 2R. Or, le triangle rectangle ABD donne :

FIG. 510.

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2;$$

mais, AB = a, BD = 2R et (357) AD = $a\sqrt{2}$;

par suite, $$a^2 = 4R^2 - 2a^2,$$

d'où : $$a^2 = \frac{4R^2}{3} \text{ et } a = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Donc

$$\text{Vol. du cube} = a^3 = \left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{8R^3}{3\sqrt{3}} = \frac{8R^3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{8}{9}R^3\sqrt{3}.$$

APPLICATION II. — THÉORÈME D'ARCHIMÈDE

806. — *Si un cylindre et un cône équilatéral sont circonscrits à une sphère : 1° la surface totale du cylindre est moyenne proportionnelle entre la surface de la sphère et la surface totale du cône; 2° le volume du cylindre est moyen proportionnel entre les deux autres volumes; 3° le rapport de chaque volume à sa surface totale est égal au tiers du rayon de la sphère.*

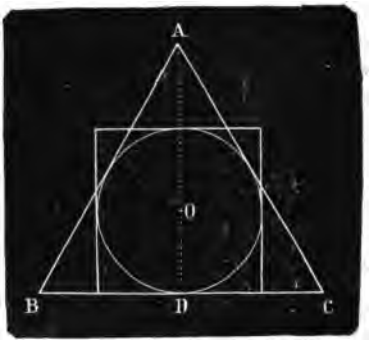


FIG. 511.

1° Un plan sécant mené suivant l'axe du cône montre un grand cercle de la sphère inscrit en même temps dans un carré et un triangle équilatéral. Or, si l'on désigne par R le rayon de la sphère, le diamètre et la hauteur du cylindre seront représentés par 2R. On a donc :

$$\text{Surf. sphère} = 4\pi R^2,$$

$$\text{Surf. tot. cyl.} = 2\pi R \times 2R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2.$$

D'autre part, la hauteur AD du cône est égale à 3OD ou 3R (430) et $AB = BC = 2BD$; mais $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 = (2BD)^2 - (3R)^2 = \overline{4BD}^2 - 9R^2$, d'où $\overline{3BD}^2 = 9R^2$ et $BD = R\sqrt{3}$.

D'après cela :

$$\text{Surf. lat. du cône} = \pi BD \times AB = \pi R\sqrt{3} \times 2R\sqrt{3} = 6\pi R^2,$$

$$\text{Surf. de la base} = \pi\overline{BD}^2 = \pi \times (R\sqrt{3})^2 = 3\pi R^2,$$

d'où

$$\text{Surf. totale} = 6\pi R^2 + 3\pi R^2 = 9\pi R^2.$$

Les trois surfaces étant proportionnelles aux nombres 4, 6 et 9, il en résulte que la seconde est moyenne proportionnelle entre les deux autres.

2° On a pour les volumes de ces corps :

$$\text{Vol. sphère} = \frac{4}{3}\pi R^3, \text{ vol. cyl.} = \pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3,$$

$$\text{Vol. cône} = \frac{1}{3} \times 3\pi R^2 \times 3R = 3\pi R^3.$$

Ces volumes sont proportionnels aux nombres $\frac{4}{3}$, 2 et 3 ou bien aux nombres 4, 6 et 9. Le second est donc moyen proportionnel entre les deux autres.

3° D'après ce qu'on vient de voir (1°), on peut écrire :

$$\frac{\text{Surf. sphère}}{4} = \frac{\text{Surf. tot. cyl.}}{6} = \frac{\text{Surf. tot. cône}}{9} = \pi R^2 \qquad (1)$$

et (2°)

$$\frac{\text{Vol. sphère}}{4} = \frac{\text{Vol. cyl.}}{6} = \frac{\text{Vol. cône}}{9} = \frac{1}{3}\pi R^3. \qquad (2)$$

Divisant membre à membre (2) par (1), il vient l'égalité qu'il fallait trouver, c'est-à-dire :

$$\frac{\text{Vol. sphère}}{\text{Surf. sphère}} = \frac{\text{Vol. cyl.}}{\text{Surf. tot. cyl.}} = \frac{\text{Vol. cône}}{\text{Surf. tot. cône}} = \frac{1}{3}R.$$

APPLICATION III. — PROBLÈME

807. — *Trouver le rayon d'un boulet en fonte pesant* 10 *kg. La densité de la fonte est* 7.20.

Le volume d'une sphère est donné par la formule

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Or, le poids d'un corps est égal à son volume multiplié par sa densité, donc :

$$\text{Poids de la sphère ou 10 kg.} = \frac{4}{3} \times 3{,}1416 \times R^3 \times 7{,}20,$$

d'où

$$R = \sqrt[3]{\frac{3 \times 10}{4 \times 3{,}1416 \times 7{,}2}} = 0^m{,}069.$$

APPLICATION IV. — PROBLÈME

808. — *On a une sphère de cuivre de* $0^m{,}18$ *de rayon. Cette sphère creuse contient une sphère de platine de* $0^m{,}05$ *de rayon, il n'existe aucun vide entre les deux sphères : on demande le poids de la masse ainsi formée, la densité du cuivre étant* 8,8 *et celle du platine* 22,06.

Si l'on représente par V le volume de la sphère totale, par v celui de la sphère de platine,

$V - v$ sera le volume du cuivre.

R et r étant les rayons des sphères, on aura :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

d'où

$$\text{Volume du cuivre ou } V - v = \frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3).$$

D'après le problème précédent,

$$\text{Poids du cuivre} = \frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3) \times 8{,}8.$$

$$\text{Poids du platine} = \frac{4}{3}\pi r^3 \times 22{,}06.$$

$$\text{Poids total} = \frac{4}{3}\pi [(R^3 - r^3) \times 8{,}8 + r^3 \times 22{,}06].$$

En remplaçant les lettres par leurs valeurs, il vient

$$\text{Poids total} = \frac{4}{3} \times 3{,}1416\ [(\overline{0{,}18}^3 - \overline{0{,}05}^3) \times 8{,}8 + \overline{0{,}05}^3 \times 22{,}06]$$

$$= 221^{kg}923.$$

CHAPITRE VII

Puissance d'un point par rapport à une sphère. Plan radical. — Axe radical. — Centre radical.

809. Puissance d'un point par rapport à une sphère. — Soit une sécante partant d'un point M et rencontrant aux deux points A et B une sphère de centre O et de rayon r. Le produit MA × MB est le même quelle que soit la direction de la sécante. Soit d la distance du point M au centre O de la sphère.

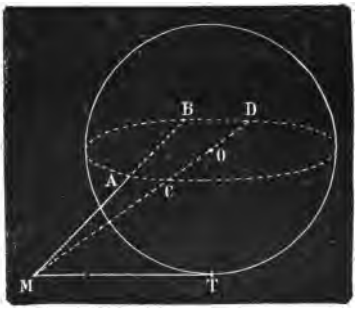


FIG. 512.

On aura $MA \times MB = d^2 - r^2$.

En effet, si l'on fait passer un plan par la droite MAB et par le centre de la sphère, ce plan coupe la sphère suivant un grand cercle de rayon r. — On a vu (364) que dans ce cas $\overline{MA} \times \overline{MB} = MC \times MD = (d - r)(d + r) = d^2 - r^2$.

Ce produit constant est appelé la *puissance du point M par rapport à la sphère;* il est positif, nul ou négatif suivant que M estextérieur à la sphère, sur la sphère, ou intérieur à la sphère.

Remarque. — Lorsque le point est extérieur à la sphère, sa puissance est égale au carré de la tangente MT menée de ce point à la sphère.

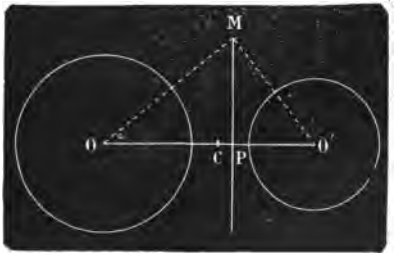


FIG. 513.

810. Plan radical. — Théorème. — *Le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux sphères est un plan perpendiculaire à la ligne des centres* et qu'on nomme *plan radical* des deux sphères.

Menons un plan sécant M par la ligne des centres OO'. Dans ce plan, le lieu des points d'égale puissance par rapport aux deux sphères est le même que le lieu des points d'égale puissance par rapport aux deux grands cercles des sphères O et O' déterminés par le plan M.

Cet axe radical MP perpendiculaire à la ligne de centre, dans sa rotation autour de OO′ engendre le plan radical des deux sphères dont la distance CP au milieu C de la ligne OO′ est donnée par la formule $CP = \frac{R^2 - R'^2}{2\,\overline{OO'}}$ (336).

811. — Toutes les observations faites à propos de l'axe radical par rapport à deux cercles sont applicables ici.

1° *Si les deux sphères se coupent, leur plan radical est le plan du cercle commun;*

2° *Si les sphères sont tangentes, leur plan radical est le plan tangent au point de contact des deux sphères;*

3° *Si les sphères sont concentriques, leur plan radical disparaît à l'infini;*

4° *Le plan radical est le lieu des points d'où l'on peut mener aux deux sphères des tangentes égales* et par là même le lieu des *centres des sphères* qui coupent orthogonalement les deux sphères données.

812. Axe radical. — Théorème. — *Les plans radicaux de trois sphères considérées deux à deux passent par une même droite qu'on appelle axe radical des trois sphères.*

Il faut évidemment écarter le cas où les trois centres des sphères sont en ligne droite, car les trois plans radicaux sont alors parallèles et ne peuvent se couper.

Mais supposons que $O_1O_2O_3$ les centres des trois sphères ne sont pas en ligne droite.

Le plan radical de la sphère O_1 et de la sphère O_2 coupe le plan radical de la sphère O_1 et de la sphère O_3 suivant une ligne droite qui est le lieu des points ayant même puissance par rapport aux trois sphères. Cette droite se trouve par conséquent dans le plan radical de la sphère O_2 et de la sphère O_3.

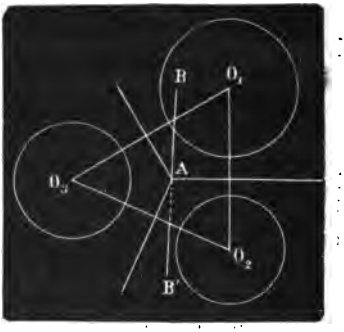


FIG. 514.

C'est la perpendiculaire BAB′ au plan des centres $O_1O_2O_3$, menée par le centre radical A des trois grands cercles déterminés par le plan $O_1O_2O_3$ qui coupe les trois sphères (fig. 514).

813. Remarque. — L'axe radical est le lieu des points d'où l'on peut mener des tangentes égales aux trois sphères et, par là même, le lieu des centres des sphères qui coupent orthogonalement les trois premières.

814. Centre radical. — Théorème. — *Les six plans radicaux de quatre sphères prises deux à deux,* ou les *quatre axes radicaux* de quatre sphères prises trois à trois se coupent en un même point appelé **centre radical** des quatre sphères.

Il faut d'abord écarter le cas où les centres des quatre sphères sont dans un même plan, car dans ce cas les plans radicaux sont parallèles à une même droite.

Mais, si les quatre sphères ne sont pas dans un même plan, leurs centres $O_1O_2O_3O_4$ peuvent être regardés comme les sommets d'un tétraèdre.

Soit l'axe radical R des trois sphères $O_1O_2O_3$.

Le plan radical P des sphères O_1 et O_4 perpendiculaire à la droite O_1O_4 n'est pas parallèle à l'axe radical R et le coupera en un certain point I. Ce point I, *centre radical des quatre sphères*, a même puissance par rapport aux quatre sphères $O_1O_2O_3O_4$, il appartient donc aux six plans radicaux et aux quatre axes radicaux de ces sphères.

Remarque. — Si le point I est extérieur aux quatre sphères il sera le *centre* d'une sphère qui coupera orthogonalement les quatre premières.

CHAPITRE VIII

Polaire d'un point par rapport à un cercle. — Plan polaire d'un point par rapport à une sphère.

§ I. — POLE ET POLAIRE PAR RAPPORT A UN ANGLE ET A UN CERCLE

THÉORÈME

815. — *Si d'un point* A *du plan d'un angle* XOY, *on mène une sécante arbitraire* AMN *et que l'on détermine sur* MN *le conjugué* P *du point* A, *par rapport aux points* M *et* N, *le lieu du point* P *est une droite* OZ *passant en* O.

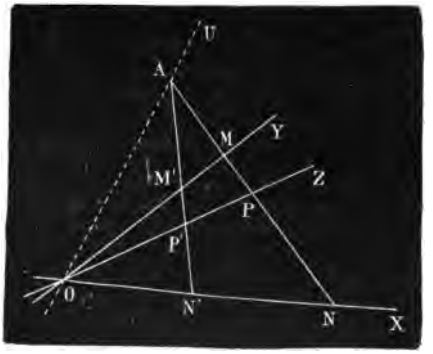


FIG. 515.

En effet, les quatre droites joignant le point O aux points A, M, N, P forment un faisceau harmonique, donc (429) toute sécante AM'N', issue de A, sera divisée harmoniquement par ce faisceau et le conjugué P' de A sera toujours sur OZ.

Réciproquement, tout point P' de OZ fait partie du lieu, car c'est le conjugué de A sur la sécante AM'P'N'.

Le droit OZ est la **polaire** du point A par rapport à l'angle XOY ; le point A est le **pôle** de OZ.

Tous les points de OU ont la même polaire OZ et réciproquement tous les points de OZ ont la même polaire OU.

816. Corollaire I. — *Si d'un point* A *du plan d'un angle* XOY, *on mène deux sécantes arbitraires* AMN, AM'N', *le lieu du point* I *de rencontre des droites* MN', M'N *est la polaire* OZ *du point* A.

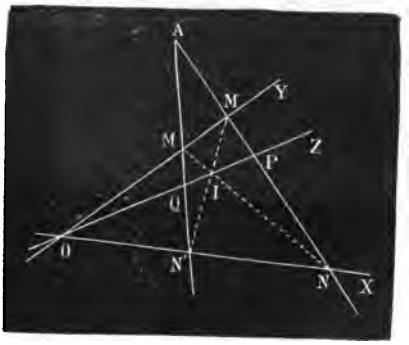


FIG. 516.

Soient les deux sécantes AMN, AM'N'. La polaire du point A par rapport à l'angle XOY donné passe par P et Q conjugués de A par rapport à MN et par rapport à M'N', elle passe de plus par le point O.

Cette droite OZ est aussi polaire de A par rapport à l'angle MIN des diagonales M'N et MN' du quadrilatère MNN'M', qui se coupent en I. Le lieu du point I est donc la polaire OZ du point A.

817. Remarque. — On a ainsi un moyen pratique de trouver la polaire du point A par rapport à un angle XOY en menant deux sécantes quelconques AMN, AM'N'. On mène les droites MN' et M'N qui se coupent en I ; OI est la polaire cherchée.

818. Corollaire II. — *Une diagonale d'un quadrilatère complet est divisée harmoniquement par les deux autres.*

Définition. — On appelle *quadrilatère complet* la figure formée en prolongeant les côtés opposés MM′ et NN′, NM et N′M′ d'un quadrilatère ordinaire MNM′N′ jusqu'en leurs points de rencontre A et O. Les points M,N, M′,N′,A,O sont les six sommets du quadrilatère; M′N, MN′ et AO sont les trois diagonales.

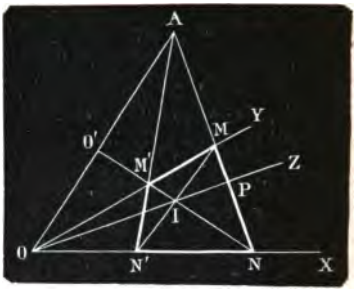


Fig. 517.

Pour démontrer le corollaire ci-dessus, il faut prouver que l'une quelconque NM′ des trois diagonales est divisée harmoniquement par les deux autres MN′ et AO.

Dans le quadrilatère complet M′MNN′OA la droite OI est conjuguée de OA par rapport à OX, OY ; les points I et O′ sont donc conjugués par rapport aux sommets M′ et N, donc la diagonale NIM′O′ est divisée harmoniquement par les deux autres diagonales MN′ et AO.

THÉORÈME

819. — *Le lieu du conjugué harmonique d'un point* P *par rapport aux points de rencontre* C *et* D *d'une sécante quelconque* PCD, *menée par* P, *avec un cercle* O, *est une perpendiculaire au diamètre passant en* P.

Soient A et B les extrémités du diamètre passant en P (*fig.* 519). Il s'agit de montrer que le point cherché M est sur une perpendiculaire à ce diamètre.

On voit d'abord que le point H, conjugué harmonique de P par rapport aux points A et B, est déterminé par la rencontre avec AB de la droite qui joint le point D au point C′, symétrique de C (427).

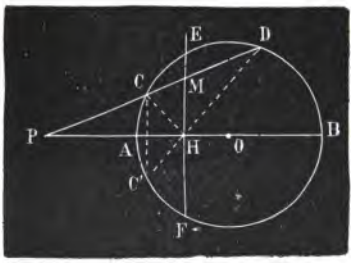


Fig. 519.

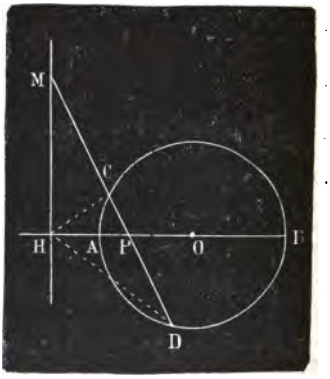


Fig. 520.

D'autre part, le point M étant le conjugué de P sur CD, les droites HC et HD, HP et HM forment un faisceau harmonique ; or, la droite HP est bissectrice de l'angle CHC′, extérieur au triangle CHD, donc la droite HM est bissectrice de l'angle intérieur CHD et, par suite, perpendiculaire au point H du diamètre PAB : donc le point M est déterminé.

On peut faire le même raisonnement dans le cas où le point P (*fig.* 520) est intérieur au cercle ; mais, dans ce cas, HP est bissectrice de l'angle intérieur du triangle CHD et HM et bissectrice de l'angle extérieur.

La droite HM est appelée la **polaire** du point P par rapport au cercle, et le point P est dit le **pôle** de HM.

820. Corollaire I. — *La polaire est perpendiculaire au diamètre qui passe par le pôle.*

821. Corollaire II. — *La polaire d'un point extérieur à la circonférence se confond avec la corde des contacts des tangentes issues de ce point.*

En effet, si dans la figure 519 la sécante PCD pivote autour du point P jusqu'à devenir tangente, les deux points C et D se confondent et le point M avec eux tout en restant sur EF ; cette droite coïncide donc avec la corde des contacts des tangentes issues du point P.

822. Corollaire III. — *Le rayon est moyen proportionnel entre les distances du centre au pôle et à la polaire.*

En effet, le point H (*fig.* 519) étant le conjugué harmonique de P par rapport aux points A et B et le point O étant le milieu de AB, on a (424) :

$$OP \times OH = \overline{OA}^2 = R^2$$

ou encore :

$$OH = \frac{R^2}{OP}.$$

D'où les conséquences qui suivent :

1° Le pôle et la polaire sont d'un même côté du centre O (car le produit $OP \times OH$ est le nombre positif R^2) ; la polaire est extérieure au cercle, si le pôle est intérieur; elle coupe le cercle, si le pôle est extérieur, et alors la polaire coïncide avec la corde des contacts des tangentes issues du pôle (821) ;

2° La polaire du centre est à l'infini (car on a : $OH = \frac{R^2}{0} = \infty$) ; la polaire d'un point à l'infini dans une direction donnée est le diamètre perpendiculaire à cette direction (car si $OP = \infty$, on a : $\infty \times OH = R^2$, égalité qui n'a lieu que si $OH = 0$, cas où le point H se confond avec le centre du cercle).

3° La polaire d'un point du cercle est la tangente en ce point (car, si $OP = R$, on a $R \times OH = R^2$, égalité qui n'est vérifiée que si OH est égal au rayon, cas où le point H est sur le cercle).

THÉORÈME

823. — *Les polaires de tous les points d'une droite passent par le pôle de cette droite, et réciproquement les pôles de toutes les droites passant par un point fixe sont sur la polaire de ce point.*

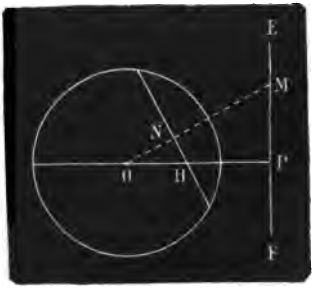


FIG. 521.

En effet, soient une droite EF et son pôle H. Prenons sur EF un point quelconque M et montrons que la polaire du point M passe par le pôle H de EF. A cet effet, menons OP perpendiculaire à EF et HN perpendiculaire à OM.

Les triangles semblables OHN et OPM donnent :

$$\frac{ON}{OP} = \frac{OH}{OM},$$

d'où (822)

$$ON \times OM = OP \times OH = R^2.$$

Donc la perpendiculaire HN à OM menée par le pôle H de la droite EF est la polaire du point M.

Réciproquement, soit HN une droite quelconque passant en un point fixe H ; je dis que son pôle est sur la polaire EF du point H.

En effet, menons ON perpendiculaire à HN et soit M le point où ON rencontre EF. Les triangles semblables OPM et OHN donnent :

$$\frac{OM}{OH} = \frac{OP}{ON},$$

d'où $$OM \times ON = OP \times OH = R^2.$$

Le point M est donc le pôle de la droite HN et il se trouve sur la polaire EF du point H.

Ainsi, lorsqu'un point M parcourt la droite EF, sa polaire HN pivote autour du point H, pôle de EF; de même si la droite HN pivote autour du point H, son pôle M parcourt la polaire EF de ce point.

Corollaire I. — *Si des différents points d'une droite* EF, *on mène des couples de tangentes à un cercle* O, *les cordes de contact passeront toutes par le pôle de* EF.

En effet, ces cordes coïncident respectivement avec les polaires des différents points de la droite.

De là un moyen facile de déterminer le pôle d'une droite par rapport à un cercle.

Corollaire II. — *Si une sécante* MN *pivote autour d'un point fixe* P, *le point* E *de concours des tangentes aux extrémités de* MN *décrit la polaire du point* P.

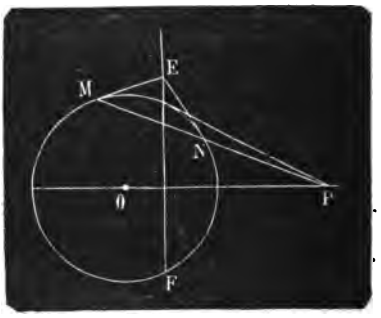


FIG. 522.

En effet, nous venons de voir (823) que si une droite pivote autour d'un point P son pôle se déplace sur la polaire de ce point : donc E pôle de MN (821) se déplace sur EF polaire de P.

THÉORÈME

824. — *Si d'un point* P *du plan d'un cercle, on trace deux sécantes arbitraires,* PCD, PC′D′, *les droites* CD′, DC′ *ainsi que les droites* CC′, DD′ *se coupent en* I *et* I′ *sur la polaire du point* P *par rapport au cercle.*

En effet, dans le quadrilatère complet ICI′DC′D′ la diagonale II′ coupe les deux autres CD, C′D′ aux points H et H′ qui sont respectivement les conjugués harmoniques du point P (818) par rapport aux droites CD et C′D′ : donc la droite II′ est la polaire du point P (819).

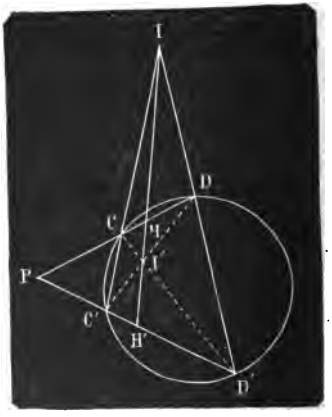


FIG. 523.

Remarque. — La détermination facile des points I et I′ permet de construire, avec la règle seulement, la polaire d'un point P par rapport à un cercle.

Figures polaires réciproques.

825. Définition. — On dit que les deux polygones sont *polaires réciproques*, lorsque les sommets de l'un sont les pôles des côtés de l'autre, et réciproquement, par rapport à un cercle, nommé *cercle directeur.*

Si, par exemple, on inscrit un polygone quelconque ABCDE, dans un cercle,

et que, par les sommets de ce polygone, on mène des tangentes, les points de rencontre de ces tangentes déterminent un second polygone A'B'C'D'E' qui est le polaire réciproque du premier. Car le sommet d'un angle quelconque B' a pour polaire la droite BC (821) qui joint les pôles B et C (822, 3°) des deux côtés A'B', B'C'.

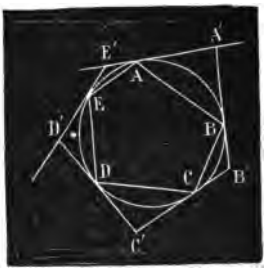


FIG. 524.

Il résulte de là que dans deux figures polaires réciproques par rapport à un cercle, les lignes droites de l'une correspondent à des points de l'autre.

Ainsi, à plusieurs points en ligne droite dans l'une des figures correspondent dans l'autre un nombre égal de droites se coupant en un même point (823). Cette propriété a une grande importance. Elle permet, en effet, de déduire facilement d'un théorème un autre théorème; chacun d'eux est dit, pour cette raison, le *corrélatif* de l'autre.

Le mode de démonstration s'appliquant à des figures corrélatives est connu sous le nom de *Méthode des polaires réciproques*.

825. Application I. — Si des points EMPF sont sur une même droite MP. leurs polaires sont concourantes et le point d'intersection est le point H, pôle de la droite MP (fig. 525).

Réciproquement. — Si plusieurs droites sont concourantes en un point H, leurs pôles sont en ligne droite; cette ligne droite n'est autre que la polaire MP du point d'intersection H des droites données.

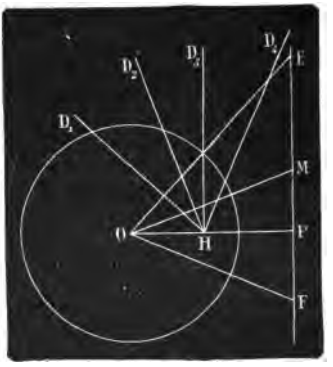


FIG. 525.

Application II. — Si quatre pôles E,M,P,F situés sur la droite MP forment une division harmonique, les quatre polaires correspondantes D_1, D_2, D_3, D_4, concourantes au point H, pôle de la droite MP, forment un faisceau harmonique. Elles sont en effet perpendiculaires aux rayons OE, OM, OP, OF, partant du centre du cercle de transformation et aboutissant aux quatre pôles donnés. Le faisceau harmonique partant du point O est égal au faisceau qui part du point H. Il suffit de porter le premier du point O au point H, parallèlement à lui-même et de le faire tourner d'un angle droit autour de ce dernier point. Les deux faisceaux coïncideront. Ils sont donc tous deux harmoniques.

Inversement, on pourrait transformer un faisceau harmonique, et l'on obtiendrait une division harmonique.

§ II. — POLE ET PLAN POLAIRE PAR RAPPORT A LA SPHÈRE

826. — *Le lieu géométrique du conjugué harmonique* G *d'un pôle* P *par rapport aux points de rencontre* C *et* D *de la sphère et d'une sécante quelconque issue du point* P *est un plan* MN *perpendiculaire à* OP *et qu'on appelle plan polaire du point* P.

Soient un demi cercle AMB, un point P et la polaire ML du point P.

Faisons tourner cette figure autour du diamètre PAOB, le demi-cercle engendre une sphère de centre O et la polaire engendre un plan perpendiculaire à PO.

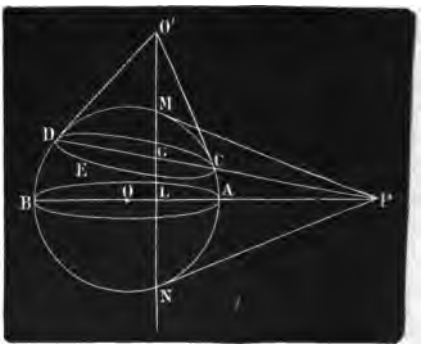


FIG. 526.

827. — Les résultats suivants sont analogues à ceux qu'on a démontrés relativement au cercle.

1° Par rapport à la sphère O, un point quelconque P pris pour pôle correspond à un plan polaire MN perpendiculaire à PO en un point tel que l'on ait $OL \times OP = R^2$.

Cette formule fait voir que si le point P est sur la sphère, le plan polaire est tangent à la sphère en ce même point P. Si le point P est intérieur à la sphère, son plan polaire est extérieur à la sphère. Si P est au point O son plan polaire est rejeté à l'infini. Enfin si le point P est extérieur à la sphère comme dans la figure 526, le plan polaire MN est le *plan de la courbe de contact* de la sphère et du cône circonscrit de sommet P.

2° Si par le point P, on mène le plan sécant PCDE, le cône circonscrit à la sphère suivant le cercle CDE aura son sommet O' sur le plan polaire;

3° *Réciproquement*, si chaque point du plan polaire est pris pour sommet du cône circonscrit à la sphère, le plan de la circonférence de contact passera par le pôle P.

Théorème des polaires réciproques

828. — *Le plan polaire de tout point* G *d'un plan* MN *passe par le pôle* P *de ce plan* MN.

Soit P le pôle du plan MN : si G est dans le plan MN, le pôle P de MN sera dans le plan polaire de G. La sécante PG est telle que P et G soient conjugués par rapport aux points d'intersection C et D avec la sphère (fig. 526). Le plan polaire de G passe donc par le pôle P.

Remarque. — Deux points P et G, tels que le plan polaire de l'un passe par l'autre sont dits *conjugués* par rapport à la sphère. De même deux plans sont dits *conjugués* par rapport à la sphère si l'un d'eux passe par le pôle de l'autre.

Droites conjuguées ou réciproques.

829. — Soient une sphère de centre O, une droite EPF, trace d'un plan dont le pôle est le point H, un point M pris sur EF dont le plan polaire est HN. D'après le théorème des polaires réciproques lorsque le point M décrit la droite EF, son plan polaire HN devant toujours passer par le pôle H tourne autour d'une droite fixe Δ passant par H et perpendiculaire au plan de la figure.

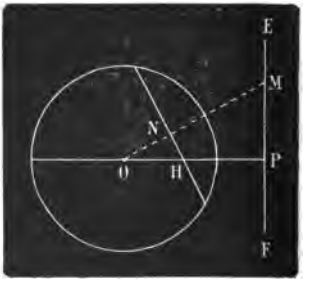


FIG. 527.

Inversement, si un plan tourne autour de la droite fixe EF, son pôle décrira la droite Δ. Ces deux droites sont orthogonales, leur plus courte distance est PH. Ce sont des droites conjuguées ou réciproques. Tout plan passant par la droite EF a son pôle sur la droite Δ et réciproquement. Chacune d'elles est le lieu des pôles des plans qui passent par l'autre. Par conséquent, toute droite MM' qui joint deux points de ces droites est divisée harmoniquement par la sphère, puisque le plan polaire de M passe par M'.

Remarque I. — Tout système de deux tangentes rectangulaires menées en un point de la sphère est un système de droites conjuguées ; on sait en effet que si le pôle P est sur la sphère, le plan polaire est tangent à la sphère en ce même point P (827).

Remarque II. — La méthode de transformation par polaires réciproques nous a fait voir en géométrie plane que, à tout point d'une première figure, correspond une droite de la seconde et réciproquement. Dans la géométrie à trois dimensions, à un point correspond un plan et réciproquement. L'étude des droites conjuguées introduit une correspondance de droite à droite.

EXERCICES SUR LE LIVRE VII

626. — Un cylindre qui a 2^m de hauteur a pour base un cercle de $0^m,10$ de rayon. On demande : 1° la surface latérale du cylindre ; 2° la surface totale.

627. — Un cylindre dont la hauteur est de $1^m,20$ a une surface latérale de $0^{mq},60$. On demande le rayon de la base.

628. — La surface totale d'un cylindre est de 3^{mq}, le rayon de la base de ce cylindre a $0^m,20$. Quelle est la hauteur du cylindre ?

629. — Un rouleau *(employé en agriculture)* a $1^m,60$ de longueur et $0^m,40$ de diamètre. Combien coûtera-t-il à faire prendre à raison de 1 fr. le m. q. ?

630. — Un cylindre a 2^m de hauteur et pour base un cercle de 1^m de rayon. On demande les dimensions d'un cylindre semblable, mais dont la surface latérale soit le 1/3 de la face latérale du premier.

631. — On a employé 2^{cmc} d'or pour dorer la surface latérale d'un cylindre dont le diamètre est de $0^m,20$ et la hauteur $0^m,80$. On demande l'épaisseur de la couche d'or.

632. — La densité de l'or est de 19,26 ; on veut recouvrir d'or une colonne ayant 3^m de hauteur et un rayon de $0^m,20$. Quel est le poids de l'or à employer, sachant que la feuille d'or doit avoir $0^m,0001$ d'épaisseur ?

633. — Que devient le volume d'un cylindre : 1° si l'on double le rayon de la base ; 2° si l'on double la hauteur ?

634. — Un vase cylindrique a $0^m,30$ de diamètre intérieur et $0^m,70$ de profondeur. Combien peut-il contenir de litres ?

635. — On demande le poids du mercure contenu dans un vase cylindrique qui a un diamètre de $0^m,20$ et dans lequel la hauteur du mercure est de $0^m,40$. La densité du mercure est de 13,6.

636. — Un vase cylindrique dont la capacité est de 20 litres (le double-décalitre) a une hauteur égale au diamètre. On demande ses dimensions.

637. — Un cylindre a un volume de 340^{dmc}. Quelle est la surface latérale de ce cylindre, sachant que sa hauteur est double de son diamètre ?

638. — La surface latérale d'un cylindre est de 3^{mq}, le rayon de la base de ce cylindre est de $0^m,20$. On demande son volume.

639. — La hauteur d'une colonne creuse en fonte est de $3^m,15$; son rayon intérieur $0^m,05$, et l'épaisseur de la couronne qui lui sert de base $0^m,01$. On demande son poids, la densité de la fonte étant 7,20.

640. — Le litre en zinc a une hauteur double du diamètre, l'épaisseur du métal est $0^m,005$, la densité du zinc est 7,19. Trouver le poids du vase.

641. — Le rayon intérieur d'une tour est $1^m,20$, l'épaisseur est $0^m,50$, et le volume de la maçonnerie est 81^{mc}. On demande la hauteur de la tour.

642. — On verse dans un double décalitre 64^{kg} de mercure ; la densité de ce corps est 13,6. A quelle hauteur s'élève-t-il à 0,001 près ?

643. — On plonge dans un liquide à 0° un petit cylindre de fer dont le rayon est $0^m,05$ et la hauteur $0^m,20$; ce cylindre pèse $10^{kg},500$ dans le liquide. On demande la densité du liquide, celle du fer étant 7,788.

644. — Les dimensions d'un parallélipipède sont a, b, h. Quelle est la hauteur d'un cylindre équivalent, le rayon de la base de ce cylindre étant a ?

645. — Un tube cylindrique en verre pèse 80^{gr} lorsqu'il est vide, et 140^{gr} lorsqu'on y introduit une colonne de mercure ayant $0^m,04$ de longueur. La densité du mercure étant 13,598, on demande le diamètre du tube.

646. — La surface totale d'un cylindre de $1^m,20$ de hauteur est égale à celle d'un cercle de 1^m de rayon. Calculer le volume du cylindre.

647. — On veut construire un bassin cylindrique qui contienne 10^{mc} d'eau. On demande la profondeur qu'on devra donner au bassin dans le cas où son diamètre aurait 4^m.

648. — Quel est le diamètre d'un fil de platine qui pèse 28^{gr} par mètre de longueur, la densité du platine étant 21,15 ?

649. — Dans un cylindre dont le rayon est $0^m,25$, on verse 30^{kg} de mercure dont la densité est de 13,6, et 6^{kg} d'alcool dont la densité est 0,79. A quelle hauteur s'élèvent les deux liquides ?

650. — La surface latérale d'un cylindre est a et son volume b. On demande le rayon de la base et la hauteur du cylindre.

651. — Les surfaces latérales de deux cylindres semblables sont entre elles dans le même rapport que les carrés des rayons de leurs bases ou les carrés de leurs hauteurs. Le rapport de leurs volumes est égal à celui des cubes de leurs dimensions homologues.

652. — On a un vase cylindrique dont le rayon de la base a $0^m,20$, la profondeur de ce vase est de $0^m,30$. On veut construire un autre vase semblable au premier, mais dont la contenance soit triple : quelles seront les dimensions de ce vase ?

653. — Un cône a 2^m de hauteur, la surface de sa base a 1^{mq} ; à 0,80 du sommet, on mène un plan parallèle à la base. On demande la surface de la section.

654. — Un cône a pour base un cercle de $0^m,40$ de rayon : à quelle distance du sommet doit être mené parallèlement à la base un autre cercle de $0^m,30$ de rayon ? Le cône a 2^m de hauteur.

655. — Un cône a 4^m de hauteur : à quelle distance du sommet faut-il mener un plan parallèle à la base pour que la section obtenue soit 1/3 de la base ?

656. — Le côté d'un cône est donné ainsi que sa base : déterminer la surface d'une section faite parallèlement à la base à une distance connue du sommet du cône.

657. — Le rayon de la base d'un cône a $0^m,30$, son côté $= 1^m,20$. On demande la surface latérale du cône.

658. — On demande le rapport des surfaces latérales d'un cylindre et d'un cône ayant même base et même hauteur.

659. — Un cône a 3^m de hauteur et un rayon de 1^m, on développe sur un plan la surface latérale de ce cône, on obtient ainsi un secteur circulaire. Calculer l'angle au centre du secteur.

660. — Le côté SA d'un cône étant de 2^m, calculer la longueur Sa à pren-

dre sur SA pour qu'un plan parallèle à la base du cône divise la surface latérale en 2 parties équivalentes.

661. — L'arête SA d'un cône étant 4^m, calculer les longueurs à prendre sur SA pour que 3 plans parallèles à la base divisent la surface latérale en 4 parties de grandeurs données, 1^{mq}, 2^{mq}, $2^{mq},20$, 3^{mq}.

662. — Le rayon de la base d'un cône a $0^m,40$, sa hauteur égale 3^m. Quelle est la surface totale du cône ?

663. — Un cône a une hauteur égale à son diamètre. Déterminer le rapport de la surface de sa base à sa surface latérale.

664. — La surface latérale d'un cylindre qui a 3^m de hauteur est égale à 4^{mq}. On demande la surface totale d'un cône ayant même base et même hauteur que le cylindre.

665. — Trouver la surface latérale d'un tronc de cône pour lequel on a $h = 3^m$, $R = 2^m$, $r = 1^m$.

666. — Trouver la surface totale d'un tronc de cône dans le cas où le côté de ce tronc $= 4^m$, $R = 3^m$ et $r = 2^m$.

667. — La surface latérale d'un tronc de cône est de $34^{mq},54$, les rayons des bases ont, l'un $1^m,42$ et l'autre $0^m,64$. On demande la hauteur du tronc.

668. — L'arête Aa d'un tronc de cône est $3^m,50$, les rayons des bases $0^m,80$ et $1^m,40$. Calculer à 0,01 près la longueur aa' à prendre sur aA pour qu'un plan parallèle à la base divise la surface latérale du tronc en deux parties équivalentes.

669. — L'arête Aa d'un tronc de cône a 4^m, les rayons des bases ont 2^m et 3^m. Calculer à 0,01 près les longueurs à prendre sur aA pour que des plans parallèles aux bases divisent la surface latérale en quatre parties qui soient entre elles comme les nombres 3, 4, 5 et 6.

670. — Que devient le volume d'un cône : 1° lorsqu'on double sa hauteur ; 2° le rayon de la base ?

671. — La hauteur d'un cône est 8^m, son volume 60^{mc}. Trouver sa surface latérale.

672. — Le côté d'un cône égale 8^m, le rayon de la base 2^m. On demande le volume du cône.

673. — Le côté d'un cône a 5^m, sur ce côté on prend 2^m à partir du sommet, et l'on mène un plan parallèle à la base ; ce plan détermine un cercle ayant $0^m,40$ de rayon. On demande le volume du cône.

674. — Un petit cône en argent dont la hauteur égale deux fois le diamètre de la base pèse $2^{kg},5$. On demande les dimensions du cône, la densité de l'argent étant 10,47.

675. — Quel est le rapport du volume du cylindre au cône de même base et de même hauteur ?

676. — On veut construire un cône de 3^m de hauteur et d'un volume égal à 1^{mc}. Quel sera le rayon de la base du cône ?

677. — Les dimensions d'un parallélipipède sont a, b, h. Calculer la hauteur d'un cône équivalent et dont le rayon de la base doit être a.

678. — Un cône de 5^m de hauteur a pour base un cercle de 1^m de rayon. On coupe ce cône à 2^m du sommet par un plan parallèle à la base. Quel est le volume du tronc de cône ainsi obtenu ?

679. — Un cône de 6^m de hauteur a un volume de 10^{mc} ; à 2^m du sommet on mène un plan parallèle à la base. Calculer la surface latérale du tronc déterminé par le plan sécant.

680. — La surface totale d'un cône ayant 1^m de hauteur est égale à celle d'un cercle de $0^m,60$ de rayon. Calculer le volume du cône.

681. — Les surfaces latérales de deux cônes semblables sont entre elles dans le même rapport que le carré des rayons de leurs bases ou les carrés de leurs hauteurs ou de leurs apothèmes. Le rapport de leurs volumes est égal à celui du cube de leurs dimensions.

682. — Un cône a 4^m de hauteur et pour base un cercle de $2^m,10$ de rayon. On demande le volume d'un cône semblable, mais dont la surface latérale soit les $\frac{3}{4}$ de la surface latérale du premier.

683. — Dans un cône ayant 4^m de hauteur, on mène parallèlement à la base et à 1^m du sommet une section ayant 1^{mq} de surface. On demande le volume du cône.

684. — L'arête SA d'un cône a 2^m, on prend sur SA une longueur $Sa = 1^m,30$, et par le point a on mène un plan parallèle à la base du cône. Quel est le rapport du cône ainsi détaché au cône entier ?

685. — Dans l'exercice précédent, quel est le rapport des volumes déterminés par le plan sécant ?

686. — Un cône droit dont la hauteur est de 20^m a pour volume 387^{mc}. A quelle distance du sommet faut-il mener un plan parallèle à la base pour enlever un cône dont le volume soit 95^{mc}.

687. — L'arête SA d'un cône a 4^m. Calculer la longueur à prendre sur SA pour qu'un plan parallèle à la base divise le volume du cône en deux parties équivalentes.

688. — L'arête SA d'un cône a 4^m. Calculer les longueurs à prendre sur SA à partir du point S pour que des plans parallèles à la base divisent le volume en parties de grandeurs données, 2^{mc}, 3^{mc}, 5^{mc}.

689. — Couper un cône par un plan parallèle à la base, de telle sorte que le volume du petit cône soit le 1/4 du tronc obtenu.

690. — Un cône a 4^m de hauteur et pour base un cercle de $2^m,10$ de rayon. On demande les dimensions d'un cône semblable, mais dont le volume soit triple du volume du premier.

691. — Un cône qui a la hauteur de $8^m,2$ est partagé par deux plans parallèles au plan de sa base en trois parties de volume équivalent. Calculer à 0,01 près les distances des deux plans sécants au sommet du cône.

692. — La hauteur d'un cône est de 10^m, le rayon de la base de ce cône est 5^m. On demande à quelle distance de la base il faudrait mener un plan parallèle à cette base pour que le volume du tronc fût égal à 20^{mc}.

693. — La hauteur d'un cône est de 5^m, le rayon de la base $= 1^m$. On demande à quelle distance de la base il faut mener un plan parallèle pour que le volume du tronc de cône soit moyen proportionnel entre le cône entier et la partie supérieure du tronc.

694. — Trouver le volume d'un tronc de cône pour lequel on a $h = 3^m$, $R = 2^m$, $r = 1^m$.

695. — Le volume d'un tronc de cône est égal à 20^{mc} : on sait que $R = 3^m$, $r = 2^m$. Calculer h.

696. — Un tronc de cône est la différence de deux cônes. Dans l'exercice précédent, calculer les volumes des deux cônes dont le tronc est la différence.

697. — Un cylindre et un tronc de cône ont une base commune et même hauteur ; le volume du tronc égale la moitié du volume du cylindre : dans quel rapport sont les rayons des deux bases du tronc ?

698. — Dans un tronc de cône, on a $h = 4^m$, $R = 3^m$, $r = 2^m$. Calculer la hauteur d'un cône équivalent au tronc de cône. On sait que la base du cône doit être moyenne proportionnelle entre les bases du tronc de cône.

699. — L'arête Aa d'un tronc de cône a 4^m, les rayons des bases ont 2^m et 3^m. Calculer la longueur aa' à prendre sur aA pour qu'un plan parallèle aux bases divise le volume en deux parties équivalentes.

700. — L'arête Aa d'un tronc de cône a 4^m, les rayons des bases ont 2^m et 3^m. Calculer à 0,01 près les longueurs à prendre sur aA pour que des plans parallèles aux bases divisent son volume en quatre parties proportionnelles à 2, 3, 4 et 5.

701. — Le côté Aa d'un tronc de cône a 4^m, les rayons des bases ont 2^m et 3^m. On veut détacher de la partie supérieure de ce tronc un autre tronc de cône d'un volume égal à 2^{mc}. Quelle sera la longueur à prendre à partir du point a ?

702. — Établir la proposition suivante : Lorsque le côté d'un tronc de cône égale la somme des rayons des bases : 1° la moyenne géométrique entre ces rayons donne toujours la moitié de la hauteur ; 2° on obtient le volume en multipliant la surface totale par le $\frac{1}{6}$ de la hauteur.

703. — Les rayons des deux bases d'un tronc de cône sont $3^m,50$ et $7^m,30$, et la hauteur du tronc 2^m. On demande la surface et le volume du cône entier.

704. — Dans une sphère de 2^m de rayon, on mène une section à $0^m,40$ du centre de la sphère. Trouver la surface de la section.

705. — Dans une sphère de 2^m de rayon, on a mené une section dont la surface est égale à 3^{mq}. A quelle distance du centre cette section a-t-elle été menée.

706. — 1° Les tangentes menées à une sphère et partant d'un point extérieur A sont égales entre elles ; 2° le lieu de ces tangentes est un cône de révolution ; 3° le lieu de leurs points de contact est une circonférence située dans un plan perpendiculaire au diamètre passant par le point A.

707. — Les pôles P, P' d'un cercle sont à 3^m et à 4^m de la circonférence de ce cercle ; PP' $= 5^m$. Calculer la surface du cercle à 0,01 près.

708. — Mener par une droite donnée un plan tangent à une sphère.

709. — On demande la surface d'un fuseau dont l'angle a 28° et la surface de la sphère à laquelle il appartient 4^{mq}.

710. — Un fuseau a une surface de 1^{mq}. On demande son angle, sachant qu'il appartient à une sphère dont la surface est de $4^{mq},50$.

711. — Dans un triangle sphérique on a A $= 58°12'$, B $= 60°20'$, C $= 72°22'$. Le rayon de la sphère ou R $= 0^m,40$. Calculer à 0,0001 près la surface du triangle.

712. — Calculer à $0^m,01$ près la surface engendrée par une ligne AB tournant autour d'un axe mené dans son plan : on a AB $= 5^m$; la distance du point A à l'axe ou Aa $= 3^m$, la distance du point B à l'axe ou Bb $= 4^m$.

713. — Calculer la surface engendrée par un triangle équilatéral tournant autour de son côté a.

714. — Soit ABCD un rectangle : dans le plan de ce rectangle on trace une droite MN parallèle au côté AB et en dehors du rectangle ; puis on suppose que le rectangle fasse une révolution autour de MN. Démontrer que le volume engendré par le rectangle est égal à la surface de ce rectangle multiplié par la circonférence décrite par le point d'intersection O des deux diagonales.

715. — La moitié ABCD d'un hexagone régulier dont le côté égale 2^m tourne autour de son diamètre AD. On demande de calculer à 0,01 près la surface décrite par cette moitié d'hexagone.

716. — Calculer la surface d'une zone ayant $0^m,80$ de hauteur et appartenant à une sphère de 1^m de rayon.

717. — Une zone a $1^{mq},20$ de surface et une hauteur de $0^{m},50$. Calculer à 0,01 près le rayon de la sphère à laquelle cette zone appartient.

718. — Dans une sphère de 1^{m} de rayon, une zone a $0^{mq},60$ de surface. Calculer sa hauteur.

719. — Trouver dans la sphère la hauteur d'une zone dont la surface égale celle d'un grand cercle.

720. — Dans une sphère de 2^{m} de rayon, une calotte sphérique a $0^{mq},80$ de surface. On demande la surface de sa base.

721. — Calculer la surface de la terre en kilomètres carrés : on la supposera sphérique et le mètre égal à la dix millionième partie du quart de la circonférence d'un grand cercle.

722. — La surface d'une sphère est égale à 4^{mq}. Trouver sa circonférence.

723. — Trouver le rayon d'une sphère dont la surface est moyenne proportionnelle entre les surfaces latérales d'un cylindre et d'un cône ayant 2^{m} de hauteur, et pour base commune un cercle de 1^{m} de rayon.

724. — Diviser une sphère en deux zones, telles que la surface de la plus grande soit moyenne proportionnelle entre la surface de la sphère entière et la surface de la plus petite. (*Application*, $R = 1$.)

725. — Si l'on double le rayon d'une sphère, que deviendra la surface de la sphère?

726. — Une sphère a 1^{m} de rayon. Quel sera le rayon d'une sphère dont la surface doit être double de la surface de la première?

727. — Un triangle équilatéral, dont le côté est a, tourne autour d'une parallèle à sa base passant par son sommet. Quel est le volume engendré par ce triangle?

728. — Un triangle isocèle ABC tourne autour d'une droite fixe parallèle à sa base BC, et passant par son sommet A. On demande le volume engendré, sachant que $BC = 3^{m}$ et $AB = 4^{m}$.

729. — Calculer le volume engendré par un triangle dont les côtés ont respectivement 2^{m}, 3^{m}, 4^{m}, et qui tourne autour du côté de 4^{m}.

730. — Soit ABC un triangle équilatéral dont le côté égale a; on prolonge la base BC d'une quantité CD égale à a. On élève la perpendiculaire DE, puis on suppose que le triangle fait une révolution autour de l'axe DE. On demande de trouver l'expression du volume ainsi engendré.

731. — Dans une sphère de 1^{m} de rayon, une zone servant de base à un secteur a 1^{mq} de surface. Calculer le volume du secteur.

732. — Dans une sphère de 1^{m} de rayon, la zone qui sert de base à un secteur a $0^{m},40$ de hauteur. Calculer le volume du secteur.

733. — Un secteur, dans une sphère de 2^{m} de rayon, a un volume de $0^{mc},480$. Calculer à 0,01 près la surface de la zone qui sert de base au secteur.

734. — Une sphère a 2^{m} de rayon. Trouver son volume.

735. — Trouver le volume d'une sphère en fonction de la circonférence d'un grand cercle.

736. — Trouver le rayon d'une sphère dont le volume égale $0^{mc},420$.

737. — Un secteur a un volume de $0^{mc},620$, la surface de la zone qui lui sert de base a 1^{mq}. Calculer le volume de la sphère à laquelle ce secteur appartient.

738. — Calculer le rayon d'une sphère dont le volume soit égal au volume d'un secteur appartenant à une sphère de 1^{m} de rayon, et ayant pour base une zone dont la surface soit $0^{mq},80$.

739. — Une sphère a 1^m de rayon. Quel sera le rayon d'une sphère cinq fois moindre en volume?

740. — Une sphère a 1^m de rayon. Quelle sera la surface d'une sphère d'un volume quatre fois moindre?

741. — Dans une sphère, une section menée à $0^m,20$ du centre a $0^{mq},80$ de surface. On demande le volume de la sphère.

742. — Une sphère a un volume égal à 1^{mc} : quelle sera la surface d'une section menée à $0^m,30$ du centre?

743. — Un arc de grand cercle de 44° a $0^m,20$. Quel est le volume de la sphère?

744. — On demande le volume d'un onglet dont l'angle a 30°, et le volume de la sphère à laquelle il appartient 2^{mc}.

745. — Un onglet a un volume de 1^{mc}. On demande son angle, sachant qu'il appartient à une sphère dont le volume est de $4^{mc},800$.

746. — On donne une sphère de cuivre de $0^m,18$ de rayon, creuse, et contenant une sphère de platine de $0^m,05$ de rayon, de telle sorte qu'il n'y ait aucun vide entre les deux sphères. Quel est le poids de la masse ainsi formée, sachant que la densité du platine est 21,15 et celle du cuivre 8,85?

747. — AB est le diamètre d'un demi-cercle qui a son centre en C; sur chacun des rayons AC, BC on décrit un demi-cercle. On demande le volume décrit par la surface comprise entre les demi-cercles lorsque la figure accomplit une révolution entière autour de AB.

748. — La différence des rayons de deux sphères est $1^m,75$, et la différence de leurs volumes est 47^{mc}. Calculer chacun des rayons à 0,01 près.

749. — Par un point S, pris sur le prolongement du diamètre d'un cercle, on mène une tangente SA et l'on fait tourner le cercle autour de son diamètre; la circonférence décrit une sphère, et la tangente SA décrit un cône dont la base est le cercle décrit par la perpendiculaire AP au diamètre. On demande de déterminer le volume et la surface du cône. On suppose que le rayon OA $= 0^m,035$ et la ligne OS $= 0^m,125$.

750. — Étant donnée une sphère de rayon R, on veut construire un cône droit qui ait même volume que la sphère et dont la hauteur ne soit que la moitié du rayon de la sphère. Quelle devra être la base?

751. — Le volume d'un tronc de cône est équivalent à celui d'une sphère de 5^m de rayon; la hauteur du tronc égale 8^m, le rayon de l'une des bases est 7^m. Calculer le rayon de l'autre base.

752. — Un vase cylindrique vertical, dont le fond est un cercle de $0^m,05$ de rayon intérieur, est en partie rempli d'eau à 4° pesant 4^{kg}. On y plonge une sphère de $0^m,03$ de rayon, et il arrive que l'eau monte exactement jusqu'au bord du vase. Quelle est la hauteur de ce vase cylindrique?

753. — Une sphère, un cylindre et un cône droit ont même volume; de plus, la sphère, la base du cylindre et la base du cône ont des diamètres égaux entre eux et à $0^m,3$. On demande la hauteur du cylindre et du cône.

754. — Trouver le rayon d'une sphère dont le volume est moyen proportionnel entre les volumes d'un cylindre et d'un cône ayant 2^m de hauteur et pour base commune un cercle de 1^m de rayon.

755. — Un cylindre est circonscrit à une sphère. Trouver les rapports de la surface et du volume de la sphère à la surface totale et au volume du cylindre.

756. — Trouver le rapport de la surface et du volume de la sphère à la surface totale et au volume du cône équilatéral circonscrit.

757. — Une sphère est circonscrite à un cube. Trouver le volume du cube en fonction du rayon de la sphère.

758. — Un cube en cuivre pèse $1^{kg},736$, on le met sur un tour pour en former une sphère dont le diamètre soit les 3/4 de la longueur de l'arête de ce cube. On demande le poids de la tournure de cuivre obtenu, la densité du cuivre étant 8,78.

759. — Trouver le rapport de la surface et du volume de la sphère, à la surface et au volume du cube inscrit et circonscrit.

760. — L'arête d'un cube est $0^m,35$. On demande le volume de la sphère circonscrite.

761. — Si l'on double le rayon d'une sphère, que devient son volume ?

762. — Deux sphères ont pour rayons 2^m et $0^m,20$. Trouver une sphère équivalente en volume à ces deux sphères.

763. — Les rayons de la terre, de la lune et du soleil sont proportionnels aux nombres $1, \frac{3}{11}$ et 112. Si l'on prend le volume de la terre pour unité, quels seront les volumes de la lune et du soleil ?

764. — Calculer le volume engendré par le segment circulaire AMB qui tourne autour de son diamètre xy : la corde AB du segment $= 2^m$, et la projection CD de cette corde sur l'axe $= 1^m,80$.

765. — Calculer le volume engendré par le segment circulaire AMB tournant autour du diamètre xy : la corde AB de ce segment $= 2^m$, la distance du point A à l'axe ou AC $= 3^m$, la distance du point B à l'axe ou BD $= 2^m$.

766. — Le volume engendré par le segment AMB a 2^{mc}, la projection de la corde de ce segment ou CD$=1^m$. Calculer la corde AB.

767. — Le volume engendré par le segment circulaire AMB$=0^{mc},829$, la corde AB de ce segment a $1^m,20$. Calculer la projection CD de cette corde sur l'axe.

768. — On a pour un segment sphérique $R = 2^m$, $r = 1^m$ et $h = 1^m$. Calculer le volume de ce segment.

769. — Trouver le volume d'un segment sphérique à une base : la hauteur de ce segment a $1^m,20$ et le rayon de sa base 1^m.

770. — Un cône est circonscrit à deux sphères de rayon R et r tangentes extérieurement. On demande le volume de l'espace compris entre les 3 surfaces.

771. — Une caisse a $1^m,20$ de longueur sur $0^m,40$ de largeur et $0^m,30$ de profondeur; on y place une statue : pour achever de remplir la caisse, il faut encore ajouter 64^l de sable. On demande le volume de la statue.

LIVRE VIII

SECTIONS CONIQUES ET HÉLICE

CHAPITRE PREMIER

Définition de l'ellipse par la propriété des foyers. — Tracé de la courbe par points et d'un mouvement continu. — Axes. — Sommets. — Cercles directeurs. — Intersection d'une droite et d'une ellipse.

§ Ier. — ELLIPSE ; TRACÉ DE LA COURBE

Définitions.

830. — On appelle *ellipse* le lieu des points d'un plan tels que la *somme* des distances de chacun d'eux à deux points fixes de ce plan soit constante.

Les deux points fixes F et F′ sont les *foyers* de l'ellipse.

La distance FF′ des foyers, qu'on représente par $2c$, est appelée *distance focale*.

Les distances MF, MF′ d'un point M de l'ellipse à ses foyers sont les *rayons vecteurs* de ce point ; on représente par $2a$ leur somme constante. Comme on désigne généralement par r et r' les rayons vecteurs MF et MF′, on a : $r + r' = 2a$.

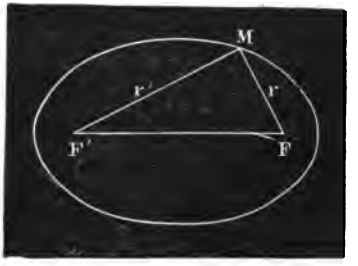


FIG. 523.

PROBLÈME

831. — *Tracer une ellipse par points, connaissant les foyers et la somme constante* 2a.

Soient F, F′ les foyers donnés. Sur une droite indéfinie passant par les foyers F et F′, on porte, à partir du point O, milieu de FF′, les longueurs OA, OA′ égales à a; on a ainsi deux points A, A′ qui appartiennent l'un et l'autre à l'ellipse ; car le point A donne :

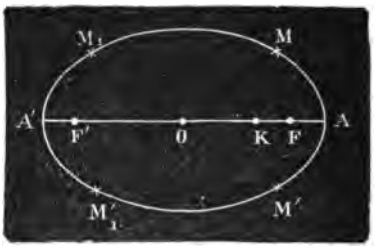


FIG. 524.

$$AF = OA - OF = a - c$$

et

$$AF' = OA + OF' = a + c,$$

d'où :

$$AF + AF' = 2a.$$

On verrait de même que :

$$A'F + A'F' = 2a.$$

Pour trouver d'autres points de l'ellipse, on partage AA′, par un point K quelconque, en deux segments *additifs* KA, KA′ ; puis des points F et F′, comme centres, avec les rayons respectifs KA et KA′, on décrit deux arcs qui se coupent en M et M′. Ces deux points appartiennent aussi à la courbe, car on a pour le point M :

$$FM + F'M = KA + KA' = 2a$$

et pour le point M′ :

$$FM' + F'M' = KA + KA' = 2a.$$

Pour que les deux arcs ayant pour centres F, F′ et pour rayons KA, KA′, se coupent, il faut et il suffit qu'on ait (215,3°), d'une part :

$$KA + KA' \text{ ou } 2a > FF' \text{ ou } 2a > 2c, \qquad (1)$$

et de l'autre :

$$KA' - KA < 2c. \qquad (2)$$

L'inégalité (1) est toujours vérifiée.

Si dans l'inégalité (2) on remplace KA′ par sa valeur $2a - KA$, il vient :

$$2a - 2KA < 2c \text{ ou } KA > a - c \text{ ou encore } KA > AF.$$

Si dans la même égalité (2), c'est KA qu'on remplace par sa valeur $2a - KA'$, on a :

$$KA' - 2a + KA' < 2c \text{ ou } KA' < a + c \text{ ou encore } KA' < FA'.$$

D'après ces résultats, il faut et il suffit, pour que les arcs se coupent, que le point K se trouve entre F et F′. D'autre part, on voit, d'après ces mêmes inégalités, que la valeur minimum du rayon vecteur de l'ellipse est $a - c$ et que sa valeur maximum est $a + c$.

Le point K pouvant varier à volonté, on obtiendra autant de points de l'ellipse qu'on voudra. Ces points liés par un trait continu figureront la courbe d'autant mieux qu'ils seront plus rapprochés.

D'ailleurs, les mêmes ouvertures de compas donnent quatre points de l'ellipse; car, outre les deux points M et M′, on en obtiendra deux autres, M_1 et M'_1, en échangeant les centres.

PROBLÈME

832. — *Tracer une ellipse d'un mouvement continu, connaissant les foyers et la somme constante* 2a.

Fixons aux foyers F, F′ un fil inextensible dont la longueur soit égale à $2a$; puis faisons glisser le long de ce fil un style qui le tienne toujours tendu ; l'extrémité du style décrira une ellipse; car, dans toutes les positions du style, la somme des distances MF, MF′ est égale à la longueur du fil et par conséquent à $2a$.

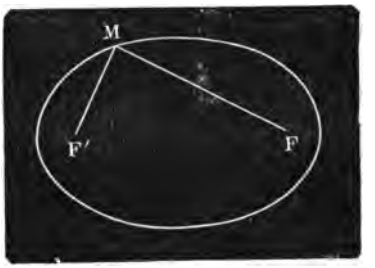


FIG. 525.

Corollaire. — *L'ellipse est une courbe fermée.*

§ II. — AXES. — SOMMETS

THÉORÈME

833. — *L'ellipse a deux axes de symétrie :* 1° *la droite* AA′ *passant par les foyers* F, F′; 2° *la perpendiculaire* BB′ *au milieu* O *de* FF′.

1° AA′ est un axe de symétrie.

Soit M un point quelconque de la courbe. Prenons son symétrique M′ par rapport à AA′. Alors nous avons :

$$MF = M'F \text{ et } MF' = M'F',$$

d'où :

$$MF + MF' = M'F + M'F'.$$

FIG. 526.

Or, par hypothèse, M est un point de l'ellipse : donc M′ est également un point de la courbe.

2° BB′ est un axe de symétrie.

Soit M_1 symétrique de M par rapport à BB′. Les points F et F′ étant, par construction, symétriques par rapport à BB′, nous avons :

$$MF = M_1F' \text{ et } MF' = M_1F,$$

d'où :

$$MF + MF = M_1F' + M_1F.$$

Or, par hypothèse, M est un point de l'ellipse : donc M_1 est également un point de la courbe.

834. Corollaire I. — *Le point de rencontre* O *des deux axes partage en deux parties égales toute corde qui le contient.*

En effet, joignons le point O à un point quelconque M de la courbe et prolongeons MO d'une quantité OM′ = OM. Le quadrilatère MFM′F′, dont les diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales, est un parallélogramme qui donne :

$$MF + MF' = M'F + M'F'.$$

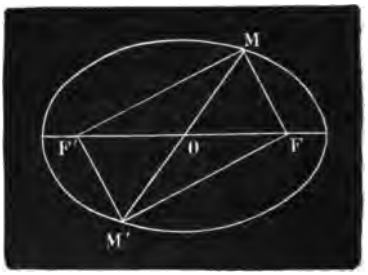


FIG. 527.

Le point M′ appartient donc à l'ellipse, et la corde MM′ est coupée au point O en deux parties égales : MM′ étant quelconque, la proposition est démontrée.

Le point O est le *centre* de la courbe. Toute corde passant par le centre, telle que MOM′, est un *diamètre*.

835. Corollaire II. — *L'axe passant par les foyers est le plus grand des deux axes de l'ellipse* (fig. 528).

Car le triangle rectangle BOF donne évidemment :

$$BF > OB,$$

d'où 2BF ou AA′ > 2OB ou BB′

D'ailleurs, comme on fait généralement 2OB ou BB′ = 2*b*, le même triangle-rectangle BOF donne :

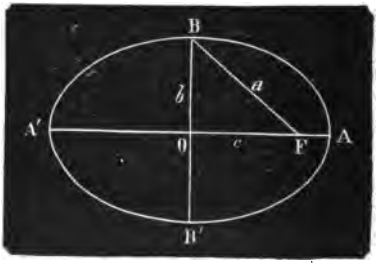


FIG 528.

$a^2 = b^2 + c^2$ et, par suite, $b^2 = a^2 - c^2$ d'où 2OB = 2*b* = $2\sqrt{a^2 - c^2}$

836. — Les propriétés des axes, AA′ et BB′, ont fait donner au premier le nom de *grand axe* ou *axe focal* et au second le nom de *petit axe*.

Les extrémités A, A′, B, B′ des deux axes sont les *sommets* de l'ellipse.

837. — On a évidemment : $2c < 2a$ ou $\frac{c}{a} < 1$;

Ce rapport qu'on représente généralement par *e* se nomme

excentricité de l'ellipse. Il peut varier de 0 à 1. S'il est nul, les foyers se confondent avec le point O et alors l'ellipse n'est plus qu'un cercle; s'il est voisin de zéro, les foyers sont très rapprochés du point O et la forme de l'ellipse diffère peu de celle du cercle ; mais, à mesure que le rapport se rapproche de l'unité, les foyers s'éloignent du centre O et alors les ellipses deviennent de plus en plus allongées.

§ III. — CERCLES DIRECTEURS

838. Définition. — On appelle *cercles directeurs* de l'ellipse deux cercles décrits de chacun des foyers comme centres avec $2a$ pour rayon. Il est évident que l'ellipse est enveloppée entièrement par chacun de ces cercles.

THÉORÈME

839. — *L'ellipse est le lieu des points équidistants de l'un des foyers et du cercle directeur ayant l'autre foyer pour centre.*

Soit M un point équidistant du foyer F et du cercle directeur ayant F′ pour centre. Traçons le rayon F′MN et tirons la droite NF. Nous avons, par hypothèse,

$$MF = MN,$$

ou, en ajoutant de part et d'autre MF′,

$$MF' + MF = MF' + MN = 2a.$$

Le point M appartient donc à l'ellipse.

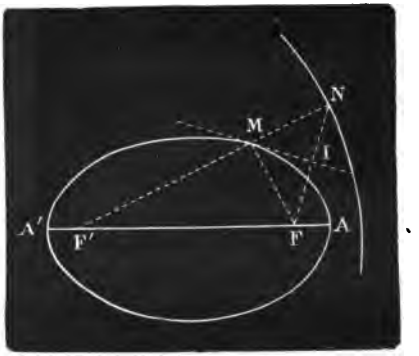


FIG. 529.

Réciproquement, tout point M de l'ellipse est équidistant du foyer F et du cercle directeur, car nous avons, par hypothèse,

$$MF' + MN = 2a = MF' + MF,$$

d'où, en retranchant MF′ à chaque membre,

$$MN = MF.$$

840. Corollaire. — *Le lieu des points du plan d'un cercle équidistants de ce cercle et d'un point intérieur est une ellipse qui a pour foyers le centre du cercle et le point donné, et dont le grand axe est égal au rayon de ce cercle.*

841. Remarque. — Le théorème qui vient d'être démontré fournit une autre méthode facile de construire une ellipse dans le cas où l'on connaît les foyers F, F′ et le grand axe $2a$.

On décrit le cercle directeur ayant, par exemple, le foyer F′ pour centre; puis, on mène, de l'autre foyer F, une droite quelconque FN jusqu'à la rencontre du cercle directeur; enfin au milieu I de FN on élève une perpendiculaire qui rencontre F′N en un point M appartenant à l'ellipse, car MN = MF. Il y a un point de la courbe et un seul sur chaque rayon partant du point F′; on déterminera ce point de la même manière qu'on a déterminé le point M.

THÉORÈME

842. — *La somme des distances d'un point du plan d'une ellipse aux deux foyers de cette ellipse est supérieure ou inférieure à son grand axe, selon que le point est extérieur ou intérieur à la courbe.*

1° Soit le point P extérieur à l'ellipse.

Si l'on mène les droites PF, PF′ et le rayon vecteur MF, on a, dans le triangle FMP,

$$MP + PF > MF.$$

En ajoutant MF′ à chaque membre de cette inégalité, il vient :

$$MF' + MP + PF > MF' + MF,$$

ou

$$PF' + PF > 2a.$$

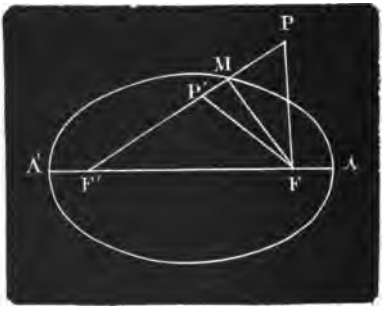


FIG. 530.

2° Soit le point P′ intérieur à l'ellipse.

Si l'on mène la droite F′P′M et le rayon vecteur MF, le triangle MFP′ donne :

$$PF' < MP' + MF;$$

en ajoutant P′F′ de part et d'autre, il vient :

$$P'F' + P'F < P'F' + MP' + MF,$$

ou $$P'F' + P'F < MF' + MF,$$

ou enfin $$P'F' + P'F < 2a.$$

843. Corollaire. — *Un point est à l'intérieur ou à l'extérieur de l'ellipse, suivant que la somme de ses distances aux deux foyers est inférieure ou supérieure à* 2a.

Démonstration très facile.

§ IV. — INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UNE ELLIPSE

PROBLÈME

844. — *Trouver les points communs à une droite et à une ellipse dont on connaît les foyers et la longueur du grand axe.*

Soient CD la droite, F, F′ les foyers de l'ellipse et M un point commun à la droite CD et à l'ellipse. Avec l'axe donné $2a$, traçons le cercle directeur du centre F′ et joignons le point M aux deux foyers, puis prolongeons le rayon F′M jusqu'à sa rencontre en N avec le cercle directeur. Nous avons MN = MF; et si nous prenons le symétrique G de F par rapport à CD, nous aurons aussi MG = MF = MN. Par suite, le point M est le centre d'un cercle passant par les trois points F, N, G. D'ailleurs ce cercle est tangent en N au cercle directeur, puisque ce point N est sur le prolongement de F′M.

Il résulte de là que tout point M, commun à CD et à l'ellipse, est le centre d'un cercle passant par les deux points connus F et G.

Pour résoudre le problème, nous décrirons donc une circonférence quelconque passant en F et en G et coupant le cercle directeur; la corde commune à cette circonférence et au cercle directeur ira rencontrer FG en un point E (383). De ce point, nous tracerons les tangentes EN et EN′ au cercle directeur. Les rayons F′N et F′N′ rencontreront la droite CD aux points M et M′ qui seront les seuls points communs à la droite et à l'ellipse.

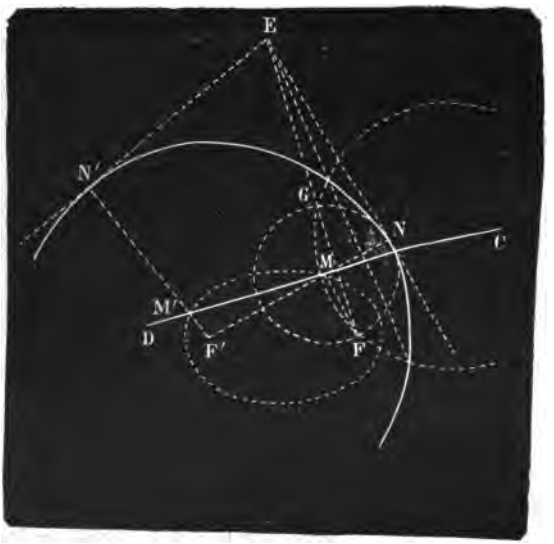


FIG. 531.

Le foyer F étant intérieur au cercle directeur, la droite CD rencontrera l'ellipse en deux points distincts, en un seul ou ne la rencontrera pas, selon que le point G se trouve à l'intérieur du cercle directeur, sur ce cercle ou extérieur à ce cercle (383).

845. Définition. — On appelle *courbe convexe* une courbe plane qui ne peut être rencontrée par une droite en plus de deux points. Il résulte de cette définition que l'ellipse est une courbe convexe.

CHAPITRE II

Tangente. — Normale. — Mener à une ellipse une tangente : 1° par un point donné; 2° parallèlement à une droite donnée. — Propriétés des tangentes à l'ellipse.

§ I. — TANGENTE. — NORMALE

Définitions.

846. — On appelle *tangente à une courbe* en un point la limite des positions d'une sécante qui tourne autour de ce point, jusqu'à ce qu'un second point de cette sécante vienne se confondre avec le premier.

Il résulte de cette définition qu'une sécante ABS devenue une tangente AT par rapport au point A, peut rester une sécante par rapport à d'autres points de la courbe.

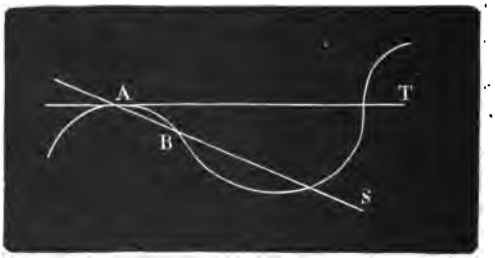


FIG. 532.

847. — On appelle *normale* à une courbe la perpendiculaire menée à une tangente au point de contact.

Ainsi (*fig.* 534), la perpendiculaire MN, menée à la tangente MT au point de contact M, est une normale.

THÉORÈME

848. — *La tangente à l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs du point de contact.*

Soient F, F′ les deux foyers de l'ellipse et MM′ une sécante quelconque laissant les foyers d'un même côté. Prenons le symétrique G du point F par rapport à MM′ et tirons GF′ qui rencontre MM′ en un point D, car les foyers et le point G sont de chaque côté de MM′. Menons DF et joignons le point M aux trois points G,F,F′. Nous avons :

$$MF = MG \text{ et } DG = DF;$$

par suite,

$$DF' + DF = F'G \text{ et } MF' + MG = MF' + MF = 2a ;$$

or, nous avons :

$$F'G < MF' + MG \text{ ou } F'G < 2a$$

et, par conséquent,

$$DF' + DF < 2a.$$

La somme des distances du point D aux foyers étant moindre que $2a$, il en résulte que ce point est à l'intérieur de l'ellipse (842). Il est donc entre M et M′ ; en outre, l'angle MDF est égal à l'angle M′DF′, car ces deux angles sont égaux, l'un et l'autre, à l'angle MDG.

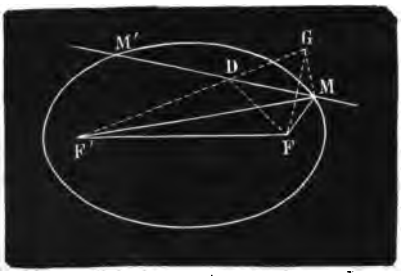


FIG. 533.

Si maintenant nous supposons que la sécante MM′ tourne autour du point M jusqu'à ce que le point M′ vienne se confondre avec lui, le point D, toujours situé entre M et M′, viendra aussi se confondre avec M. D'ailleurs, les rayons vecteurs du point D feront constamment deux angles égaux avec MM′, donc à la limite, c'est-à-dire lorsque la sécante MM′ sera devenue une tangente, ces deux angles seront encore égaux. C. q. f. d.

849. Corollaire I. — *La tangente* TT′ (*fig.* 534) *au point* M *est bissectrice de l'angle* FMG *formé par un des rayons vecteurs du point de contact et le prolongement de l'autre.*

850. Corollaire II. — *La normale* MN *à l'ellipse en un point* M *est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs de ce point.*

En effet, MN étant perpendiculaire à TT′, les angles FMN, F′MN sont égaux comme compléments des angles égaux FMT, F′MT′.

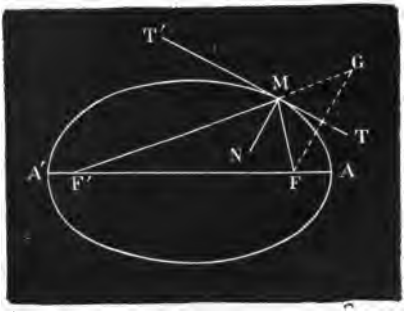


FIG. 534.

851. Corollaire III. — *Le symétrique* G *d'un foyer* F *par*

rapport à la tangente TT', *le point de contact* M *et l'autre foyer* F' *sont trois points en ligne droite.*

C'est une conséquence de l'égalité des angles GMT, F'MT' égaux, l'un et l'autre, au même angle FMT.

852. Corollaire IV. — *Le lieu du symétrique d'un foyer par rapport aux tangentes à l'ellipse est le cercle directeur ayant l'autre foyer pour centre.*

Car, pour le symétrique G, par exemple, on a MF = MG et, par suite,

$$F'M + MG = 2a.$$

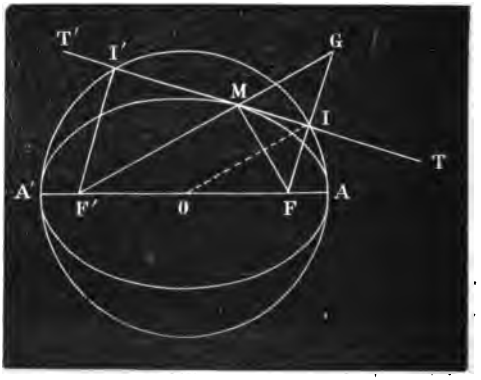


FIG. 535.

853. Corollaire V. — *Le lieu des projections des foyers d'une ellipse sur les tangentes est le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre* (fig. 535).

Soit I la projection du foyer F sur la tangente TT' en un point quelconque M de l'ellipse ayant AA' = F'G pour grand axe. Dans le triangle FGF', le point I est le milieu de FG et le point O le milieu de FF',

donc $OI = \frac{F'G}{2} = a.$

Le cercle qui a pour rayon a est le *cercle principal.*

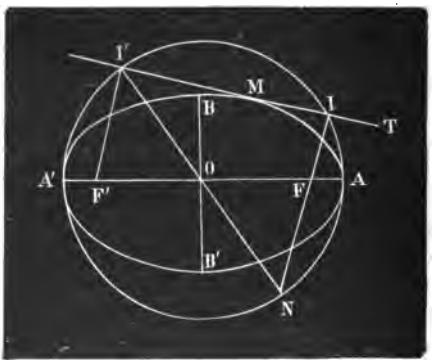


FIG. 536.

THÉORÈME

854. — *Le produit des distances des foyers à une tangente est constant pour la même ellipse et égal à* b^2.

En effet, soient I et I' les projections des foyers sur la tangente MT, ces points sont sur le cercle principal (853). Soit N le point de rencontre du prolongement de IF avec ce cercle. A cause de l'angle droit inscrit en I, la droite I'N est un diamètre ; par suite, les triangles OFN et OF'I'

sont égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun. Donc F'I' = FN, et alors on a :

$$IF \times FN = IF \times F'I'.$$

Mais quelle que soit la direction de IFN, la droite AA' étant le diamètre du cercle principal, on a toujours (353) :

$$IF \times FN = IF \times F'I' = FA \times FA' = (a-c)(a+c) = a^2 - c^2 = b^2.$$

§ II. — CONSTRUCTION DE LA TANGENTE A L'ELLIPSE. — PROPRIÉTÉS DES TANGENTES A CETTE COURBE

PROBLÈME

855. — *Mener à une ellipse une tangente par un point donné.*

1° Le point donné M est sur l'ellipse. On joint le point M aux deux foyers et l'on mène la bissectrice MI de l'angle FMG formé par l'un des rayons vecteurs MF et le prolongement MG de l'autre. La droite MI est la tangente demandée (849) ;

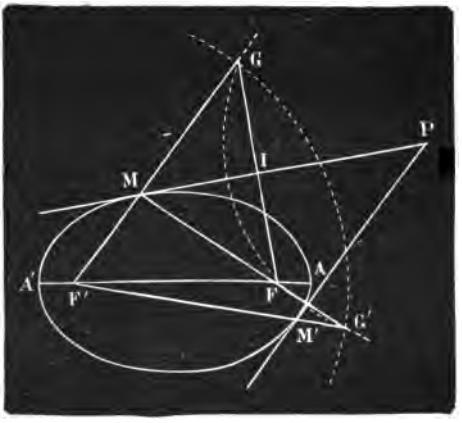


FIG. 537.

2° Le point donné P est un point quelconque du plan de l'ellipse dont les foyers sont F, F' et le grand axe $2a$. Supposons le problème résolu et soit PM la tangente demandée. Il est évident que si l'on connaissait le symétrique G du foyer F par rapport à cette tangente, on pourrait la construire. Or, le point G est sur le cercle directeur de centre F' ; mais il est aussi sur le cercle décrit du point P avec PF pour rayon. Donc le point G est donné pour l'intersection de ces deux cercles. Ce point étant déterminé, la tangente elle-même est déterminée; car, à cause de la position de G, c'est la perpendiculaire menée du point P au milieu de FG. Le point de contact M est d'ailleurs à la rencontre de la tangente avec F'G.

Discussion. — Les deux cercles pouvant se couper en deux points G et G', on peut généralement mener du point P deux tangentes

PM et PM'. Pour qu'on ait les deux points communs G et G', il faut et il suffit qu'on puisse former le triangle F'PG. Or, pour que ce triangle existe, ses trois côtés étant PF', PG = PF et F'G = $2a$, il faut et il suffit que ces longueurs satisfassent aux trois conditions suivantes :

$$PF' < PF + 2a \text{ (1)}, \quad PF < PF' + 2a \text{ (2)}, \quad 2a < PF + PF' \text{ (3)}.$$

Or (55), on a dans tous les cas, et quelle que soit la position du point P,

$$PF' \leq PF + 2c \text{ et } PF \leq PF' + 2c,$$

et comme on a $2a > 2c$, les inégalités (1) et (2) sont vraies *a fortiori*.

Il reste l'inégalité (3) qui demande pour exister que le point P ne soit pas situé à l'intérieur de la courbe. Lorsque le point P est sur la courbe, on a :

$$PF + PF' = 2a, \text{ d'où } PF' = 2a - PF.$$

La circonférence de centre P est alors tangente intérieurement au cercle directeur de centre F', et l'on ne peut plus mener par le point P qu'une tangente à l'ellipse.

Lorsque le point P est intérieur à la courbe on a :

$$PF + PF' < 2a, \text{ d'où } PF' < 2a - PF.$$

La circonférence de centre P est alors *intérieure* au cercle directeur et il n'y a plus de solution, ce qui est du reste évident.

En résumé, si le point donné est sur la courbe, le problème a une solution ; il en a deux, si le point lui est extérieur, et il n'en a aucune si le point lui est intérieur.

PROBLÈME

856. — *Mener à l'ellipse une tangente parallèle à une droite donnée* (fig. 538).

Supposons le problème résolu. Soient CD la droite donnée, MT la tangente demandée et M le point de contact. Il s'agit de trouver le point G, symétrique de F, par rapport à la tangente MT, car une fois ce point connu, on achèvera la construction comme au n° 855. Or le point G se trouve sur la perpendiculaire, menée du point F, à MT et par suite sur la perpendiculaire à CD, ce même point G se trouve aussi sur le cercle directeur de centre F' (852) : il est donc déterminé.

D'ailleurs, le point F étant intérieur par rapport au cercle directeur de centre F', la perpendiculaire menée de F à CD rencontrera toujours ce cercle en deux points G et G'. Le problème admet donc deux solutions, les tangentes MT et M'T'.

857. Corollaire. — *Les points de contact* M, M′ *des tangentes* MT, M′T′ *à l'ellipse, parallèles entre elles, sont symétriques par rapport au centre* O.

Cette proposition sera démontrée si nous prouvons que la figure MFM′F′ est un parallélogramme. Or, les triangles GF′G′, GMF et FM′G′ sont trois triangles isocèles; d'où il résulte que les trois angles G, MFG, G′ sont égaux, et MF est parallèle à F′G′; de même les angles MF′G′, FM′G′ sont égaux et MF′ est parallèle à FM′. La figure MFM′F′ est donc un parallélogramme et MM′ passe par le milieu O de FF′.

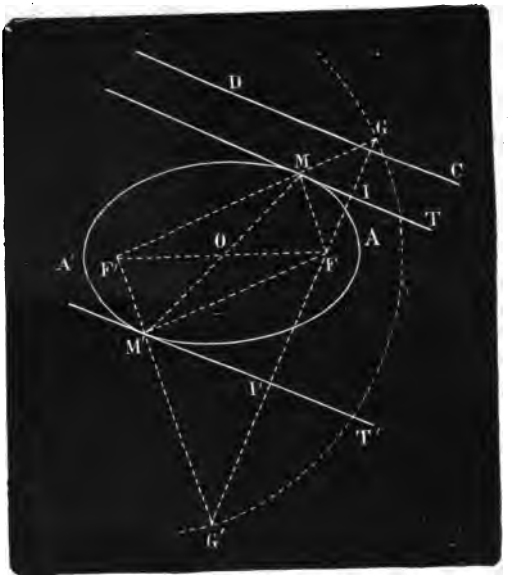


FIG. 538.

858. Remarque. — On voit sans difficulté que les solutions des problèmes précédents (855 et 856) n'exigent pas que l'ellipse soit tracée, il suffit de connaître le grand axe et les foyers.

THÉORÈME DE PONCELET

859. — 1° *Les tangentes à l'ellipse, issues d'un même point, font des angles égaux avec les rayons vecteurs de ce point;* 2° *la droite qui va d'un foyer au point de concours de deux tangentes est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs qui vont de ce foyer aux points de contact des deux tangentes.*

1° Soient les deux tangentes PM, PM′ et les points G, G′ symétriques des foyers F, F′ par rapport à ces tangentes. Les droites F′G, FG′ passent par les points de contact M, M′ (851). D'autre part, on a dans les triangles F′PG et FPG′ :

$$PG = PF,\ PF' = PG' \text{ et } F'G = 2a = FG' :$$

donc ces deux triangles sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun; par suite, les angles F′PG, FPG′ sont

égaux; or, si de chacun d'eux on retranche l'angle commun **3**, les deux restes FPG, F′PG′ sont encore égaux ainsi que leurs moitiés 1 et 1′;

2° Il faut prouver en second lieu que PF est bissectrice de l'angle MFM′. En effet, à cause de l'égalité des triangles déjà considérés, les angles 2 et 2″ sont égaux; mais 2 est égal à son symétrique 2′ par rapport à PM : donc les angles 2′ et 2″ sont égaux et PF est bissectrice de l'angle MFM′.

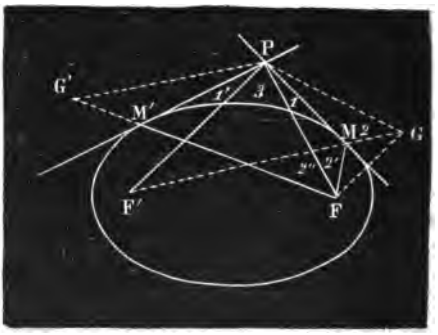


FIG. 539.

On prouverait de même que PF′ est bissectrice de l'angle MF′M′.

CHAPITRE III

Ellipse considérée comme projection du cercle; Problèmes simples sur les tangentes. Équation de l'ellipse rapportée à ses axes.

---

§ I. - PROJECTION DE L'ELLIPSE

THÉORÈME

860. — *La projection d'un cercle sur un plan est une ellipse.*

Soient un cercle donné O et AA′, $B_1B'_1$ deux de ses diamètres perpendiculaires l'un à l'autre.

Je dis que si l'on projette ce cercle sur un plan quelconque passant par le diamètre AA′, la projection ABA′B′ que l'on obtient est une ellipse.

Car, prenant sur AA′ les points F et F′ de manière que $OF = OF' = BB_1$, on a, pour un de ses points M, projection du point M_1, pris à volonté sur le cercle, une somme MF + MF′ égale à la quantité constante $AA' = 2a$. Pour le démontrer, on mène au diamètre $M_1M'_1$ la perpendiculaire FI qui le divise en deux parties IM_1, IM'_1, et alors on prouve que $MF = IM_1$ et $MF' = IM'_1$, d'où résulte l'égalité :

$$MF + MF' = IM_1 + IM'_1 = M_1M'_1 = AA' = 2a.$$

En effet, si l'on mène M_1P perpendiculaire à AA′, la projection MP de M_1P est aussi perpendiculaire à AA′. Or les triangles rectangles MPM_1 et OBB_1, semblables comme ayant leurs côtés respectivement parallèles, donnent :

$$\frac{MM_1}{BB_1} = \frac{PM_1}{OB_1} = \frac{PM}{OB}, \text{ d'où } \frac{PM}{PM_1} = \frac{OB}{OB_1}. \qquad (1)$$

D'autre part, les triangles rectangles OFI et OPM_1, semblables comme ayant un angle aigu commun, donnent de leur côté :

$$\frac{FI}{OF} = \frac{PM_1}{OM_1}.$$

Mais comme $OM_1 = OB_1$, il en résulte que :

$$\frac{PM_1}{OM_1} = \frac{PM_1}{OB_1} = \frac{MM_1}{BB_1} = \frac{FI}{OF}.$$

Or, par construction, $OF = BB_1$, donc $MM_1 = FI$.

D'ailleurs, les deux triangles rectangles FMM_1 et FIM, ayant l'hypothénuse commune et un autre côté égal, $MM_1 = FI$, sont égaux : donc $MF = IM_1$. Dans le quadrilatère $M_1FM'_1F'$, les diagonales $FF', M_1M'_1$ se coupent mutuellement en parties égales, ce quadrilatère est donc un parallélogramme et l'on a $M_1F' = FM'_1$; par suite, les deux triangles rectangles $MF'M_1$. FIM'_1 ont les hypothénuses M_1F', FM'_1 égales et les côtés MM_1, FI égaux, donc ils sont égaux et $MF' = IM'_1$ d'où l'égalité cherchée :

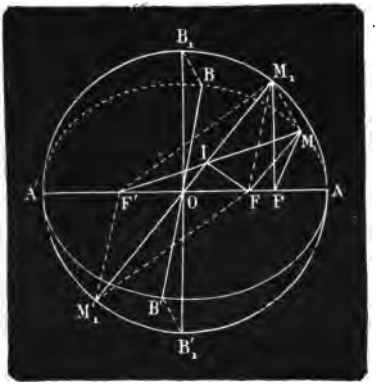


Fig. 540.

$$MF + MF' = IM_1 + IM'_1 = M_1M'_1 = AA' = 2a. \quad (1)$$

§ II. — Coordonnées d'un point. — Définitions.

Pour fixer la position d'un point M sur un plan, on mène par ce point des parallèles à deux droites *fixes* rectangulaires XX' YY' tracées sur ce plan. La distance OP est l'*abscisse* du point M, on la représente par x ; la distance MP ou OQ est l'*ordonnée du point* M, on la représente par y. Considérées simultanément, l'abcisse et l'ordonnée d'un point M sont les *coordonnées de ce point.*

Les deux droites fixes XX', YY' sont les axes des coordonnées. Le premier est l'*axe des x* et le second l'*axe des y*.

Le point O où se coupent les axes est pris pour *origine* des distances.

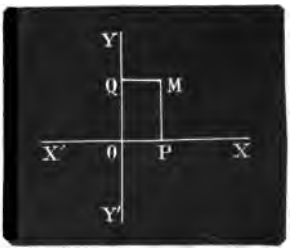


Fig. 541.

THÉORÈME

861. — *Les ordonnées correspondantes de l'ellipse et du cercle principal sont dans un rapport constant.*

En effet, si l'on fait tourner le plan du cercle principal pour le rabattre sur le plan de l'ellipse, les ordonnées correspondantes MP et M_1P, dans l'ellipse et dans le cercle, étant perpendiculaires au diamètre AA', prennent la même direction et l'on a encore la relation (1) du n° 860 :

$$\frac{PM}{PM_1} = \frac{OB}{OB_1} = \frac{b}{a}$$ qui est un rapport constant.

Remarque I. — Le rapport $\frac{b}{a}$ peut varier de 0 à 1. Le premier cas a lieu lorsque b devient nul, c'est-à-dire lorsque le cercle est perpendiculaire au plan de projection, car alors cette projection n'est plus qu'une droite ; le second

1. Démonstration d'après M. Courcelles.

cas a lieu quand $b = a$, c'est-à-dire lorsque le cercle est parallèle au plan de projection, car alors la projection du cercle est le cercle lui-même.

L'ellipse prend une forme différente dans toutes les autres positions du cercle par rapport au plan de projection.

Remarque II. — Le théorème précédent, permet de considérer l'ellipse comme la transformée de son cercle principal. On passe du cercle à l'ellipse en multipliant ses ordonnées par $\frac{b}{a}$; et de l'ellipse au cercle en multipliant ses ordonnées par $\frac{a}{b}$; cette transformation qui n'altère en rien les propriétés graphiques permet de résoudre divers problèmes relatifs à l'ellipse. — On *dilate* l'ellipse pour la transformer en son cercle principal ; on résout sur le cercle le problème donné, puis on revient à l'ellipse en *contractant* toutes les ordonnées.

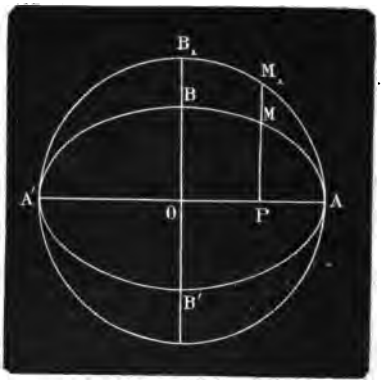


FIG. 542.

862. Problème I. — *Construire une ellipse par points, au moyen des cercles concentriques de rayon a et b.*

Il suffira de réduire dans le rapport $\frac{b}{a}$ chaque ordonnée PM du cercle principal (861).

Le rayon ON rencontre le petit cercle en N ; par ce point N menons la parallèle NM_1 au grand axe ; l'intersection avec MP donnera le point M_1. Le point M_1 est un point de l'ellipse car

$$\frac{M_1P}{MP} = \frac{b}{a} = \frac{ON}{OM}.$$

Par une construction analogue on obtient M'_1.

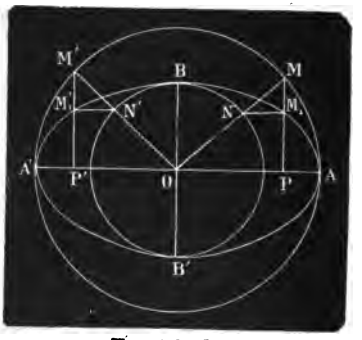


FIG. 542 *bis*.

863. Problème II. — A une ellipse donnée par ses axes $2a$ et $2b$, *mener une tangente qui passe par un point donné P* ou *parallèle à une droite donnée KL.*

1° Transformons l'ellipse AA'BB' en son cercle principal ADA'D'.

La droite PBC, vient en P_1DC.

Du point P_1 menons deux tangentes P_1G et P_1H au cercle principal. — Revenons du cercle à l'ellipse, nous aurons les tangentes demandées PG et PH.

2° La parallèle menée à KL par le point B rencontre AA' en I et se transforme en DI (fig. 543 *bis*).

Menons aux cercles des tangentes HM, GN parallèles à ID. — Leurs transformées HM_1, GN_1 parallèles à BI seront les tangentes parallèles demandées.

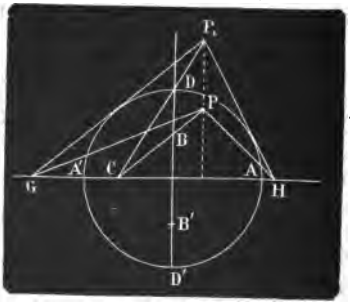


FIG. 543.

864. Problème III. — *Points d'intersection d'une ellipse et d'une droite* CM (fig. 543 *ter*).

Transformons l'ellipse AA'BB' en son cercle principal ADA'D'. Soit la droite CM, l'ordonnée de C est nulle, celle de M $= b$.

La droite CM se transforme en CM_1. Le point C reste en place, le point M_1 a pour ordonnée $b\,\frac{a}{b} = a$.

La droite CM_1 coupe le cercle principal en G et H. — Revenons du cercle à l'ellipse et de CM_1 à CM ; les points où la droite CM coupe l'ellipse sont G' et H' car

$$\frac{P'G'}{P'G} = \frac{P''H'}{P''H} = \frac{PM}{PM_1} = \frac{b}{a}.$$

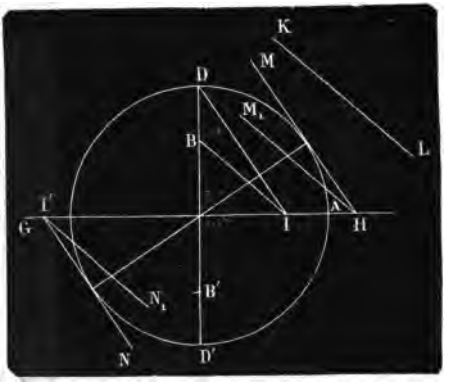


FIG. 543 *bis*.

865. Théorème. — *L'aire d'une ellipse est égale au produit de ses demi-axes par* π.

On sait que la projection d'une aire plane est égale au produit de cette aire par le cosinus de l'angle formé par son plan avec le plan de projection (577). Or si le cercle de rayon a se projette suivant une ellipe dont le demi-petit axe est b l'angle des deux plans est

$$\cos\alpha = \frac{b}{a}.$$

Donc l'aire de l'ellipse est

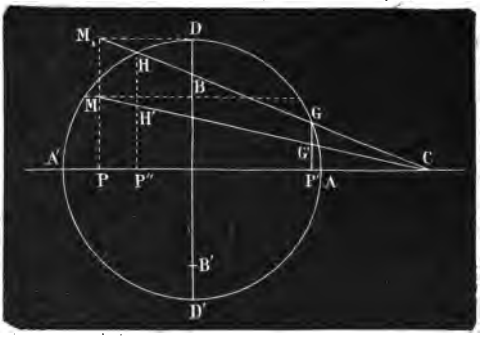


FIG. 543 *ter*.

$$\pi a^2 \times \cos\alpha = \pi a^2 \times \frac{b}{a} = \pi ab.$$

§ III. — ÉQUATION DE L'ELLIPSE

Définition. — On appelle *équation d'une ligne* la relation constante à laquelle satisfont les coordonnées d'un point quelconque de cette ligne.

THÉORÈME

866. — *Si l'on prend comme axes des coordonnées les axes de symétrie de l'ellipse, cette courbe a pour équation* :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Appelons x et y les coordonnées d'un point M de l'ellipse et prenons sur le cercle principal le point N correspondant du point M. Nous avons alors :

$$\frac{NP}{MP} = \frac{NP}{y} = \frac{a}{b}, \text{ d'où } \overline{NP}^2 = \frac{a^2y^2}{b^2}.$$

D'autre part, le triangle rectangle OPN donne :

$$\overline{NP}^2 = \overline{ON}^2 - \overline{OP}^2 = a^2 - x^2.$$

Remplaçant $\overline{NP}^2$ par sa valeur, il vient :

$$\frac{a^2y^2}{b^2} = a^2 - x^2,$$

d'où :

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Divisant les deux membres par a^2b^2, nous avons enfin l'équation cherchée :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

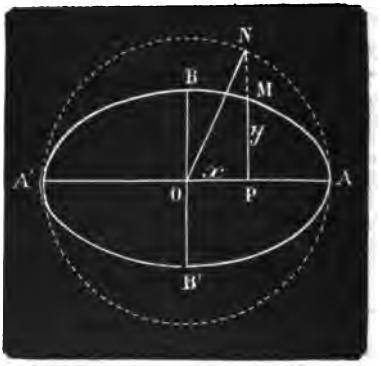


FIG. 544.

867. Remarque. Pour obtenir l'*équation du cercle*, il suffit de faire $a = b$ dans la relation (1), alors, on a :

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Comme il est facile de le voir, on trouve directement cette équation à l'aide du triangle rectangle ONP.

CHAPITRE IV

Définition de l'hyperbole par la propriété des foyers. — Tracé de la courbe par points et d'un mouvement continu. — Axes. — Sommets. — Cercles directeurs. — Intersection d'une droite et d'une hyperbole.

---

§ Ier. — HYPERBOLE; TRACÉ DE LA COURBE

Définitions.

868. — On appelle *hyperbole* le lieu des points d'un plan tels que la *différence* des distances de chacun d'eux à deux points fixes de ce plan soit constante.

Les deux points fixes F et F′ sont les *foyers* de l'hyperbole. La distance FF′ des foyers, qu'on représente par $2c$, est appelée *distance focale*.

Les distances MF, MF′ d'un point M de l'hyperbole à ses foyers sont les *rayons vecteurs* de ce point ; on représente par $2a$ leur différence constante. Comme on désigne généralement par r et r' les rayons vecteurs MF et MF′, on a : $r' - r = 2a$.

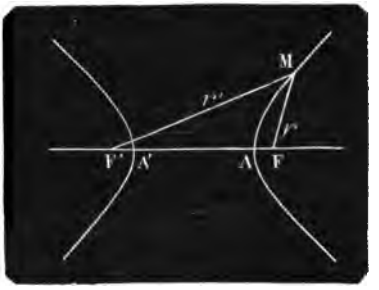


FIG. 545.

PROBLÈME

869. — *Tracer une hyperbole par points, connaissant les foyers et la différence constante* 2a.

Soient F, F′ les foyers donnés. Sur une droite indéfinie passant par les foyers F, F′, on porte, à partir du point O, milieu de FF′, les longueurs OA, OA′ égales à a; on a ainsi deux points A et A′ qui appartiennent l'un et l'autre à l'hyperbole ; car, par construction, les longueurs FA et F′A′ sont égales, d'où il résulte que la différence des rayons vecteurs du point A est :

$$AF' - AF = AF' - A'F' = AA' = 2a.$$

Donc le point A appartient à la courbe, il en est de même du point A′.

Pour trouver d'autres points de l'hyperbole, on partage la droite AA′ en deux segments *soustractifs*, par un point K pris sur le prolongement de OA ; puis des points F et F′, comme centres, avec les rayons respectifs KA et KA′, on décrit deux arcs qui se coupent en M et M′. Ces deux points appartiennent à la courbe, car on a pour le point M :

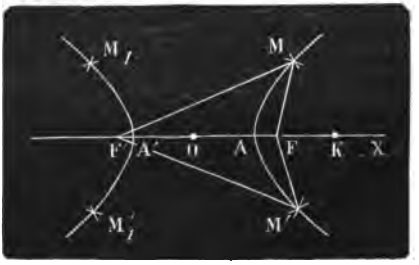


FIG. 546.

$$MF' - MF = KA' - KA = AA' = 2a,$$

et pour le point M′ :

$$M'F' - M'F = KA' - KA = AA' = 2a.$$

Pour que les deux arcs ayant pour centre F, F′ et pour rayons KA, KA′ se coupent, il faut et il suffit qu'on ait :

$$FF' < KA + KA' \text{ ou } 2c < KA + KA'. \qquad (1)$$

Si dans l'inégalité (1) on remplace KA′ par sa valeur $KA + 2a$, il vient :

$$2c < 2KA + 2a \text{ ou } KA > c - a \text{ ou encore } KA > FA.$$

Si dans la même inégalité (1) on remplace KA par sa valeur $KA' - 2a$, on a :

$$2c < 2KA' - 2a \text{ ou } KA' > a + c \text{ ou encore } KA' > FA'.$$

D'après ces résultats, il faut et il suffit, pour que les arcs se coupent, que le point K soit sur OF au-delà du point F. Si K et F coïncidaient, la distance des centres serait égale à la somme des rayons KA′, KA, et alors les arcs seraient tangents extérieurement au point A. D'autre part, on voit d'après ces mêmes inégalités que la valeur minimum du plus petit rayon vecteur de l'hyperbole est $c - a$ et que la valeur minimum du plus grand est $a + c$. Le premier de ces rayons peut donc varier de $c - a$ à l'infini et le second de $a + c$ à l'infini. Si l'on fait varier sur OX la position du point K, de F à l'infini, on aura autant de couples de points que l'on voudra de la branche infinie d'hyperbole passant en A.

Pour obtenir la branche passant en A′, il suffit d'échanger les centres en conservant les mêmes ouvertures de compas ; on détermine alors les points M_1, M'_1 et ainsi de suite pour d'autres points.

870. Remarque. — On voit que l'hyperbole partage le plan en trois régions : celle qui est située entre les deux branches est la *région extérieure*, celles qui sont situées dans la partie du plan renfermée par les branches portent chacune le nom de *région intérieure*.

PROBLÈME

871. — *Tracer une hyperbole d'un mouvement continu, connaissant les foyers et la somme constante* 2a.

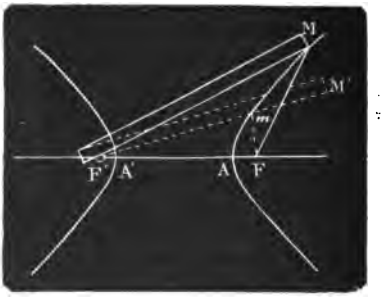


FIG. 547.

Soient F, F′ les deux foyers.

Disposons une règle F′M de manière qu'elle puisse tourner autour d'un pivot placé à l'un des foyers F′ ; fixons ensuite à l'extrémité M de la règle et au foyer F un fil MF d'une longueur telle qu'on ait $MF' - MF = 2a$. Il est évident que dans cette position de la règle le point M appartient à l'hyperbole. Faisons maintenant tourner la règle autour du

point F' en ayant soin de tenir le fil toujours bien tendu, à l'aide d'un style qui en appliquera une partie contre la règle. Il est facile de voir que le style décrira un arc d'hyperbole. Car soit F'M' la règle dans une nouvelle position quelconque et m la position correspondante de la pointe du style, on a $F'M = F'M'$, donc $F'M' - FM = 2a$; mais $F'M' = F'm + mM'$, et $FM = Fm + mM'$, par conséquent :

$$F'M' - FM = F'm + mM' - Fm - mM' = F'm - Fm = 2a.$$

Donc le point m appartient à l'hyperbole.

Ce procédé ne permet d'avoir qu'une portion de la courbe dans le voisinage des foyers.

§ II. — AXES. — SOMMETS

THÉORÈME

872. — *L'hyperbole a deux axes de symétrie : 1° la droite passant par les foyers* F,F' ; *2° la perpendiculaire* BB' (fig. 548) *au milieu* O *de* FF' ; *3° le point* O *de rencontre des deux axes est le centre de la courbe.*

Mêmes démonstrations que pour l'ellipse.

873. — Les propriétés des axes ont fait donner au premier FF' le nom d'*axe focal* ou *transverse;* le second, BB' n'ayant aucun point sur la courbe, porte le nom d'*axe non transverse* ou *imaginaire.*

Les points A et A' communs à la courbe et à l'axe transverse sont les *sommets* de l'hyperbole.

874. — Lorsque du sommet A ou A' comme centre, avec OF ou c pour rayon, on décrit un arc de cercle qui coupe l'axe non transverse en deux points B et B', la partie BB', ainsi déterminée, se représente par $2b$.

La *longueur* BB' est la longueur de l'axe non transverse. Alors, comme il est facile de le voir, les trois quantités a, b, c sont liées par la relation,

$$b^2 = c^2 - a^2 \text{ ou } c^2 = b^2 + a^2.$$

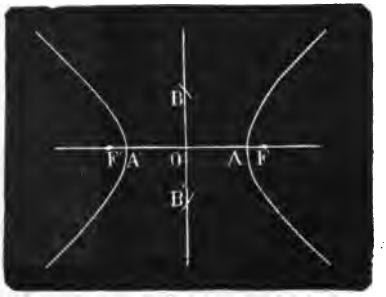


FIG. 548.

Si $a = b$, l'hyperbole est dite *équilatère.*

On a évidemment :

$$2a < 2c \text{ ou } \frac{c}{a} > 1.$$

Ce rapport qui peut varier de 1 à l'infini et qu'on représente encore par e est l'*excentricité* de l'hyperbole.

§ III. — CERCLES DIRECTEURS

875. Définition. — On appelle *cercles directeurs* de l'hyperbole deux cercles décrits de chacun des foyers comme centres avec $2a$ pour rayon. D'après cette définition, il est évident que chaque branche de l'hyperbole est extérieure au cercle directeur qui a pour centre le foyer de l'autre branche.

THÉORÈME

876. — *L'hyperbole est le lieu des points tels que la distance de chacun d'eux à l'un des foyers soit égale à l'une des normales menée de ce point au cercle directeur qui a l'autre foyer pour centre.*

Prenons d'abord un point quelconque M du plan, tel que la plus petite normale MN au cercle directeur de centre F′ soit égale à MF. Si nous retranchons ces droites égales de MF′, nous aurons :

$$MF' - MN = MF' - MF = 2a.$$

Donc le point M appartient à l'hyperbole qui a F,F′ pour foyers et $2a$ pour axe transverse.

Prenons en second lieu un point M′ du plan, tel que la plus grande normale M′N′ du cercle directeur soit égale à M′F. Si nous retranchons de ces droites égales M′F′, nous aurons :

$$M'N' - M'F' = M'F - M'F' = 2a.$$

Donc le point M′ appartient aussi à la même hyperbole.

Réciproquement, la distance de tout point de l'hyperbole au foyer F est égale à l'une des normales menées de ce point au cercle directeur de centre F′; car nous avons, par hypothèse, pour le point M :

$$F'N + MN - MF = 2a.$$

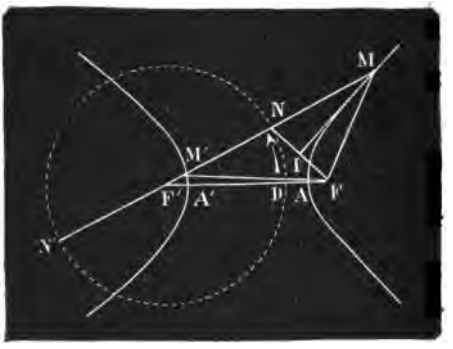


FIG. 549.

Mais $F'N = 2a$, donc aussi $MF = MN$.

Pour le point M′, nous avons de même :

$$M'F - M'F' = 2a = F'N',$$

d'où en ajoutant M′F′ à chaque membre

$$M'F = F'N' + M'F' = M'N'.$$

Il est, du reste, facile de voir que la distance d'un point de l'hyperbole à un foyer est égale à la plus grande ou à la plus petite des deux normales de ce point, suivant qu'il appartient à la branche voisine du foyer pris pour centre du cercle directeur ou à l'autre branche.

877. Corollaire. — *Chaque branche de l'hyperbole est le lieu des points de son plan équidistants du foyer voisin et du cercle directeur ayant l'autre foyer pour centre.*

878. Remarque. — Le théorème précédent fournit un nouveau procédé pour construire, par points, une hyperbole dont on connaît les deux foyers F,F′ et l'axe transverse $2a$ (*fig.* 549). On décrit le cercle directeur de foyer F′ et l'on mène un rayon quelconque F′N; puis au milieu I de la droite FN on élève une perpendiculaire qui en rencontrant F′N prolongé détermine le point M appartenant à la courbe, car on a :

$$MF' - MN = MF' - MF = 2a.$$

Si l'on suppose que le point N parte du point D et se déplace dans le sens indiqué par la flèche, en même temps, le point M part du point A et décrit la moitié supérieure de la branche de droite. Ce point M sera d'ailleurs à l'infini quand FN sera devenue une tangente; car alors le rayon F′N prolongé et la perpendiculaire au milieu de FN deviennent parallèles et leur point d'intersection se trouve à l'infini. Si le point N continue son mouvement, le point M décrit successivement les autres branches de la courbe.

THÉORÈME

879. — *La différence des distances d'un point du plan d'une hyperbole aux deux foyers est inférieure ou supérieure à l'axe transverse, selon que le point est dans la région extérieure ou intérieure.*

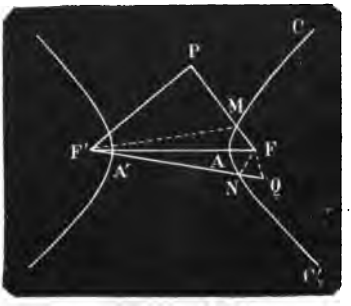


FIG. 550.

1° Soit P un point dans la région extérieure et plus rapproché, par exemple, de F que de F′. La droite PF coupe la branche CAC′ au point M. Si l'on tire MF′, on a :

$$PF' < PM + MF';$$

retranchant PF à chaque membre de cette inégalité, il vient :

$$PF' - PF < PM + MF' - PM - MF$$

ou enfin :

$$PF' - PF < 2a.$$

2° Soit Q un point intérieur à la branche CAC′, par exemple. La droite QF′ rencontre CAC′ au point N. Si l'on tire NF, on a :

$$QF < QN + NF;$$

retranchant chaque membre de QF′, on obtient évidemment :

$$QF' - QF > QN + NF' - QN - NF$$

ou enfin :

$$QF' - QF > 2a.$$

880. Corollaire. — *Un point est à l'extérieur ou à l'intérieur d'une hyperbole, suivant que la différence de ses distances aux deux foyers est inférieure ou supérieure à* 2a.

Démonstration très facile.

§ IV. — INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UNE HYPERBOLE

PROBLÈME

881. — *Trouver les points communs à une droite et à une hyperbole dont on connaît les foyers et la longueur de l'axe transverse.*

Soient CD la droite donnée, F, F′ les foyers et M un point commun à CD et à l'hyperbole. Avec l'axe donné $2a$, traçons le cercle directeur de centre F′ et tirons la droite MF′ qui coupe le cercle directeur en N. Nous avons MN = MF (876); et si nous prenons le symétrique G de F, par rapport à CD, nous aurons aussi MG = MF. Par suite, le point M est le centre d'un cercle passant par les trois points F, N, G. D'ailleurs, ce cercle est tangent en N au cercle directeur. Il résulte de là que tout point M, commun à CD et à l'hyperbole, est le centre d'un cercle passant par les deux points connus F et G et tangent au cercle directeur de centre F′. Pour résoudre le problème, nous décrirons donc une circonférence quelconque passant en F et en G et coupant le cercle directeur, la corde commune à cette circonférence et au cercle directeur ira rencontrer FG en un point E (383). De ce point nous tracerons les tangentes EN, EN′ au cercle directeur. Les rayons FN et F′N′ rencontreront la droite CD en M et en M′ qui seront les seuls points communs à la droite et à l'hyperbole.

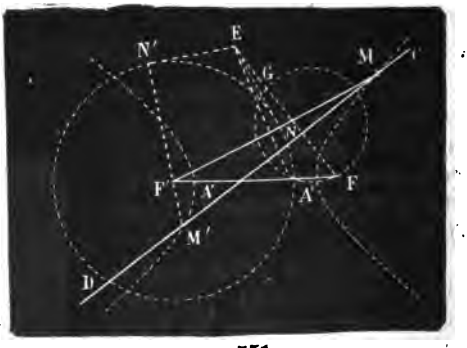


FIG. 551.

882. Corollaire. — *L'hyperbole est une courbe convexe* (845).

CHAPITRE V

Tangente. — Normale. — Asymptotes. — Mener à une hyperbole une tangente : 1° par un point donné ; 2° parallèlement à une droite donnée. Propriétés des tangentes à l'hyperbole.

---

§ I. — TANGENTE. — NORMALE

THÉORÈME

883. — *La tangente à l'hyperbole est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs du point de contact.*

Considérons d'abord une sécante quelconque MM′ passant par deux points voisins M et M′ de la même branche d'hyperbole. Prenons le symétrique G du foyer F par rapport à MM′ et joignons le point M aux trois points G, F, F′ ; puis tirons F′G qui rencontrera MM′ en un point D compris entre M et M′, car nous avons : MG = MF et DG = DF ; par suite, DF′ — DF = F′G. Or, MF′ — MG = MF′ — MF = $2a$; mais nous avons F′G > MF′ — MG ou $2a$, donc nous avons aussi DF′ — DF > $2a$. Par conséquent, le point D est dans la région intérieure (879), il est donc entre M et M′ ; en outre les angles FDM, F′DM sont égaux comme symétriques par rapport à la sécante MM′.

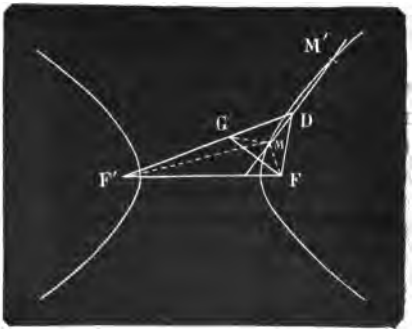


FIG. 552.

Si maintenant nous supposons que la sécante MM′ tourne autour du point M jusqu'à ce que le point M vienne se confondre avec lui, le point D, toujours entre M et M′, viendra aussi se confondre avec M. D'ailleurs, les rayons vecteurs du point D feront constamment deux angles égaux avec MM′, donc à la limite, c'est-à-dire lorsque la sécante MM′ sera devenue une tangente, ces deux angles seront encore égaux. C. q. f. d.

884. Corollaire I. — *La normale* MN *à l'hyperbole en un point* M *est bissectrice de l'angle formé par un des rayons vecteurs de ce point et le prolongement de l'autre.*

Car cette normale est perpendiculaire à la bissectrice intérieure MI dans le triangle GMF.

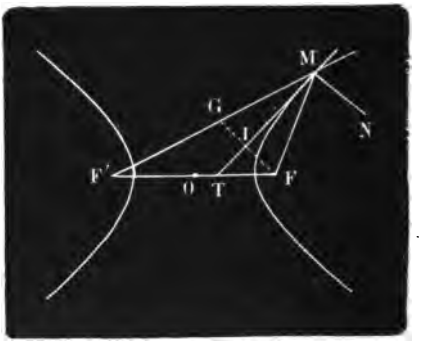


FIG. 553.

885. Corollaire II. — *Le symétrique* G *d'un foyer* F *par rapport à la tangente* MT, *le point de contact* M *et l'autre foyer* F' *sont trois points en ligne droite* (fig. 553).

886. Corollaire III. — *Le lieu des projections des foyers d'une hyperbole sur les tangentes est le cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre.*

Même démonstration que pour l'ellipse. Le cercle qui a pour diamètre l'axe transverse est le *cercle principal.*

THÉORÈME

887. — *Le produit des distances des foyers à une tangente est constant pour la même hyperbole et égale à* $c^2 - a^2$.

Soient I et I' les projections des foyers sur la tangente MT : ces points sont sur le cercle principal (886). Soit N le point de rencontre du prolongement de IF avec le cercle. A cause de l'angle droit inscrit en I, la droite NI' est un diamètre ; par suite, les triangles OFN, OF'I' sont égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun. Donc F'I' = FN, et alors, on a :

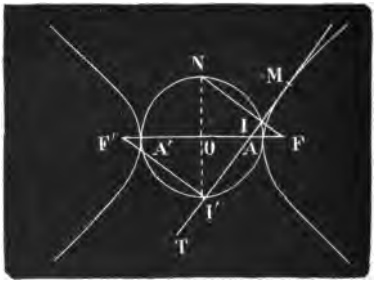


FIG. 554.

$$FI \times F'I' = FI \times FN.$$

Mais quelle que soit la direction de FIN, ce dernier produit est toujours constant et égal à FA × FA' : donc

$$FI \times F'I' = FA \times FA' = (c - a)(c + a) = c^2 - a^2.$$

§ II. — ASYMPTOTES

888. Définition. — On appelle *asymptote* d'une hyperbole la limite des positions que prend une tangente dont le point de contact s'éloigne à l'infini. On dit plus simplement encore : l'asymptote de l'hyperbole est sa tangente à l'infini.

THÉORÈME

889. — *L'hyperbole a deux asymptotes qui passent par son centre et sont symétriques par rapport à ses axes.*

Soient les foyers F, F′, les sommets A, A′ et le cercle directeur F′D. Supposons qu'un point mobile N soit sur ce cercle. Nous avons vu (878) que si ce point part de la position D et se déplace dans le sens de la flèche, la courbe se trouve engendrée par un point M commun au rayon F′N prolongé et à la tangente IM, perpendiculaire au milieu de FN. Nous avons également vu que si FN devient la tangente FT au cercle directeur F′D, le rayon F′T et la tangente HX, c'est-à-dire la perpendiculaire au milieu de FT, sont parallèles, de sorte que leur point de contact M se trouve rejeté à l'infini. La tangente HX ne pouvant rencontrer l'hyperbole qu'à l'infini est donc une asymptote. Elle passe d'ailleurs par le centre O, puisque, dans le triangle FTF′, la droite HO est parallèle à F′T et que H est le milieu de FT.

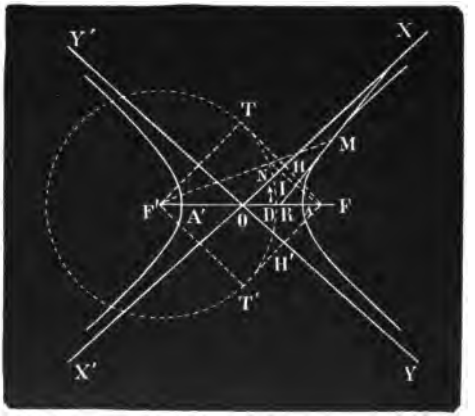


FIG. 555.

La tangente FT′ donne une nouvelle asymptote OY. D'ailleurs, à cause de la symétrie des points de la courbe par rapport au centre, les droites OX, OY prolongées sont asymptotes de la branche de gauche. Donc l'hyperbole a deux asymptotes. De plus ces asymptotes sont symétriques par rapport aux axes de la courbe, car FH = FH′.

Corollaire I. — *Les asymptotes d'une hyperbole sont dirigées suivant les diagonales du rectangle construit sur les deux axes, et la distance du foyer à l'asymptote est égale à* b.

En effet, élevons au sommet A la perpendiculaire AK limitée de part et d'autre aux asymptotes ; puis projetons le foyer F en I sur l'asymptote OX. Comme OX est par définition une tangente à l'hyperbole, il en résulte que le point I est sur le cercle principal (886). Par suite les triangles rectangles AOK, FOI sont égaux, car ils ont un angle aigu commun et OI = a = OA : donc OK = OF = c et (874) AK = b. Donc les asymptotes sont dirigées suivant les diagonales du rectangle qui a pour dimensions $2a$ et $2b$, c'est-à-dire les deux axes ; de plus la distance FI du foyer F à l'asymptote est égale à AK ou à b.

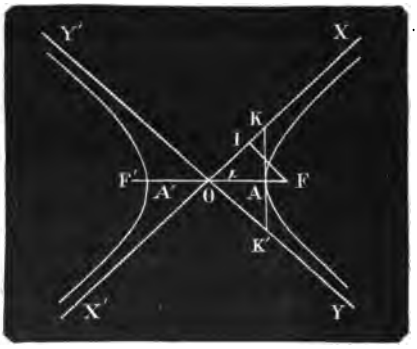


FIG. 556.

Il est toujours facile de construire les asymptotes d'une hyperbole connaissant a et c, car alors on pourra déterminer b et construire le rectangle sur les axes de la courbe.

Corollaire II. — *Le cosinus du demi-angle des asymptotes qui comprend chaque branche de l'hyperbole est égal au rapport* $\frac{a}{c}$.

Car si l'on désigne l'angle KOK' des asymptotes par 2α, le triangle rectangle FOI donne :

$$\cos\alpha = \frac{OI}{OF} = \frac{a}{c}.$$

Corollaire III. — *Lorsque le point* M *se déplace sur l'hyperbole* (*fig.* 555), *la tangente fait avec l'axe transverse un angle aigu dont le minimum est l'angle de l'asymptote avec cet axe.*

En effet, l'angle MRF a pour complément l'angle NFR ; or, ce dernier angle croît de zéro à TFR ; donc, pendant ce temps, l'angle MRF décroît jusqu'à ce que la tangente MI soit devenue asymptote : donc l'angle minimum est l'angle formé par l'asymptote et l'axe transverse.

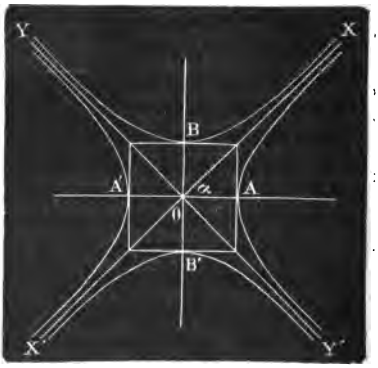


FIG. 556 *bis*.

890. Hyperboles conjuguées. — On dit que deux hyperboles sont *conjuguées* lorsque l'axe transverse de l'une est l'axe non transverse de l'autre. Il résulte de là que deux hyperboles conjuguées ont les mêmes asymptotes (fig. 556 *bis*).

§ III. — CONSTRUCTION DE LA TANGENTE A L'HYPERBOLE. PROPRIÉTÉS DES TANGENTES A CETTE COURBE

PROBLÈME

891. — *Mener à une hyperbole une tangente par un point donné.*

1° Le point donné M est sur l'hyperbole. Il suffit de mener la bissectrice des rayons vecteurs du point M. Cette bissectrice est la tangente demandée (883);

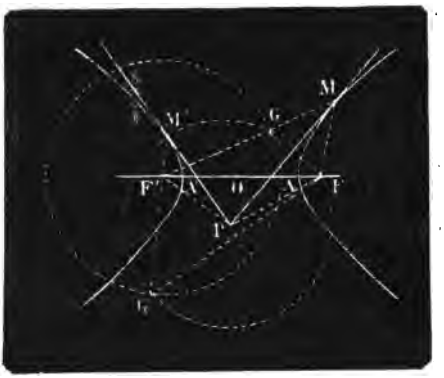


FIG. 557.

2° Le point donné P est un point quelconque du plan de l'hyperbole dont les foyers sont F, F′ et l'axe transverse AA′ ou $2a$. Supposons le problème résolu et soit PM la tangente demandée. Il est évident que si l'on connaissait le symétrique G du foyer F par rapport à cette tangente, on pourrait la construire. Or le point G est sur le cercle directeur de centre F′; mais il est aussi sur le cercle décrit du point P avec PF pour rayon : donc le point G est donné par l'intersection de ces deux cercles. Ce point étant déterminé, la tangente elle-même est déterminée; puisque c'est la perpendiculaire menée du point P au milieu de FG. Le point de contact M est d'ailleurs à la rencontre de la tangente avec F′G (885).

Discussion. — Les deux cercles pouvant se couper en deux points G et G′, on peut généralement mener, du point P, les tangentes PM, PM′ élevées sur les milieux de FG, FG′. Pour qu'il y ait les deux points communs G et G′, il faut et il suffit qu'on puisse former le triangle PF′G; mais les trois côtés de ce triangle sont PF′, PG = PF et F′G = $2a$; il faut donc et il suffit que ces longueurs satisfassent aux trois conditions suivantes :

$$PF' < PF + 2a \ (1), \quad PF < PF' + 2a \ (2), \quad 2a < PF + PF' \ (3).$$

Or l'inégalité (3) est vraie dans tous les cas, car on a toujours

$$2a < 2c < PF + PF'.$$

Quant aux deux premières, elles peuvent s'écrire :

$$PF' - PF < 2a \text{ et } PF - PF' < 2a.$$

Ce qui signifie que le point P doit être extérieur à la courbe (879).

Si cette condition est remplie, les cercles se coupent en deux points ; et, par suite, le problème a deux solutions.

Ainsi, d'un point extérieur à une hyperbole, on peut mener à cette courbe deux tangentes et on ne peut en mener que deux.

Si le point P est sur l'une des branches de l'hyperbole, celle de droite, par exemple, on a $PF' - PF = 2a$, égalité qui signifie que les deux cercles sont tangents. Il n'y a donc, dans ce cas, qu'une solution.

Si le point P est intérieur à l'hyperbole, les deux cercles deviennent extérieurs et le problème n'est plus possible.

Si le point P était sur une asymptote, la construction montre que l'une des tangentes coïnciderait avec cette asymptote.

Si le point P coïncidait avec le centre O, les tangentes coïncideraient l'une et l'autre avec les asymptotes.

PROBLÈME

892. — *Mener à l'hyperbole une tangente parallèle à une droite donnée.*

Abaissons du foyer F une perpendiculaire FK sur la droite donnée CD ; puis décrivons le cercle directeur du foyer F'. D'après ce que nous avons vu plus haut (891), les perpendiculaires MI, M'I élevées sur les milieux des droites FG, FG', sont les tangentes demandées. Les rayons prolongés F'G, G'F' déterminent les points de contact M et M'.

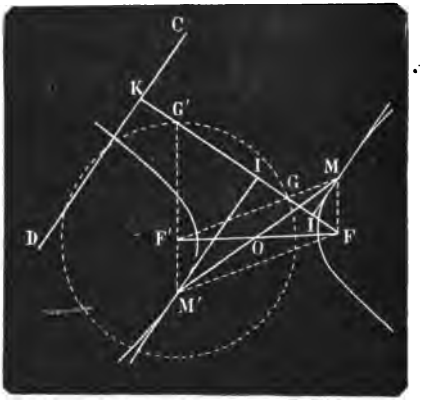


Fig. 558.

Discussion. — Pour que le problème soit possible, il faut que la perpendiculaire FK à CD rencontre le cercle directeur.

Or, pour qu'il puisse en être ainsi, il faut et il suffit que cette perpendiculaire se trouve dans l'angle formé par les tangentes menées du foyer F au cercle directeur de centre F'. Si cette circonstance est réalisée, le problème admet deux solutions, c'est le cas que nous venons de voir ; si la perpendiculaire FK coïncide avec l'une des tangentes

menées du foyer F, les deux tangentes parallèles à la direction donnée coïncident avec l'asymptote perpendiculaire à FK et alors les points de contact M et M′ se trouvent rejetés à l'infini; enfin le problème est impossible si la perpendiculaire FK tombe en dehors de l'angle des tangentes du point F au cercle directeur.

893. Corollaire I. — *Les points de contact* M *et* M′ *des tangentes à l'hyperbole, parallèles entre elles, sont symétriques par rapport au centre* O (fig. 558).

Même démonstration que pour l'ellipse (857).

Remarque. — On voit que les solutions des problèmes précédents (891 et 892) n'exigent pas que l'hyperbole soit tracée, il suffit de connaître les foyers et $2a$.

THÉORÈME DE PONCELET

894. — 1° *Les tangentes à l'hyperbole, issues d'un même point, font des angles égaux avec les rayons vecteurs de ce point;* 2° *la droite qui va d'un foyer au point de concours de deux tangentes est bissectrice de l'un des angles formés par les rayons vecteurs qui vont de ce foyer aux points de contact des deux tangentes.*

La démonstration est la même que pour l'ellipse (859); mais pour l'hyperbole il y a deux cas à considérer, car les points de contact peuvent être sur les deux branches ou sur la même branche.

PREMIER CAS. — *Les points de contact sont sur les deux branches.*

1° Soient les deux tangentes PM et PM′, G et G′ les symétriques des foyers F et F′ par rapport à ces tangentes; les droites F′G et FG′ passent par les points de contact M et M′ (885).

D'autre part les deux triangles F′PG et FPG′ sont égaux car, PG = PF; PF′ = PG′ et

$$F'G = 2a = FG'.$$

Par suite angle $\widehat{F'PG}$ = angle $\widehat{FPG'}$; retranchons à ces deux angles leur partie commune α, il vient $\widehat{F'PG'} = \widehat{FPG}$.

Les angles moitiés 1 et 1′, sont par conséquent égaux C.Q.F.D.

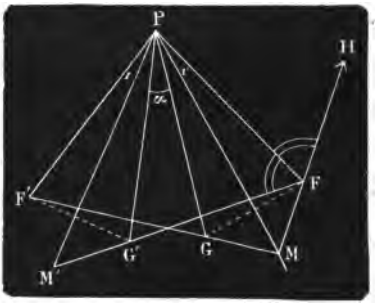


FIG. 559.

2° Il faut prouver que FP est bissectrice de l'angle formé par l'un des rayons vecteurs M′F et le prolongement de l'autre dans le sens MF.

Les angles $\widehat{PFH}$ et $\widehat{PGF'}$ symétriques par rapport à la droite PM sont

égaux ; mais $\widehat{PFG'} = \widehat{PGF'}$ à cause de l'égalité des triangles ci-dessus, donc FP est bissectrice de l'angle des vecteurs M'F et MF.

DEUXIÈME CAS. — *Les points de contact sont sur la même branche.*

1° Soient les tangentes PM et PM', G et G' les symétriques des foyers F et F' par rapport à ces deux tangentes. Les droites F'G et FG' passent par les points de contact M et M' (885).

D'autre part, les triangles PF'G et PFG' sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun ; savoir :

$$PG' = PF' ; \quad PG = PF ;$$

enfin $F'G = 2a = FG'$.

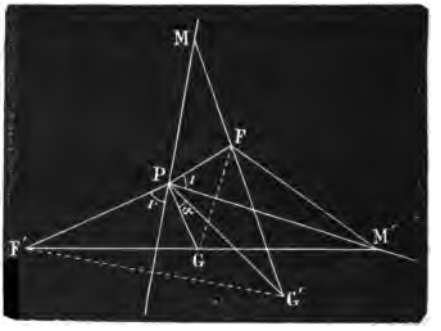


FIG. 560.

Par suite $\widehat{F'PG} = \widehat{FPG'}$. En ajoutant l'angle commun α à chacun de ces angles égaux, il vient : $\widehat{F'PG'} = \widehat{FPG}$; leurs moitiés 1 et 1' sont donc égales. Donc l'angle formé par la tangente PM' et le rayon vecteur PF est égal à l'angle formé par le rayon vecteur PF' et la tangente MP prolongée dans le sens MP ;

2° Il faut prouver que PF est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs des points de contact ; pour cela, il suffit de prouver que $\widehat{PFM} = \widehat{PFM'}$.

Or les deux angles $\widehat{PFM'}$ et $\widehat{PGM'}$, symétriques par rapport à la tangente PM', sont égaux. A cause de l'égalité des triangles ci-dessus : $\widehat{PFG'} = \widehat{PGF'}$; dès lors les suppléments de ces angles sont égaux : $\widehat{PGM'} = \widehat{PFM}$. Donc finalement, $\widehat{PFM}$ et $\widehat{PFM'}$, tous deux égaux à $\widehat{PGM'}$, sont égaux entre eux.

C. Q. F. D.

THÉORÈME

895. — *Si l'on prend comme axes de coordonnées les axes de l'hyperbole, cette courbe a pour équation :*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En effet, menons l'ordonnée MP, ou y, d'un point quelconque M de l'hyperbole.

On a :

$$OP = x. \quad MP = y. \quad OF = c.$$

Les deux triangles rectangles MPF et MPF′ donnent

$$MF'^2 = MP^2 + PF'^2 = y^2 + (x+c)^2;$$
$$MF^2 = MP^2 + PF^2 = y^2 + (x-c)^2.$$

d'où $MF' - MF = \sqrt{y^2+(x+c)^2} - \sqrt{y^2+(x-c)^2} = 2a$:

Élevant au carré deux fois et simplifiant, il vient

$$a^2y^2 = x^2(c^2-a^2) - a^2(c^2-a^2);$$

mais (874)

$$c^2 - a^2 = b^2,$$

donc :

$$a^2y^2 = x^2b^2 - a^2b^2$$

ou

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Divisant les deux membres par a^2b^2, il vient l'équation cherchée :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

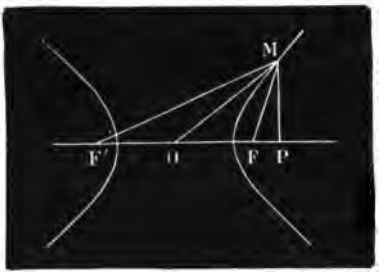


FIG. 560 *bis*.

Si dans cette dernière équation on fait $a = b$, on trouve pour équation de *l'hyperbole équilatère :*

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

CHAPITRE VI

Définition de la parabole par la propriété du foyer et de la directrice. — Tracé de la courbe par points et d'un mouvement continu. Axe. Sommet. — Intersection d'une droite et d'une parabole.

§ 1er. — PARABOLE; TRACÉ DE LA COURBE; AXE ET SOMMET

Définitions.

896. — On appelle *parabole* le lieu des points d'un plan équidistants d'un point et d'une droite fixes.

Le point fixe F et la droite fixe DE sont le *foyer* et la *directrice* de la courbe.

La distance FD du foyer à la directrice est le *paramètre* de la parabole; on le représente par p.

La distance MF d'un point M de la courbe au foyer est le *rayon vecteur* de ce point.

D'après la définition de la parabole, la distance ME d'un point de la courbe à la directrice est égale au rayon vecteur MF de ce point.

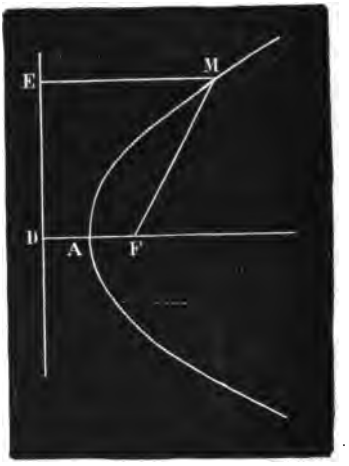


FIG. 561.

PROBLÈME

897. — *Tracer une parabole par points connaissant son foyer et sa directrice.*

1re *Méthode.* — Soient F le foyer d'une parabole et DE sa directrice. Menons une parallèle quelconque LL′ à la directrice et soit N le point où cette droite rencontre la perpendiculaire FD à la directrice. D'après la définition de la parabole, les points de cette courbe, cherchés sur LL′, doivent être à une distance DN de la directrice et du foyer F; ils seront donc sur le cercle de centre F et de rayon DN. Or ce cercle ne coupera LL′ qu'en deux points (167) M et M′. Ces points appartiennent en effet à la parabole, car la distance ME du point M à la directrice est égale à DN = MF. Il en est de même pour le point M′.

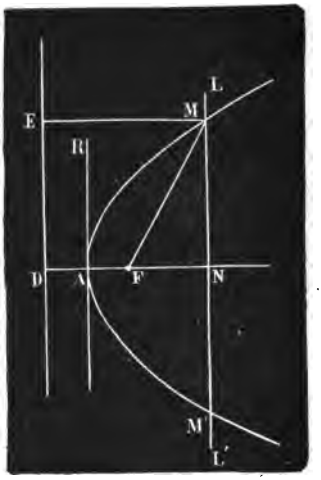


FIG. 562.

Discussion. — Le cercle décrit du point F avec DN pour rayon ne peut évidemment rencontrer la parallèle à la directrice que dans le cas où le point N est à droite du milieu A de FD. Il résulte de là : 1° que la courbe est tout entière à droite de la parallèle AR menée par le milieu A de FD et que le point A est, par conséquent, le *sommet* de la parabole; 2° que la courbe a des points à l'infini, car la distance DN peut croître sans limite; 3° que la courbe a deux branches,

car elle a pour *axe* de symétrie la perpendiculaire FD à la directrice; 4° que la courbe n'est pas fermée, car DN pouvant dépasser toute grandeur, les points symétriques de la courbe, par rapport à l'axe, sont de plus en plus distants l'un de l'autre.

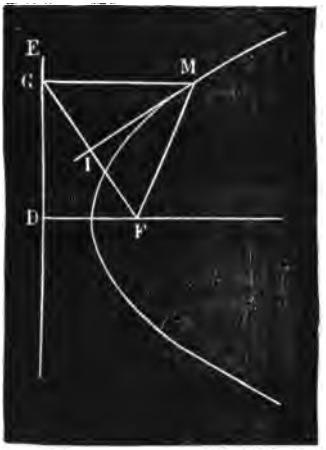


FIG. 563.

2e *Méthode.* — Un autre procédé facile permet aussi de construire la parabole par points.

Considérons un point G mobile sur la directrice DE; tirons GF et sur le milieu de cette droite élevons une perpendiculaire IM que nous prolongerons jusqu'à sa rencontre avec GM parallèle à l'axe. Le point M appartient à la courbe, car IM étant perpendiculaire au milieu de GF, il en résulte que MG = MF.

En faisant varier le point G sur la directrice, on pourra obtenir autant de points de la courbe qu'on voudra.

D'ailleurs, comme la rencontre de GM et de IM ne donne qu'un point, il arrive que les parallèles à l'axe ne rencontrent la parabole qu'en un seul point.

Enfin, on voit que la parabole partage le plan en deux régions; l'une, la région *intérieure*, contient le foyer; l'autre, la région *extérieure*, contient la directrice.

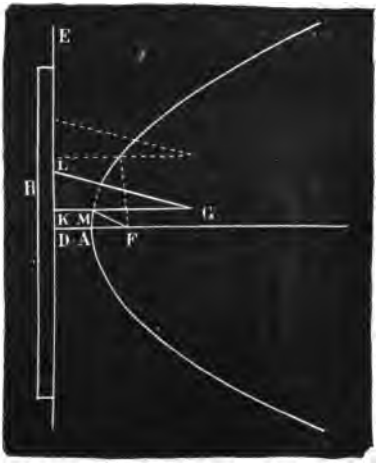


FIG. 564.

PROBLÈME

898. — *Tracer une parabole d'un mouvement continu, connaissant son foyer et sa directrice.*

Soient F le foyer de la parabole et DE sa directrice.

Pour tracer cette courbe d'un mouvement continu, on place le bord d'une règle R sur la directrice DE et l'on applique contre cette règle le plus petit côté LK de l'angle droit d'une équerre KGL. Ensuite, on attache aux points F et G un fil inextensible d'une longueur égale à KG. Si l'on tient ce fil appliqué contre le côté KG au moyen d'une pointe, ou d'un crayon, et qu'on fasse

alors glisser l'équerre contre la règle, la pointe étant constamment appuyée contre le côté KG décrira un arc de parabole. En effet, le fil étant par hypothèse égal à KG, on aura dans toutes les positions de l'équerre :

$$GM + MF = GM + MK,$$

par suite,

$$MF = MK.$$

Le point M est donc sur une parabole qui a pour foyer F et pour directrice DE.

La branche inférieure de la courbe se décrirait de la même manière.

THÉORÈME

899. — *La distance d'un point du plan d'une parabole au foyer est inférieure ou supérieure à sa distance à la directrice, suivant que le point est intérieur ou extérieur à la courbe.*

Soit d'abord le point I intérieur à la parabole. Ce point est plus rapproché du foyer que de la directrice ; car la perpendiculaire IK à la directrice rencontrant la courbe en M, donne :

$$IF < IM + MF;$$

mais $MF = MK$, on a donc :

$$IF < IM + MK \text{ ou } IF < IK.$$

Soit en second lieu le point L extérieur à la courbe. Ce point est plus éloigné du foyer que de la directrice ; car la perpendiculaire KL à la directrice rencontrant la courbe en M, donne :

$$LF > MF - ML,$$

ou

$$LF > MK - ML,$$

ou enfin

$$LF > LK.$$

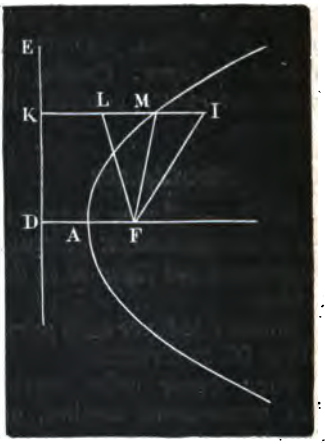


FIG. 565.

900. Corollaire. — *Un point est à l'intérieur ou à l'extérieur de la parabole, suivant que sa distance au foyer est moindre ou supérieure à sa distance à la directrice.*

Démonstration très facile.

§ II. — INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UNE PARABOLE

PROBLÈME

901. — *Trouver les points communs à une droite et à une parabole dont on connaît le foyer et la directrice* (fig. 566).

Supposons un point M commun à la droite BC et à la parabole ayant F pour foyer et DE pour directrice. Prenons le symétrique G du foyer F par rapport à BC et menons la perpendiculaire MP à la directrice. Les trois distances MP, MF et MG sont égales; par suite, le point M est le centre d'un cercle passant par les points connus F et G. Si le point P était connu, la perpendiculaire à DE en ce point déterminerait le point M en rencontrant BC. Il s'agit donc de trouver le point P. A cet effet, prolongeons FG jusqu'à sa rencontre en K avec DE; nous avons : $\overline{KP}^2 = \overline{KP'}^2 = KF \times KG$. Comme KF et KG sont des quantités connues, nous trouverons facilement $KP = KP'$. Les perpendiculaires en P et P′ donneront les points M et M′ communs à la droite et à la parabole.

Discussion. — La droite BC rencontre la parabole en deux points, si G se trouve du même côté que F par rapport à DE; il n'y a qu'un point de commun à la droite et à la courbe, si G est sur la directrice; enfin la droite BC ne rencontre pas la courbe, si F et G sont de part et d'autre de la directrice. Si BC est perpendiculaire à la directrice, il n'y a qu'un seul point de commun à la directrice et à la courbe; c'est d'ailleurs ce que nous avons déjà vu (897). Si la droite BC passe au foyer de la parabole, les points F et G sont confondus en un seul point F, et, par suite, $KG = KF$, de sorte que $\overline{KP}^2 = \overline{KF}^2$. Il suffira donc de prendre $KP = KP' = KF$.

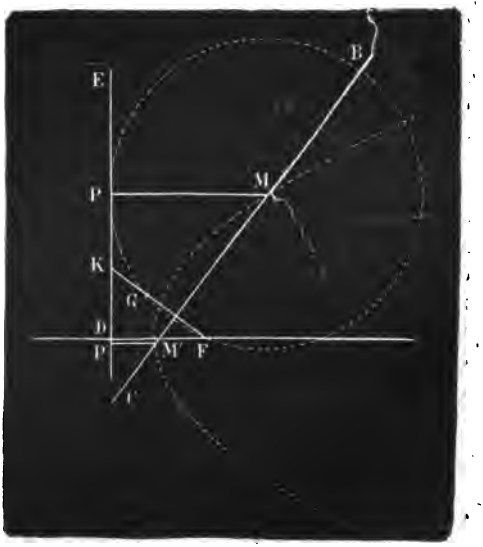


FIG. 566.

902. Corollaire. — *La parabole est une courbe convexe.*

CHAPITRE VII

Tangente. — Normale. — Mener à une parabole une tangente : 1° par un point donné; 2° parallèlement à une droite donnée. — Propriétés des tangentes à la parabole. — Sous-normale.

§ Ier. — TANGENTE. — NORMALE

THÉORÈME

903. — *La tangente à la parabole fait des angles égaux avec la parallèle à l'axe et le rayon vecteur mené au point de contact* (fig. 367).

Soient F le foyer d'une parabole et MM′ une sécante quelconque à cette courbe. Prenons le symétrique G du foyer F par rapport à MM′ et menons la droite GH parallèle à l'axe : 1° le point H où GH rencontre MM′ est entre M et M′ ; 2° les droites GH et FH font des angles égaux avec MM′.

En effet, tirons MF, MG et menons MP perpendiculaire à la directrice. Nous avons MP = MF = MG. Le point G est donc sur le cercle de rayon MP et de centre M ; mais comme ce cercle est tangent en P à la directrice, le point G est nécessairement à droite de cette directrice. Par suite, nous avons HG ou son égale HF plus petite que HE, donc le point H est intérieur à la parabole, et comme MM′ n'a que deux points M et M′ sur la courbe, il en résulte que H est entre M et M′.

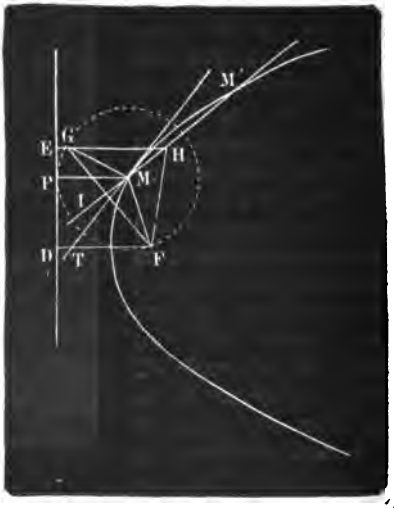


FIG. 567.

D'autre part, à cause du triangle isocèle GHF, les angles GHI,

FHI sont égaux. Si maintenant nous supposons que la sécante MM′ tourne autour du point M jusqu'à ce que le point M′ vienne se confondre avec lui, le point H, toujours entre M et M′, viendra aussi se confondre avec M. D'ailleurs, dans toutes les positions de la sécante MM′ les angles GHI et FHI ne cesseront pas d'être égaux, donc à la limite, c'est-à-dire lorsque la sécante MM′ sera devenue une tangente MT, ils seront encore égaux.

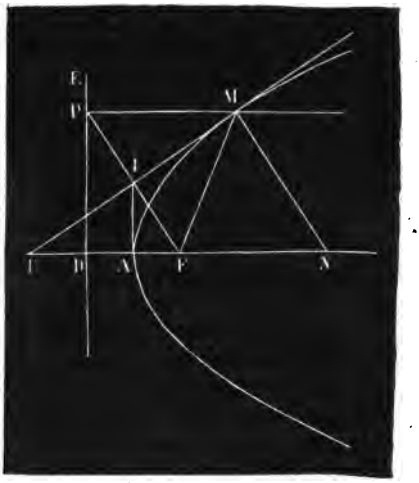


FIG. 568.

904. Corollaire I. — *La normale* MN *est bissectrice de l'angle du rayon vecteur et de la parallèle à l'axe menée par le point de contact;* car cette normale est perpendiculaire à la bissectrice intérieure MT du triangle PMF. Il résulte de là, que la tangente, le rayon vecteur, la normale et la parallèle à l'axe forment un faisceau harmonique dont le point M est le centre.

905. Corollaire II. — *La tangente au sommet est perpendiculaire à l'axe et la normale au même point coïncide avec l'axe.*

906. Corollaire III. — *Le lieu des symétriques du foyer par rapport aux tangentes est la directrice. Le lieu des projections du foyer sur les mêmes tangentes est la tangente au sommet* (fig. 568).

La première proposition contenue dans ce corollaire est évidente et la seconde est très facile à démontrer. En effet, le point I, projection du foyer F, est le milieu du côté FP du triangle rectangle DFP; de même le point A est le milieu de FD : donc AI est parallèle à la directrice et par suite tangente à la courbe au sommet A.

907. Corollaire IV. — *Le foyer est équidistant du point de contact* M *de la tangente* MT *et du pied* T *de cette tangente sur l'axe.*

Car à cause des parallèles FD, MP et de la tangente MT, on a :

$$\text{angle PMT} = \text{angle MTF} = \text{angle FMT};$$

donc le triangle FMT est isocèle et, par suite, FM = FT.

§ II. — CONSTRUCTION DE LA TANGENTE A LA PARABOLE; PROPRIÉTÉS DES TANGENTES A CETTE COURBE

PROBLÈME

908. — *Mener à la parabole une tangente par un point donné.*

1° Le point donné M est sur la parabole (*fig.* 568). La tangente demandée est (903) la bissectrice de l'angle formé avec le rayon vecteur au point M et la perpendiculaire menée de ce point à la directrice. On peut encore obtenir la tangente au point M, en prenant sur l'axe, à partir du foyer dans le sens FD, une longueur FT = FM : la droite TM est la tangente au point M (906);

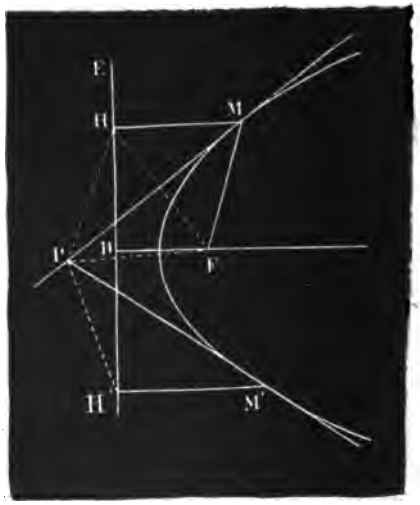


FIG. 569.

2° Le point donné P est un point quelconque du plan de la parabole dont DE est la directrice et F le foyer. Supposons le problème résolu et soit MP la tangente demandée. Abaissons du point M la perpendiculaire MH à la directrice et tirons FH ainsi que MF, PF et PH. L'inconnue est le seul point H; car la tangente demandée est la perpendiculaire au milieu de FH et le point de contact M se trouve à l'intersection de cette perpendiculaire et de la parallèle HM à l'axe. Or, ce point H est facile à déterminer, car étant le symétrique de F par rapport à la tangente PM, nous avons PH égal à PF. Donc le point H est sur la directrice et sur le cercle décrit du point P comme centre avec PF pour rayon. Le point H est donc déterminé.

Discussion. — Le cercle de centre P et de rayon PF pouvant couper la directrice en H et H', on peut généralement mener du point P deux tangentes PM et PM'. Pour qu'on ait les deux points H et H' sur la directrice, il faut et il suffit que la distance du point P à cette droite soit moindre que PF ou que le point P soit extérieur à la courbe. Si le point P est sur la parabole, sa distance à la directrice est égale à PF; par suite le cercle décrit du point P avec PF pour rayon est tangent à la directrice et le problème n'a plus qu'une solution. Enfin le problème est impossible si le point P est intérieur à la parabole.

PROBLÈME

909. — *Mener à la parabole une tangente parallèle à une droite donnée.*

Supposons le problème résolu et soit MT la tangente au point M parallèle à la droite donnée BC.

Du foyer F, abaissons sur la droite donnée BC une perpendiculaire qui rencontre la directrice au point G symétrique de F par rapport à la tangente. Le point G est facile à déterminer, puisqu'il doit se trouver à la fois sur la directrice et sur la perpendiculaire menée du foyer F à BC. Le point G étant connu, la construction s'achève comme au numéro précédent.

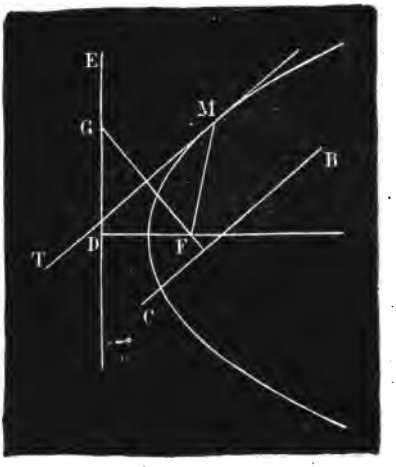


FIG. 570.

Discussion. — Le point G étant donné par l'intersection de deux droites, le problème est toujours possible, sauf le cas où la droite donnée BC est parallèle à l'axe ; car alors FG devient parallèle à la directrice et le point G est rejeté à l'infini.

910. Remarque. — Les trois problèmes précédents (901, 907 et 908) n'exigent pas que la parabole soit tracée, il suffit de connaître le foyer et la directrice.

THÉORÈME DE PONCELET

911. — 1° *Les tangentes à la parabole issues d'un point font des angles égaux avec le rayon vecteur de ce point et la parallèle à l'axe ;* 2° *la droite qui va du point de concours des tangentes au foyer est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs des points de contact.*

1° Soient les tangentes PM, PM'. Menons les perpendiculaires MG, M'G' à DE ; puis PHL parallèle à l'axe ; enfin traçons les rayons vecteurs des points P, M, M'. Il s'agit de démontrer que les angles 1 et 2 sont égaux. En effet, les angles 3 et 4 sont égaux comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires ; les angles 2 et 4 sont égaux comme ayant même mesure ; enfin les angles 1 et 3 sont égaux comme alternes-internes : donc les angles 1 et 2 sont égaux.

2° Il faut démontrer que les angles PFM et PFM' sont égaux ou que PF est bissectrice de l'angle MFM'.

2° $\overset{\frown}{PFM} = \overset{\frown}{PGM}$ comme symétriques par rapport à la tangente PM ; $\overset{\frown}{PG'M'} = \overset{\frown}{PFM'}$ comme symétriques par rapport à la tangente PM' ;

$\overset{\frown}{PGM} = \overset{\frown}{PG'M'}$ car tous deux sont égaux à 1 droit + PGD ou PG'D ; or ces deux angles sont égaux comme faisant partie du triangle isocèle PGG' ; donc, $\overset{\frown}{PFM} = \overset{\frown}{PFM'}$; d'où il résulte que PF est bissectrice de l'angle MFM'.

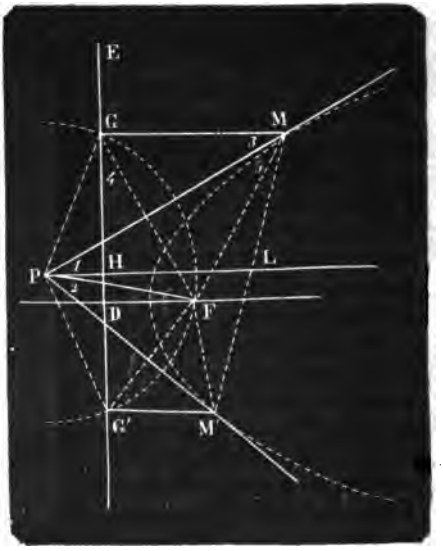


FIG 571.

912. Corollaire I. — *La parallèle* PHL *à l'axe, menée par le point de concours* P *de deux tangentes à une parabole, passe par le milieu de la corde des contacts.*

En effet PH étant perpendiculaire à GG' passe au milieu H de cette droite, donc, à cause du trapèze GMM'G', le point L est aussi le milieu de MM'.

§ III. — SOUS-NORMALE

913. Définitions. — On appelle *sous-normale* de la parabole la projection PN sur l'axe (*fig.* 572) de la partie MN de la normale comprise entre son pied sur la courbe et l'axe.

On nomme *sous-tangente* de la parabole la projection RP sur l'axe de la partie MR d'une tangente comprise entre le point de contact et l'axe.

THÉORÈME

914. — 1° *La sous-normale est constante et égale au paramètre.*

2° *Le sommet d'une parabole est le milieu d'une sous-tangente.*

1° Soit PN la sous-normale d'une parabole dont le paramètre est DF. Il s'agit de démontrer que PN = DF.

En effet, si du point de contact M, nous abaissons MH perpendiculaire sur DE et que nous menions FH, cette dernière droite, perpendiculaire à la tangente, sera parallèle et égale à la normale MN. Les triangles rectangles PMN, DHF seront par conséquent égaux, et nous aurons :

$$PN = DF.$$

2° Il s'agit de prouver que le point A est le milieu de PR ou que AR = AP.

Or, dans le triangle DFH le point I est le milieu de HF et le point A le milieu de DF, donc AI est égal à la moitié de DH ou à la moitié de PM. Donc dans le triangle MPR la partie AR est la moitié de PR; par suite AR = AP : donc enfin le sommet A de la parabole est le milieu de la sous-tangente.

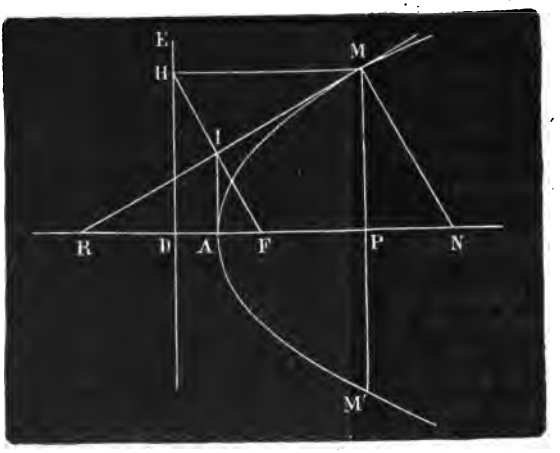


FIG. 572.

CHAPITRE VIII

Relation entre le carré d'une corde perpendiculaire à l'axe et sa distance au sommet. — La parabole est la limite d'une certaine ellipse.

THÉORÈME

915. — *Le carré d'une corde perpendiculaire à l'axe de la parabole est proportionnel à la distance de cette corde au sommet.*

En effet, soit la corde MM′ perpendiculaire à l'axe. Cette corde est partagée au point P en deux parties égales. Or le triangle rectangle MNR donne :

$$\overline{MP}^2 = PR \times PN; \text{ d'ailleurs,}$$

$$2MP = MM', PR = 2AP \text{ et } PN = FD,$$

donc :

$$4\overline{MP}^2 \text{ ou } \overline{MM'}^2 = 8AP \times FD.$$

Mais FD, n'étant autre chose que le paramètre p, est une quantité constante, donc $\overline{MM'}^2$. est proportionnel à AP ou à la distance de la corde MM' au sommet de la courbe.

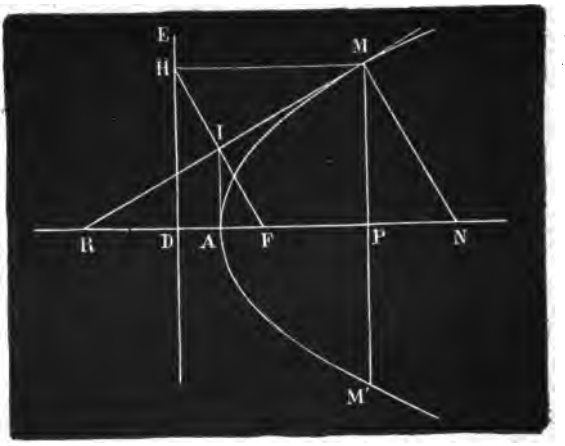


FIG. 573.

THÉORÈME

916. — *La parabole est la limite vers laquelle tend une ellipse dont la distance focale augmente indéfiniment, tandis que l'un des foyers et le sommet voisin restent fixes.*

Soient une ellipse et une parabole ayant F pour foyer et A pour sommet voisin. Décrivons le cercle directeur, en prenant pour centre le foyer mobile F'. Nous avons vu (839) que tout point M de l'ellipse est équidistant de ce cercle et du foyer F, c'est-à-dire que MF = MN. Or, le cercle directeur de centre mobile F' a pour limite la directrice DE, car ce cercle passe toujours en D, puisque AD = AF, et est tangent en ce point, attendu que DE est perpendiculaire au rayon F'D. Donc à la limite l'arc ND coïncidera avec la directrice DE, de sorte que la distance MN deviendra la distance MP et, par suite, à cette limite l'ellipse sera devenue une parabole.

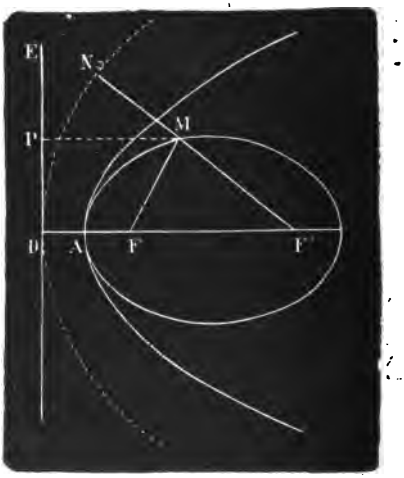


FIG. 574.

C. q. f. d.

917. Remarque I. — Ce théorème permet de déduire diverses propriétés de la parabole des propriétés correspondantes de l'ellipse. Ainsi, par exemple, nous avons démontré (902) que ***la tangente à la parabole fait des angles égaux avec la parallèle à l'axe et le rayon vecteur mené au point de contact.***

Or, au lieu du raisonnement que nous avons fait, si l'on considère la parabole comme la limite d'une ellipse, on peut dire : *Le théorème analogue pour l'ellipse étant vrai quelle que soit la distance focale sera encore vrai si cette distance focale devient infinie, c'est-à-dire si l'un des rayons vecteurs devient une parallèle à l'axe.*

THÉORÈME

918. — *Si l'on prend comme axes de coordonnées l'axe de symétrie de la parabole et la tangente à son sommet, la courbe a pour équation :*

$$y^2 = 2px.$$

En effet, soient OX et OY l'axe et la tangente au sommet de la parabole ayant DE pour directrice. Menons la corde MM'. D'après le théorème 915 nous avons :

$$\overline{MM'}^2 = 8OP.p.$$

Mais nous savons déjà que :

$MM' = 2y$ et que $OP = x$,

nous avons donc pour équation de la parabole :

$$y^2 = 2px.$$

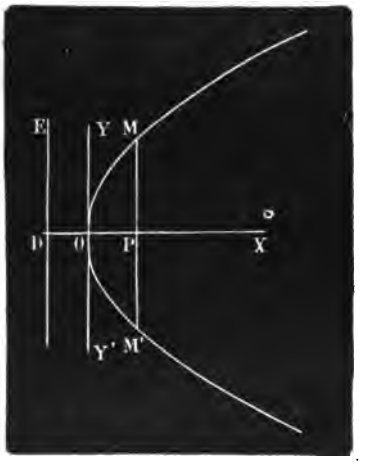


FIG. 575.

CHAPITRE IX

Définition commune des coniques au moyen d'un foyer et d'une directrice.

919. — L'ellipse, l'hyperbole et la parabole sont des variétés d'une même ligne qui est le lieu des points dont le rapport des distances à un point fixe appelé *foyer* F et à une droite fixe appelée *directrice* est *constant*. Ce rapport constant **e** est égal à *l'excentricité* de la conique.

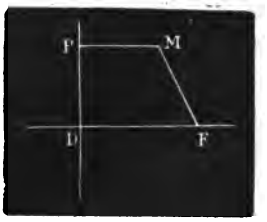


FIG. 576.

920. Définition. — Lorsque l'excentricité **e** d'une conique est *égale* à l'unité, la courbe est une *parabole*. Si l'excentricité **e** est *supérieure* à l'unité, on a une *hyperbole*. Enfin si l'excentricité **e** est *inférieure* à l'unité, la courbe est une *ellipse*.

En effet, on a d'abord :

$$r' - r = 2a \; ; \quad (1)$$

de plus, comme MO est médiane dans le triangle FMF' et que sa projection sur l'axe focal est $OP = x$, on a en second lieu (344, 2°) :

$$r'^2 - r^2 = 2FF' \times OP = 4cx$$

ou $$(r' + r)(r' - r) = 4cx,$$

d'où, à cause de l'équation (1) :

$$r' + r = \frac{4cx}{2a} = \frac{2cx}{a}. \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) donnent pour les valeurs cherchées de r et r', rayons vecteurs du point M :

$$r = \frac{cx}{a} - a \text{ et } r' = \frac{cx}{a} + a.$$

C. q. f. d.

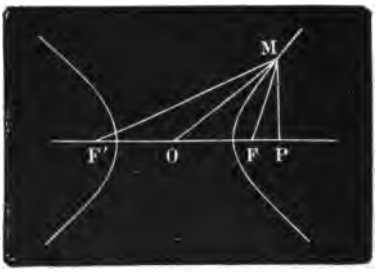


FIG. 580.

927. Définition. — On appelle *directrices de l'hyperbole* les polaires *des foyers par rapport au cercle principal* (fig. 581).

D'après cette définition, ces droites sont deux perpendiculaires DE, D'E' à l'axe focal, voisines des sommets A, A' et à une distance du centre égale à $\frac{a^2}{c}$ (822), par suite, la distance de chaque directrice au foyer voisin est :

$$c - \frac{a^2}{c} = \frac{c^2 - a^2}{c} = \frac{b^2}{c}.$$

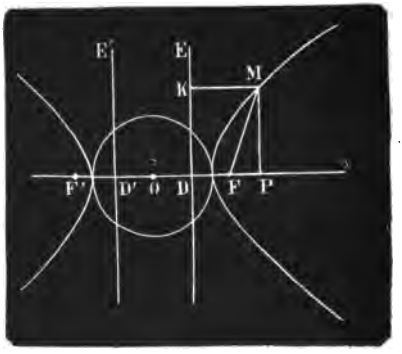


FIG. 581.

THÉORÈME

923. — *Le rapport des distances d'un point de l'hyperbole à un foyer et à la directrice voisine est constant et égal à l'excentricité* e.

En effet, soit M un point quelconque de l'hyperbole. Menons le rayon vecteur MF, l'ordonnée MP et la perpendiculaire MK à la directrice voisine DE. Nous avons (926) :

$$MF = \frac{cx}{a} - a = \frac{cx - a^2}{a} \text{ et } MK = OP - OD = x - \frac{a^2}{c} = \frac{cx - a^2}{c},$$

d'où :

$$\frac{MF}{MK} = \frac{c}{a} = e.$$

THÉORÈME

929. — *Le rapport des distances d'un point à un foyer d'une hyperbole et à la directrice voisine est inférieur ou supérieur à l'excentricité, suivant que le point est intérieur ou extérieur à l'hyperbole.*

Même démonstration que pour l'ellipse (924) :

930. Corollaire. — *Le lieu des points d'un plan dont les distances à un point et à une droite fixes sont dans un rapport constant* e **supérieur à l'unité**, *est une* **hyperbole** *ayant pour foyer et directrice voisine le point et la droite fixes.*

CHAPITRE X

Sections cylindriques et coniques.

§ I. — SECTIONS PLANES D'UN CYLINDRE DE RÉVOLUTION

931. — Nous avons vu plus haut que toute section plane perpendiculaire à l'axe d'un cylindre détermine un cercle de grandeur constante. Nous allons démontrer dans le théorème suivant que la section plane devient une *ellipse* lorsque cette section n'est plus perpendiculaire à l'axe.

THÉORÈME

932. — *La section d'un cylindre de révolution par un plan oblique à l'axe est une ellipse.*

Menons au plan sécant AMA′ un autre plan qui lui soit perpendiculaire et qui, de plus, passe par l'axe OO′. Ce second plan, appelé *plan méridien*, rencontre la surface cylindrique suivant les génératrices BB′ CC′ et le plan sécant suivant une droite AA′. Décrivons dans le plan méridien deux cercles O et O′ tangents aux trois droites BB′ CC′ et AA′. Il est facile de voir que les centres O et O′ se trouvent à l'intersection de l'axe du cylindre et des bissectrices des angles BAA′, AA′C′. Soient F, F′ les points de contact des deux cercles avec AA′. Imaginons maintenant que la partie droite de la figure tourne autour de OO′; la génératrice BB′ engendrera la surface du cylindre, et les deux cercles engendreront deux sphères inscrites dans ce cylindre suivant les cercles de contact BC, B′C′ et qui seront tangentes au plan sécant aux points F et F′, car leurs rayons sont perpendiculaires à ce plan en ces mêmes points. Joignons un point quelconque M de la courbe de section aux points de contact F et F′ et menons la génératrice MNN′ du point M. Les droites MF et MN sont égales comme tangentes menées du même point à la même sphère; pour la même raison les droites MF′ et MN′ sont aussi égales; par suite nous avons les deux égalités :

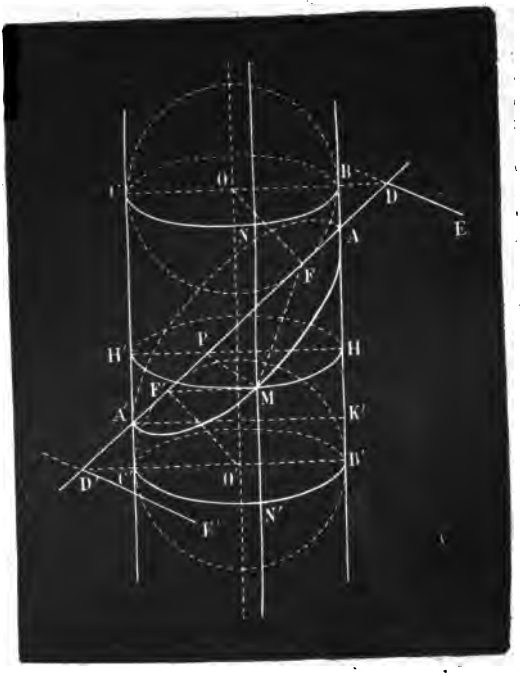


FIG. 582.

$$MF = MN \text{ et } MF' = MN',$$

d'où :

$$MF + MF' = MN + MN' = NN'.$$

Or, le segment de génératrice NN', compris entre deux plans parallèles, est constant et égal à la distance OO' des deux sphères. Le point M étant quelconque, il en résulte que la courbe AMA' est telle que la somme des distances de chacun de ses points aux deux points fixes F et F' est constante; cette courbe est donc une ellipse ayant pour foyers les points F et F'. C. q. f. d.

933. Remarque. — La droite AA' est le grand axe, car dans toute ellipse le grand axe est la droite qui passe par les foyers F, F' et se termine de part et d'autre à la rencontre de la courbe en A et A'. D'ailleurs on voit aisément que :

$$AA' = OO'.$$

Car $AF = AB$, $A'F = A'C$, $AF' = AB'$, $A'F' = A'C'$; or, si l'on ajoute ces quatre égalités membre à membre, on a :

$$2AA' = 2BB' = 2OO',$$

d'où :

$$AA' = BB' = OO'.$$

Le petit axe est égal au diamètre du cylindre, car cet axe est la droite perpendiculaire menée au milieu de AA' dans le plan sécant, cette ligne est donc aussi perpendiculaire à un plan méridien et comme elle passe par un point de l'axe OO', elle n'est autre que le diamètre du cylindre.

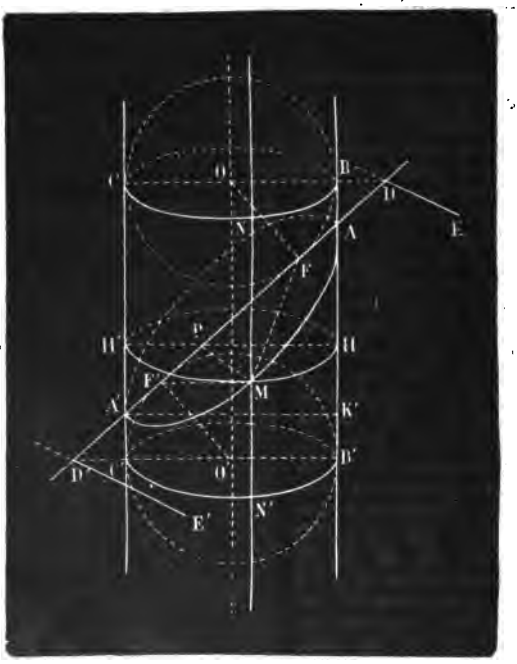


FIG. 583.

934. Corollaire I. — *La distance focale* FF', *de l'ellipse est égale au segment* AK' *de génératrice compris entre le sommet* A *de l'ellipse et la projection de l'autre sommet* A' *sur cette même génératrice.*

En effet,

$$AK' = BB' - AB - K'B';$$

mais nous venons de voir que :

$$BB' = AA'; \text{ d'ailleurs } AB = AF; \ K'B' = A'C' = A'F',$$

donc :

$$AK' = AA' - AF - A'F' = FF'.$$

935. Corollaire II. — *On peut toujours placer une ellipse donnée sur un cylindre de révolution dont le diamètre est égal au petit axe de cette ellipse.*

Car si l'on inscrit le grand axe AA' de l'ellipse donnée entre deux génératrices opposées BB', CC', le plan mené par AA' perpendiculairement au plan de ces deux génératrices coupe le cylindre suivant une ellipse qui a les mêmes axes que l'ellipse donnée et qui, par conséquent, lui est égale.

935 *bis*. Corollaire III. — *Les directrices de l'ellipse sont les intersections* DE, D'E' *du plan sécant avec les plans des cercles de contact* BNC, B'N'C'.

En effet, menons par un point quelconque M de l'ellipse un plan MHH' per-

pendiculaire à l'axe du cylindre. Ce plan est perpendiculaire au plan méridien; par suite, son intersection MP avec le plan sécant est perpendiculaire au grand axe AA′ de l'ellipse. La distance du point M à DE est donc égale à PD; d'autre part, sa distance au foyer F est MF = MN = HB. Or, les triangles semblables ABD, AHP donnent : $\frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AP} = \frac{AB + AH}{AD + AP} = \frac{HB}{PD}$;

mais AK′ étant égal à FF′ et les triangles ABD, AA′K′ étant semblables, nous avons encore : $\frac{AB}{AD} = \frac{AK'}{AA'} = \frac{FF'}{AA'} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{HB}{PD}$.

Ainsi, la distance HB = MF du point M au foyer F et la distance PD du même point à la perpendiculaire DE à l'axe AA′ sont dans le rapport $\frac{c}{a}$. Donc (923) DE est la directrice du foyer F. On verrait de même que DE′ est la directrice du foyer F′.

Dans le cas où le plan sécant est perpendiculaire à l'axe, les directrices s'éloignent à l'infini et la section est un cercle; or, on sait déjà que le cercle est une ellipse dont les foyers sont confondus.

§ II. — SECTIONS PLANES DU CONE DE RÉVOLUTION

(Méthode de Dandelin.)

936. — La section plane faite dans un cône de révolution peut rencontrer toutes les génératrices d'une même nappe, ou rencontrer les deux nappes du cône, ou encore être parallèle à une génératrice. Dans le premier cas, la section est une *ellipse*, dans le deuxième cas, elle est une *hyperbole* et, dans le troisième cas, une *parabole :* c'est ce que nous allons démontrer successivement.

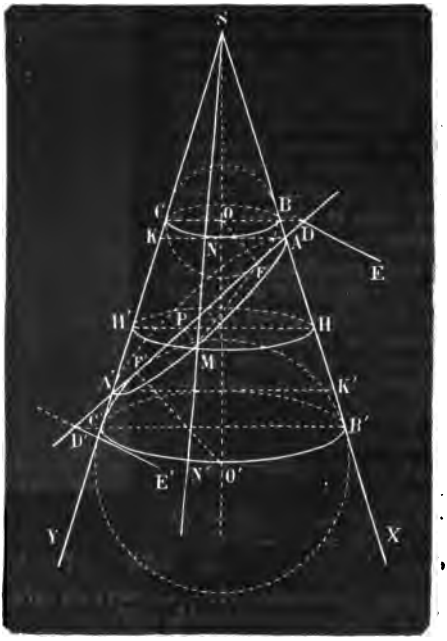


FIG. 584.

THÉORÈME

937. — *La section d'un cône de révolution par un plan qui rencontre toutes les génératrices d'une même nappe est une ellipse.*

La démonstration ci-dessous a la plus grande analogie avec celle du n° 932. Menons un plan méridien perpendiculaire au plan sécant AMA′ et coupant le cône selon les génératrices SBB′, SCC′ et le plan sécant suivant une droite AA′. Décrivons dans le plan méridien deux cercles O et O′ tangents aux trois droites BB′, CC′ et AA′. Soient F, F′ les points de contact des deux cercles avec AA′. Supposons, comme pour le cylindre, que la partie droite de la figure tourne autour de l'axe OO′, la génératrice SX engendrera la surface du cône, et les deux cercles engendreront deux sphères inscrites dans ce cône,

suivant les cercles de contact BC, B'C', et qui seront tangentes au plan sécant aux points F et F', car leurs rayons sont perpendiculaires au plan sécant en ces mêmes points. Joignons un point quelconque M de la courbe de section aux points de contact F et F' et menons la génératrice MNN' du point M. Les droites MF et MN sont égales comme tangentes menées du point M à la même sphère; pour la même raison les droites MF', MN' sont aussi égales; par suite, nous avons les deux égalités :

$$MF = MN \text{ et } MF' = MN',$$

d'où :

$$MF + MF' = MN + MN' = NN'.$$

Or, le segment de génératrice NN' compris entre deux plans parallèles BNC B'N'C' est constant et égal à la distance BB'. Le point M étant quelconque, il en résulte que la courbe AMA' est telle que la somme des distances de chacun de ses points aux deux points fixes F et F' est constante, cette courbe est donc une ellipse ayant pour foyers les points F et F'. D'ailleurs, la droite AA' passant par les foyers F et F' est le grand axe de l'ellipse. De plus

$$AA' = NN';$$

car

$$AF = AB, A'F = A'C, AF' = AB', A'F' = A'C';$$

et ajoutant membre à membre ces quatre égalités, il vient :

$$2\,AA' = CC' + BB' = 2\,NN';$$

d'où :

$$AA' = NN'.$$

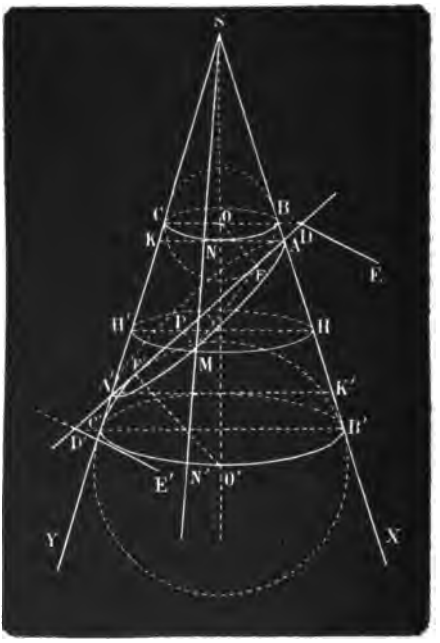


FIG. 585.

938. Remarque. — Au lieu de démontrer directement que la section d'un cylindre de révolution par un plan oblique à l'axe est une ellipse, on pourrait considérer cette proposition comme un corollaire du théorème précédent, car un cylindre de révolution n'est qu'un cône de révolution dont le sommet est à l'infini.

939. Corollaire I. — *La distance focale* FF' *de l'ellipse est égale au segment* AK' *de génératrice compris entre le sommet* A *de l'ellipse et la perpendiculaire à l'axe passant en* A'.

En effet,

$$AK' = BB' - AB - K'B';$$

mais

$$BB' = NN' = AA', \quad AB = AF$$

et

$$K'B' = A'C' = A'F',$$

donc

$$AK' = AA' - AF - A'F' = FF'.$$

940. Corollaire II. — *Le carré du petit axe ou* $4\,b^2$ *est égal au produit* $AK \times A'K'$ *des parallèles* AK, A'K'.

En effet, dans le triangle AA'K', il est facile de voir que la projection de la médiane issue du sommet A est égale à $\frac{AK}{2}$; par suite, on a (344, 2°) :

$$\overline{AA'}^2 - \overline{AK'}^2 = 4\,a^2 - 4\,c^2 = 4\,b^2 = \frac{AK}{2} \times 2\,A'K' = AK \times A'K'.$$

941. Corollaire III. — *Les directrices de l'ellipse sont les intersections* DE, D'E' *du plan sécant avec les plans des cercles de contact* BNC, B'N'C'.

En effet, menons par un point quelconque M de l'ellipse un plan MHH' perpendiculaire à l'axe du cône. Ce plan est perpendiculaire au plan méridien; par suite, son intersection MP avec le plan sécant est perpendiculaire au grand axe AA' de l'ellipse. La distance du point M à DE est donc égale à PD; d'autre part, sa distance au foyer F est MF = MN = HB. Or, des triangles semblables ABD, AHP, AA'K' et de AK' = 2c, on déduit, sans peine, les égalités suivantes :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AP} = \frac{AB + AH}{AD + AP} = \frac{HB}{PD} = \frac{AK'}{AA'} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

La distance HB = MF du point M au foyer F et la distance PD du même point à la perpendiculaire DE à l'axe AA' sont dans le rapport $\frac{c}{a}$. Donc (923) DE est la directrice du foyer F. On verrait de même que D'E' est la directrice du foyer F'.

942. Corollaire IV. — *On peut toujours placer une ellipse donnée sur un cône de révolution.*

En effet, dans le triangle AA'K, on connaît AA' = 2a et A'K = AK' = 2c; d'autre part, on connaît aussi l'angle opposé au côté AA', car cet angle vaut un droit plus l'angle CSO = $\frac{1}{2}$ BSC: ce qu'on voit facilement en menant par le point K une parallèle à SO. Comme on a constamment 2a > 2c et que l'angle opposé à AA' ou 2a est obtus, on pourra toujours construire le triangle AA'K, et il n'y aura qu'une solution. Le plan sécant perpendiculaire au plan méridien et passant par la droite inscrite AA' coupera le cône suivant une ellipse évidemment égale à la proposée.

943. Corollaire V. — *La tangente en un point* M *d'une section plane d'un cône et, en général, de toute surface est l'intersection du plan sécant avec le plan tangent à la surface au point* M, car cette tangente est *à la fois* dans le plan sécant et dans le plan tangent au *point* M.

THÉORÈME

944. — *La section d'un cône de révolution par un plan qui coupe les deux nappes est une hyperbole* (fig. 586).

Menons un plan méridien perpendiculaire au plan sécant et coupant le cône suivant les génératrices BSB', CSC' et le plan sécant suivant une droite AA'. Imaginons deux sphères O,O', obtenues comme plus haut (937), dont les points de contact avec le point sécant sont F,F' et ayant pour cercles de contact avec le cône les plans suivants : BC et B'C'. Joignons un point quelconque M de la courbe de section aux points de contact F et F'; puis menons la génératrice MNSN'; les droites MF et MN sont égales comme tangentes menées du point M à la même sphère; pour la même raison les droites MF', MN' sont aussi égales; par suite, nous avons les deux égalités :

$$MF = MN \text{ et } MF' = MN',$$

d'où : $$MF' - MF = MN' - MN = NN' = BB' = CC'.$$

Or, le segment de génératrice NN' compris entre deux plans parallèles BNC, B'N'C' est constant. Le point M étant quelconque, il en résulte que la courbe AMA' est telle que la différence des distances de chacun de ses points, aux deux points fixes F et F' est constante, cette courbe est donc une hyperbole ayant pour foyer les points F et F'.

D'ailleurs, la droite AA' passant par les foyers F et F' est l'axe transverse de l'hyperbole. De plus

$$AA' = NN' = BB';$$

car : $$AF' = AB', AF = AB,$$

d'où : $$AF' - AF = AB' - AB = BB';$$

de même : $$A'F - A'F' = CC'.$$

Ajoutant membre à membre ces dernières égalités, il vient :

$$AF' - AF + A'F - A'F' = 2AA' = BB' + CC' = 2BB',$$

d'où : $$AA' = BB'.$$

945. Corollaire I. — *La distance focale* FF′ *de l'hyperbole est égale au segment* AK′ *de génératrice compris entre le sommet* A *de l'ellipse et la perpendiculaire à l'axe passant en* A′.

C'est la même démonstration que pour l'ellipse ; car, on a :

$$AK' = BB' + AB + B'K';$$

mais $$BB' = AA',\ AB = AF \text{ et } B'K' = A'C' = A'F',$$

donc $$AK' = AA' + AF + A'F' = FF'.$$

946. Corollaire II. — *Les directrices de l'hyperbole sont les intersections* DE, D′E′ *du plan sécant avec les plans des cercles de contact* BNC, B′N′C′.

Même démonstration que pour l'ellipse.

947. Corollaire III. — *Les asymptotes sont parallèles aux génératrices du cône situées dans le plan passant par le sommet et parallèle au plan sécant.*

En effet, la tangente en un point M de la section est l'intersection du plan sécant avec le plan tangent au cône suivant la génératrice SM (943) ; mais les asymptotes sont les tangentes aux points situés à l'infini sur le cône ; ces points peuvent donc être considérés comme étant sur deux génératrices opposées parallèles au plan sécant ; par suite, les tangentes en ces points ou les asymptotes sont les intersections du plan sécant avec les plans tangents au cône suivant ces génératrices ; elles sont donc parallèles à ces génératrices qu'elles ne rencontrent qu'à l'infini.

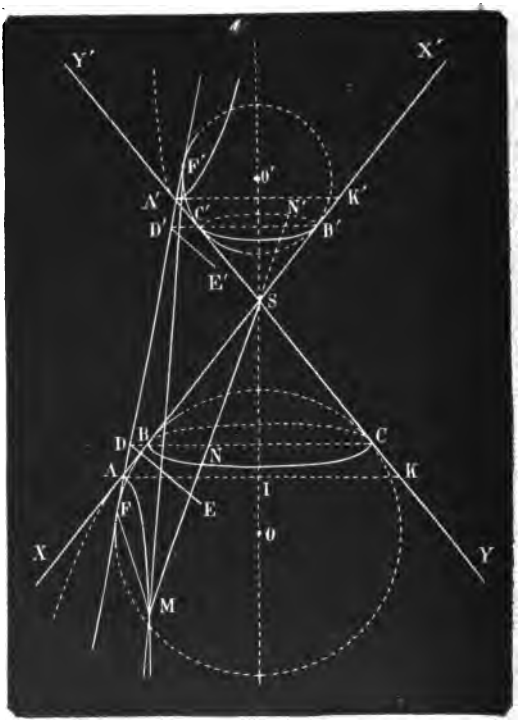


FIG. 586.

De plus, l'angle au sommet du cône formé par deux génératrices opposées étant l'angle maximum qu'on peut faire avec une génératrice et une autre génératrice quelconque, il en résulte que cet angle est aussi l'angle maximum des asymptotes.

948. Corollaire IV. — *On peut toujours placer une hyperbole donnée sur un cône de révolution pourvu que l'angle au sommet du cône ne soit pas inférieur à l'angle des asymptotes qui contient l'hyperbole.*

En effet, le problème consiste à construire le triangle ASA′ qui peut d'ailleurs se déduire facilement du triangle AKA′. Or, dans ce dernier triangle, nous connaissons AA′ égal à l'axe transverse de l'hyperbole donnée, le côté A′K = AK′ ou égal à la distance focale $2c$ et l'angle AKA′ égal au complément de la moitié de l'angle au sommet du cône. Mais le côté AA′ ou $2a$ opposé à l'angle connu étant plus petit que le côté adjacent A′K ou $2c$, le triangle ne peut être construit que si $2a$ est plus grand ou au moins égal à la distance du point A′ à la droite AK; par conséquent, si nous représentons par 2β l'angle au sommet du cône, il faudra que nous ayons :

$$2a \geqslant 2c \cos. \beta$$

ou

$$\frac{a}{c} \geqslant \cos. \beta.$$

D'autre part, en représentant par 2α l'angle des asymptotes de l'hyperbole, nous avons (890) :

$$\cos. \alpha = \frac{a}{c};$$

de sorte que la condition de possibilité est $\cos. \alpha \geqslant \cos \beta$,

ce qui donne

$$\alpha \leqslant \beta;$$

or, c'est précisément la condition demandée dans l'énoncé.

Si cette condition est satisfaite, on construira le triangle AKA′ et au milieu I de AK on élèvera une perpendiculaire IS. Le cône engendré par la droite AS en tournant autour de IS est égal au cône donné, et si ce cône est coupé par un plan mené par AA′ perpendiculairement au plan méridien XSY, la section plane ainsi déterminée est une hyperbole égale à l'hyperbole donnée. C. q. f. d.

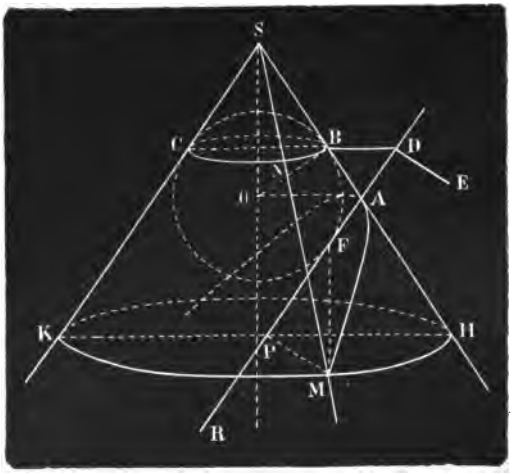


FIG. 587.

THÉORÈME

949. Corollaire. — *La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à une génératrice est une parabole.*

Menons un plan méridien perpendiculaire au plan sécant et coupant le cône suivant les génératrices SH, SK et le plan sécant suivant une droite AR. Supposons une sphère O, obtenue comme plus haut (947), dont le point de contact avec le plan sécant est en F et ayant pour cercle de contact avec le cône le plan suivant BC.

L'intersection DE du plan sécant avec le plan du cercle suivant BC est évidemment perpendiculaire au plan méridien. Menons la génératrice SM passant par un point quelconque M de la courbe de section; puis traçons un cercle HK passant par ce point et perpendiculaire à l'axe SO du cône. Ce cercle coupe le plan sécant suivant la droite MP perpendiculaire à AR; d'ailleurs MP, parallèle au plan du cercle BC, est parallèle à DE; par suite la distance du point M à DE est égale à PD; sa distance au point F est MF = MN = CK = PD. Les distances MF et PD du point M au point F et à la droite DE étant égales, la section est une parabole ayant F pour foyer et DE pour directrice.

950. Corollaire. — *On peut toujours placer une parabole donnée sur un cône de révolution.*

Il suffit, pour cela, de construire le triangle SOA, car ce triangle étant déterminé, on portera le côté SA sur la génératrice SH ; puis par le point A on mènera un plan perpendiculaire au plan méridien et parallèle à la génératrice SK. La section de ce plan sera évidemment une parabole égale à la parabole donnée. Or, le triangle SOA dépend du triangle rectangle AOB dans lequel on connaît AB, qui est égale à AF ou au demi-paramètre, et l'angle OAB qui est le complément du demi-angle au sommet du cône ; on pourra donc construire ce triangle. La perpendiculaire OS sur le côté OA rencontrera en S le côté AB et l'on obtiendra ainsi la longueur SA.

951. Remarque. — D'après les théorèmes précédents, appelés *Théorèmes de Dandelin*, on voit qu'une ellipse quelconque, ou une hyperbole, ou une parabole, peut être considérée comme la section d'un cône de révolution par un plan : c'est pour ce motif que chacune de ces courbes est désignée sous le nom de *section conique* ou simplement de *conique*.

ELLIPSOGRAPHE DE M. CARONNET

952. — Comme application du premier théorème de Dandelin, n° 932, M. Caronnet a construit un instrument pour tracer des ellipses. — Il se compose essentiellement d'une tige T maintenue fixe pendant le tracé de la courbe au moyen d'une tige verticale NK. La pointe *m* sera le centre de l'ellipse.

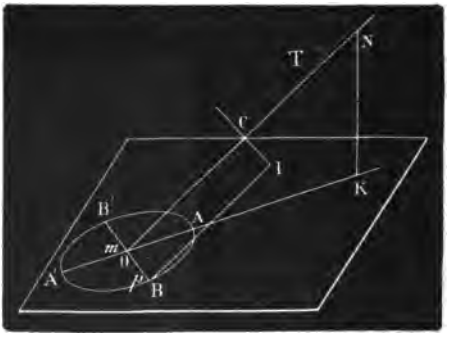


FIG. 388.

Le long de la tige T, une douille mobile C pouvant glisser sans frottement le long de T entraîne une tige rectangulaire CI*p* pouvant tourner autour de T en même temps qu'elle glisse le long de cette tige. La tige coudée CI*p* porte une pointe de crayon *p* qui trace l'ellipse en décrivant la section plane d'un cylindre circulaire dont le diamètre CI est égal au petit diamètre de l'ellipse OB et dont le grand axe se confond avec la projection OAK de T sur le plan de la figure. On peut varier les axes de l'ellipse en inclinant plus ou moins l'axe T et en faisant varier le rayon CI de la tige coudée.

ELLIPSOGRAPHE A RAINURES

Cet instrument est une application du :

THÉORÈME

953. — *Si une droite se déplace de façon que deux de ses points fixes* C *et* D *glissent sur deux droites rectangulaires*, OX, OY, *un point quelconque* M *de cette droite décrit une ellipse dont les demi-axes, dirigés dans les sens* OX *et* OY *sont respectivement égaux aux segments* MC, MD.

En effet, soient CD une position quelconque de la droite mobile et M un point sur le prolongement de cette droite. Menons par le point O une parallèle ON à DC jusqu'à la rencontre de l'ordonnée MP. La figure ODMN est un parallélogramme et ON = DM : donc le point N décrit un cercle ayant O pour centre et DM pour rayon. D'autre part, la similitude des triangles rectangles CMP, ONP donne : $\frac{MP}{NP} = \frac{MC}{ON}$ ou $\frac{MP}{NP} = \frac{MC}{MD}$.

Mais $\frac{MC}{MD}$ est un rapport constant. Donc (861), le lieu du point M est une ellipse ayant O pour centre et dans laquelle

$MD = a$ et $MC = b$.

La démonstration serait analogue si le point M était entre C et D.

Ce théorème fournit un procédé pour tracer une ellipse dont on connaît les axes. Sur une réglette horizontale DCM, dont l'extrémité M porte un crayon vertical destiné à décrire la courbe, on a fixé en D et en C deux petites tiges verticales assujetties à se déplacer dans des rainures rectangulaires XX′ et YY′.

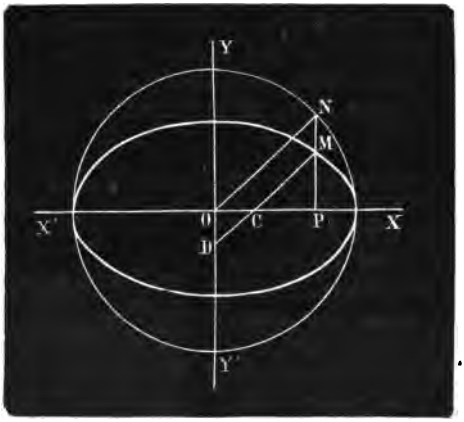


FIG. 589.

On fait varier les axes de l'ellipse tracée, en faisant varier $MD = a$ et $MC = b$.

CHAPITRE XI

Hélice.

NOTIONS SUR CETTE COURBE. — PROPRIÉTÉ DE LA TANGENTE

Définitions.

954. — On appelle *hélice* la courbe engendrée par une droite quelconque tracée sur un plan lorsqu'on enroule ce plan sur la surface d'un cylindre de révolution.

Supposons un cylindre de révolution ABCD et un rectangle AKLD qui a même hauteur AD que le cylindre et une base AK égale à la longueur de la circonférence de la base du cylindre. Si, après avoir partagé le rectangle total AKLD en petits rectangles égaux dont les diagonales sont AG, EH, FL, nous l'enroulons sur le cylindre, les lignes AK, DL resteront perpendiculaires à la génératrice DA et viendront coïncider avec les circonférences des bases du cylindre, tandis que les droites AG, EH, FL traceront sur sa surface latérale une courbe continue qui est une hélice.

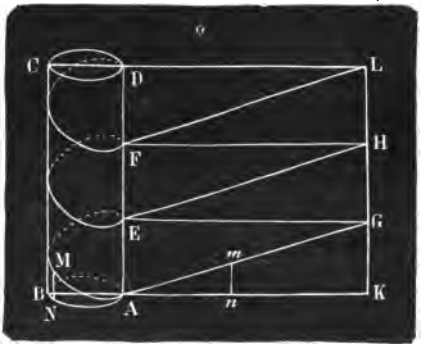


FIG. 590.

Mais, ainsi qu'il résulte de la définition même de l'hélice, on peut la considérer comme engendrée par une seule ligne AG (*fig.* 591), car si l'on suppose le plan du rectangle indéfini et qu'on l'enroule autour du cylindre un nombre de fois illimité, la droite AG décrira le commencement de l'hélice, EH décrira ce qui fait suite, etc.

On nomme *spire* chaque segment de l'hélice faisant un tour entier du cylindre et dont les extrémités A et E (*fig.* 590). sont sur la même génératrice AD.

Le *pas de l'hélice* est l'intervalle AE compris entre les extrémités d'une spire.

On appelle *ordonnée* d'un point M de l'hélice la perpendiculaire MN abaissée de ce point sur le plan de la base du cylindre.

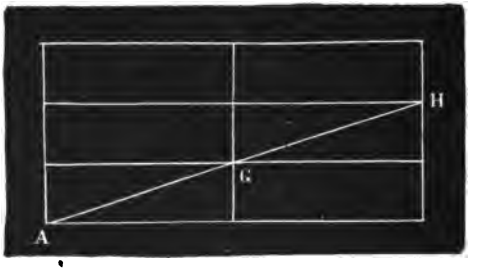


FIG. 591.

On nomme *abscisse curviligne* d'un point M de l'hélice l'arc AN compris entre l'origine de l'hélice et le pied N de l'ordonnée de ce point.

THÉORÈME

955. — *L'ordonnée d'un point de l'hélice est proportionnelle à son abscisse curviligne* (fig. 590).

En effet, soient M un point de l'hélice et m un point de la droite AG qui vient se placer en M dans l'enroulement de cette droite. Il est évident que dans le mouvement de AG le point m est resté constamment à la même distance du plan de base du cylindre, donc mn est égale à l'ordonnée MN, et An est égale à l'abscisse curviligne AN.

Or, les triangles semblables Amn, AGK donnent :

$$\frac{mn}{GK} = \frac{An}{AK}.$$

Si l'on représente par h le pas de l'hélice, par R le rayon du cylindre et qu'on remplace mn et An par leurs valeurs respectives MN et arc AN, on a :

$$\frac{MN}{h} = \frac{\text{arc AN}}{2\pi R},$$

d'où :

$$MN = \text{arc AN} \times \frac{h}{2\pi R}.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer, car $\frac{h}{2\pi R}$ est une quantité constante.

956. Définition. — On appelle *sous-tangente* à l'hélice la projection NT sur le plan de base du cylindre (*fig.* 592) de la partie MT de la tangente comprise entre le point de contact M et le point T où elle rencontre le plan de la base.

THÉORÈME

957. — *La sous-tangente à l'hélice est égale à l'abscisse curviligne du point de contact.*

Ainsi NT étant la sous-tangente du point M, il faut prouver que :

$$NT = \text{arc } AN.$$

A cet effet, menons la sécante MM′ et les ordonnées MN, M′N′ des points M et M′. Soit R le point de rencontre des sécantes MM′, NN′ à l'hélice et au cercle de base du cylindre. Traçons MK parallèle à la corde NN′. Les triangles semblables MNR et MM′K donnent :

$$\frac{NR}{MK} = \frac{MN}{M'K},$$

d'où :

FIG. 592.

$$NR = \frac{MK \times MN}{M'K}. \qquad (1)$$

Or les points M et M′ étant sur l'hélice, on a (955) :

$$MN = \text{arc } AN \times \frac{h}{2\pi R}$$

$$M'N' = \text{arc } AN' \times \frac{h}{2\pi R};$$

par suite,

$$M'K = M'N' - MN = (\text{arc } AN' - \text{arc } AN) \times \frac{h}{2\pi R} = \text{arc } NN' \times \frac{h}{2\pi R}.$$

Remplaçant dans (1) MN, M′K par leurs valeurs respectives et MK par la droite NN′ qui lui est égale, il vient :

$$NR = \frac{\text{corde } NN'}{\text{arc } NN'} \times \text{arc } AN. \qquad (2)$$

Mais si la sécante RMM′ tourne autour du point M, les points M et M′ se rapprochent indéfiniment de même que les points N et N′ ; alors la corde NN′ tend vers l'arc NN′, de sorte que le rapport $\frac{\text{corde } NN'}{\text{arc } NN'}$ tend

vers l'unité. A la limite, c'est-à-dire lorsque MR est devenue la tangente MT et NR, la sous-tangente NT, ce rapport est donc égal à l'unité, par suite la relation (2) se réduit à la suivante :

limite NR ou NT = arc AN. C. q. f. d.

THÉORÈME

958. — *La tangente à l'hélice fait un angle constant avec la génératrice du cylindre.*

Soit AM un arc de l'hélice décrit par la droite AG. Si l'on suppose que le point *m* de cette droite réponde au point M de l'hélice, les perpendiculaires *mn* et MN aux bases du rectangle et du cylindre seront égales, et de plus on aura :

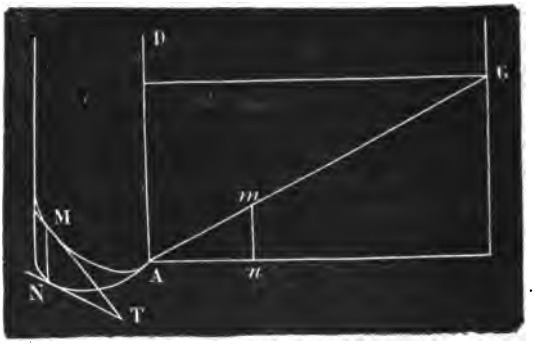


FIG. 503.

$$An = \text{arc } AN.$$

Mais si MT est la tangente à l'hélice au point M et NT la sous-tangente, les deux triangles rectangles MNT, *Amn* auront MN = *mn* et NT = arc AN = côté *An*, donc ces deux triangles seront égaux, et par conséquent,

$$\text{Angle NMT} = \text{angle } Amn.$$

Or, l'angle *Amn* est constant, car c'est l'angle sous lequel la droite AG, qui engendre l'hélice, coupe dans toutes ses positions la génératrice AD du cylindre.

PROBLÈME

959. — *Construire les projections de l'hélice et de sa tangente.*

Prenons pour plan horizontal de projection le plan de base du cylindre sur lequel l'hélice a été tracée, et pour plan vertical un plan qui soit parallèle à un plan passant par l'axe du cylindre et

l'origine de l'hélice. Soient le rectangle $a'a''b''b'$ formant le contour apparent du cylindre sur le plan vertical, $a'a''$ le pas de l'hélice et a le point où elle commence.

Cela posé, partageons la circonférence de la base en un certain nombre de parties égales, en 16, par exemple, et désignons par M un point de la première spire de l'hélice qui se projette horizontalement en m. Or, l'arc am est les $\frac{5}{16}$ de la circonférence $adbc$; par conséquent, la hauteur du point M au-dessus du plan horizontal devra être les $\frac{5}{16}$ du pas de l'hélice; divisons donc la hauteur $a'a''$ en 16 parties égales, et par la cinquième division n menons une parallèle à la ligne de terre xy jusqu'à la rencontre d'une perpendiculaire à cette ligne menée par le point m : nous obtiendrons ainsi le point m' qui sera la projection verticale du point M.

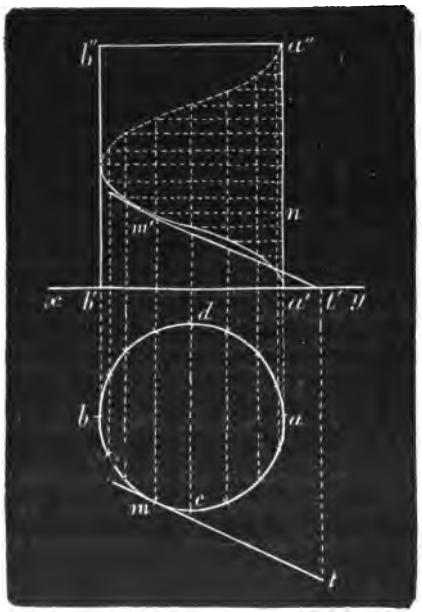


FIG. 594.

On trouvera de même la projection verticale d'un certain nombre de points de la spire. On les réunira ensuite par un trait continu.

Pour avoir la projection de la tangente au point m, menons mt tangente au cercle de la base, et prenons sur cette ligne une longueur mt égale à l'abscisse curviligne am : mt sera la longueur de la sous-tangente (957), et le point t la trace horizontale de la tangente. Donc si l'on abaisse tt' perpendiculairement sur la ligne de terre, $m't'$ sera la projection verticale de la tangente.

EXERCICES SUR LE LIVRE VIII

772. — Construire une ellipse connaissant ses foyers et un de ses points.

773. — Quel est le lieu des points également distants de deux circonférences dont l'une est intérieure à l'autre?

774. — Construire une ellipse connaissant la position du petit axe et l'un des foyers.

775. — Le grand axe de l'ellipse est divisé par chaque foyer en deux parties dont le produit est égal à b^2.

776. — Trouver le lieu des points tels que la différence des carrés des distances de chacun d'eux aux foyers de l'ellipse soit $4a^2$.

777. — La somme du carré de la droite qui joint un point d'une ellipse à son centre et du produit des deux rayons vecteurs du même point est constante et égale à la somme des carrés du demi-grand axe et du demi-petit axe.

778. — Construire une ellipse connaissant $2b$ et $2c$.

779. — Le carré d'un diamètre quelconque d'une ellipse est égal au carré du petit axe augmenté du carré de la différence des deux rayons vecteurs qui vont à l'une des extrémités de ce diamètre.

780. — Tout diamètre de l'ellipse est plus grand que le petit axe et moindre que le plus grand.

781. — Le lieu des projections des foyers d'une ellipse sur ses tangentes est une circonférence de cercle concentrique à cette ellipse et décrite sur son grand axe comme diamètre.

782. — Le produit des distances des foyers de l'ellipse à une tangente est égal à b^2.

783. — Construire une ellipse connaissant les deux foyers et une tangente.

784. — Pour tout point de l'ellipse, les rayons vecteurs MF', MF ont pour valeur $a + \frac{cx}{a}$ et $a - \frac{cx}{a}$. L'origine des abscisses est le centre de la courbe.

785. — Pour tout point M de l'ellipse, on a : $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$.

786. — Si l'on décrit un cercle sur le grand axe de l'ellipse, et que, d'un point quelconque de cet axe, on mène une ordonnée au cercle et à l'ellipse à la fois, Y et y étant ces ordonnées, on a : $\frac{Y}{y} = \frac{b}{a}$.

787. — L'aire de l'ellipse est moyenne proportionnelle entre celles des cercles décrits sur ses deux axes pris pour diamètres.

788. — Trouver la superficie d'une ellipse pour laquelle on a : $2c = 14^m$ et $2b = 12^m$.

789. — Tout diamètre de l'hyperbole est plus grand que $2a$.

790. — Construire une hyperbole connaissant ses foyers et un de ses points.

791. — Construire une hyperbole connaissant $2b$ et $2c$.

792. — Construire une hyperbole connaissant $2a$ et $2b$.

793. — Chaque sommet de l'hyperbole divise la distance des foyers en 2 parties dont le produit est égal à b^2.

794. — Trouver le lieu des points tels que la différence des carrés des distances de chacun d'eux aux foyers de l'hyperbole soit égal à $4a^2$.

795. — Construire une parabole connaissant son foyer et son sommet.

796. — Construire une parabole connaissant son paramètre.

797. — Construire une parabole dont on connaît : 1° la directrice et deux points ; 2° le foyer et deux points.

798. — La distance du foyer à la tangente est moyenne proportionnelle entre le rayon vecteur du point de contact et le demi-paramètre.

799. — Les carrés des distances du foyer aux tangentes à la parabole sont dans le même rapport que les rayons vecteurs correspondants.

800. — Construire une parabole connaissant la sous-tangente et l'ordonnée correspondante.

801. — Construire une parabole, connaissant la distance d'une tangente au foyer et le rayon vecteur du point de contact.

802. — Dans la parabole, la parallèle à l'axe menée par le point de rencontre de deux tangentes partage en deux parties égales la corde qui joint les points de contact.

803. — Si l'on mène les ordonnées de deux points M, M′ d'une parabole, le trapèze, MM′P′P que l'on obtient, en tirant MM′, a une surface double de celle du triangle NTT′ formé par l'axe et les tangentes aux points M et M′.

804. — L'aire d'un segment parabolique compris entre l'axe et une ordonnée est équivalente aux $\frac{2}{3}$ du rectangle qui a pour dimensions l'ordonnée du segment et son abscisse.

805. — Dans la parabole, les carrés de deux ordonnées y et y' sont entre eux comme les abscisses x et x'. L'origine des abscisses est le sommet de la courbe.

806. — Construire une parabole connaissant une ordonnée et l'abscisse correspondante.

807. — Trouver le paramètre d'une parabole AM dont la direction de l'axe est donnée.

808. — Inscrire un cercle dans un segment de parabole déterminé par une corde perpendiculaire à l'axe.

INVERSION

CHAPITRE PREMIER

Définitions. — Figures inverses. — Égalité des angles dans les figures inverses. — Figure inverse d'une droite, d'un cercle, d'un plan, d'une sphère. — Homothétie et inversion.

§ Ier. — DÉFINITIONS. — FIGURES INVERSES

960. — Si les points A, B, C,... et A′, B′, C′... de deux figures F et F′ d'un même plan, sont sur des droites concourantes en un même point O, et si de plus les produits

$$OA \times OA' ; \ OB \times OB' ; \ OC \times OC' ;...$$

sont tous égaux à un nombre constant p, on dit que les figures F et F′ sont *inverses* ou *réciproques* l'une de l'autre.

La figure inverse d'une autre figure est aussi une *transformée* par *rayons vecteurs* réciproques.

Le point O est l'*origine* ou le *pôle d'inversion;* la constante p est la *puissance d'inversion.*

Cette puissance est positive ou négative, selon que les rayons correspondants OA.OA′ sont de même sens ou de sens contraire.

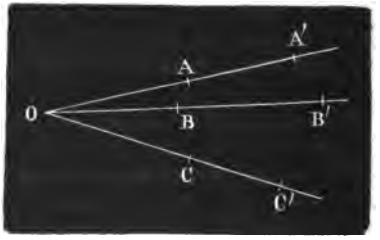


FIG. 595.

961. — La définition de l'*inversion* dans le cas où le point O est dans le plan de la figure, s'étend sans aucune modification, au cas où la figure F est quelconque, plane ou a trois dimensions et où le point O est situé d'une façon quelconque dans l'espace. — Si une figure F′ est inverse d'une figure F, réciproquement F est inverse de F′ ; car F′ est formé avec F comme F l'est avec F′.

THÉORÈME

962. — *La droite qui joint deux points d'une figure est égale à la longueur de la droite qui joint les points correspondants d'une figure inverse multipliée par le rapport de la puissance d'inversion au produit des rayons vecteurs terminés aux extrémités de cette seconde droite.*

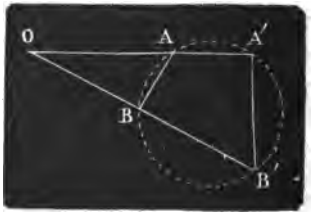


FIG. 596.

Si A, B sont deux points d'une figure F, et A′, B′ deux points correspondants

d'une figure F' inverse de F, l'origine étant O et la puissance p, on devra avoir d'après l'énoncé,

$$AB = A'B'. \frac{p}{OA'.OB'}.$$

En effet, le quadrilatère AA'BB' est inscriptible (358); par suite, les angles B' et OAB sont égaux comme ayant l'un et l'autre pour mesure la moitié de l'arc BAA' (231). Donc les triangles OAB et OA'B' sont semblables; leur similitude, donne:

$$\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'} = \frac{AB}{A'B'},$$

d'où

$$AB = A'B'. \frac{OA}{OB'}.$$

Mais on a, par hypothèse,

$$OA.OA' = OB.OB' = p,$$

par suite

$$OA = \frac{p}{OA'};$$

donc, en remplaçant OA par sa valeur, on a

$$AB = A'B'. \frac{p}{OA'.OB'}.$$

On aurait de même

$$A'B' = AB. \frac{p}{OA.OB}.$$ C. q. f. d.

THÉORÈME

963. — *Les tangentes à deux courbes inverses en deux points correspondants font, avec le rayon recteur passant par ces points, deux angles intérieurs d'un même côté égaux.*

Soient deux couples de points réciproques A et A', B et B' qui se correspondent sur deux courbes inverses V et V'.

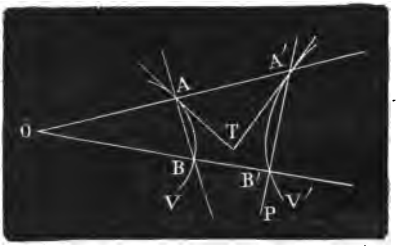


FIG. 597.

Nous avons vu (962) que le quadrilatère ABB'A' est inscriptible; par suite, les angles BAA', OB'P sont égaux comme étant l'un et l'autre supplémentaire du même angle OB'A'. Si donc on fait tourner le rayon OBB', autour du point O, jusqu'à ce qu'il vienne, à la limite, s'appliquer sur le rayon OAA', il arrive alors que les cordes AB et A'B' coïncident en A et A' avec les tangentes AT, A'T; mais pendant le mouvement du rayon OBB', les angles BAA', OB'P n'ont pas cessé d'être égaux, donc ils le sont encore à la limite, donc enfin

$$TAA' = TA'A.$$

Il résulte de cette démonstration que le triangle AA'T est isocèle.

964. Corollaire I. — *L'angle de deux courbes* U *et* V *qui se coupent en un point* A *est égal à l'angle des deux courbes* U′ *et* V′ *inverses des précédentes qui se coupent en* A′, *point correspondant de* A.

Les droites TA et T′A sont des tangentes en A aux courbes U et V ; de même TA′ et T′A′ sont des tangentes en A′ aux courbes V′ et U′. Il s'agit donc de démontrer que les angles TAT′ et TA′T′ sont égaux.

Or, cette égalité résulte de ce que ces angles sont l'un et l'autre symétriques par rapport au plan perpendiculaire sur le milieu de AA′.

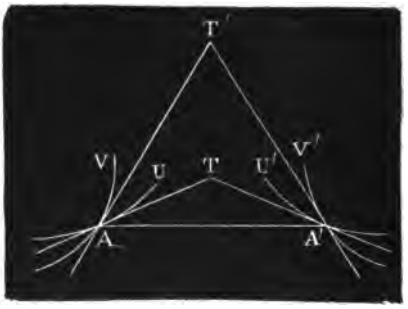


FIG. 598.

965. Corollaire II. — *Deux surfaces se coupent sous le même angle que leurs inverses.*

En effet, si une surface S admet un plan tangent en un point A, son inverse S_1 admet au point correspondant A′ un plan tangent symétrique du premier par rapport au plan perpendiculaire sur le milieu de la ligne AA′ qui joint les points de contact.

Par conséquent, deux surfaces S et S′ font en chaque point de leur ligne d'intersection le même angle que leurs inverses S_1 et S'_1, aux points correspondants de leur ligne d'intersection.

THÉORÈME

966. — *Deux figures* F′ *et* F″ *inverses d'une même figure* F, *ayant même origine et des puissances d'inversion différentes sont homothétiques entre elles.*

En effet, si p et p' sont les puissances d'inversion des figures F′ et F″ et si A, A′, A″ sont des points correspondants dans les figures F, F′, F″, on a :

$$OA'.OA = p$$
$$OA''.OA = p',$$

d'où
$$\frac{OA'}{OA''} = \frac{p}{p'},$$

Donc O est le centre et $\frac{p}{p'}$ est le rapport d'homothétie des figures F′ et F″.

THÉORÈME

967. — *La figure inverse d'un cercle passant par l'origine est une droite perpendiculaire au diamètre mené par l'origine.*

En effet, soient C le cercle, O l'origine et p la puissance d'inversion.

D'autre part, soient A l'extrémité du diamètre passant en O, M un point quelconque du cercle et A′, M′ deux points correspondants de la figure inverse.

Le quadrilatère AMM′A′ est inscriptible (962) et l'on a : $OA.OA' = OM.OM' = p$.

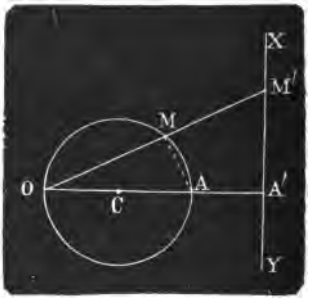


FIG. 599.

D'où il résulte que OA′ est constant, par suite la perpendiculaire abaissée d'un point M′ du lieu passe constamment en A′ : le lieu cherché est donc cette perpendiculaire elle-même.

968. — Réciproquement, *la figure inverse d'une droite* XY *par rapport à un point extérieur* O *est un cercle passant en* O, *et dont le centre est sur la perpendiculaire* OA′ *à* XY (*fig.* 599).

Car deux figures inverses sont réciproques (961).

THÉORÈME

969. — *L'inverse d'un plan ne passant pas par le pôle est une sphère passant par le pôle d'inversion.*

La figure inverse du plan peut s'obtenir en faisant tourner autour de la perpendiculaire OA′ (fig. 599) abaissée du pôle O sur le plan donné le cercle inverse de la droite suivant laquelle ce plan est coupé par un plan quelconque passant par OA. — Le plan donné est parallèle au plan tangent mené par O à la sphère d'inversion. — Le diamètre de cette sphère est égal à $\frac{p}{OA'} = OA$.

On a, comme précédemment, $OA \times OA' = OM \times OM' = p$.

Remarque. — Il est évident que si le plan passe par le pôle O, il est son propre inverse.

970. Réciproquement. — L'inverse d'une sphère passant par le pôle est un plan.

En effet, deux figures inverses sont réciproques (961).

Remarque. — Une sphère et un plan peuvent toujours être regardés comme deux figures inverses. Le pôle d'inversion est l'une ou l'autre des extrémités du diamètre perpendiculaire au plan.

La puissance d'inversion est donnée par les formules

$$p = 2R(R - d)$$

et

$$p_1 = 2R(R + d),$$

où R désigne le rayon de la sphère, et d la distance du plan au centre C. On emploie la première formule si l'on prend comme pôle l'extrémité du diamètre la plus rapprochée du plan ; on prendra la seconde formule, si le pôle est sur l'extrémité du diamètre la plus éloignée du plan. La première formule est positive seulement dans le cas où le plan coupe la sphère. — La seconde formule est toujours positive. Lorsque le plan est tangent à la sphère, la puissance d'inversion est zéro ou $4R^2$ suivant que le pôle est au point de contact ou à l'extrémité du diamètre qui passe par ce point.

Lorsque le plan passe par le centre de la sphère, la puissance d'inversion est $2R^2$.

THÉORÈME

971. — *La figure inverse d'un cercle ne passant pas à l'origine est un autre cercle homothétique du premier par rapport au pôle d'inversion.*

La figure inverse d'un cercle C, en prenant O pour origine et p' pour puissance d'inversion, est le cercle lui-même; car une sécante quelconque menée

par le point O coupe le cercle en deux points M et N tels qu'on a la relation connue

$$OM.\,ON = p'.$$

Mais la figure inverse du cercle C, dont l'origine est O et la puissance p, est (966) homothétique du cercle C, c'est donc un cercle C′ (306).

Alors on a

$$OM.\,ON' = p.$$

Divisant les deux relations trouvées membre à membre, il vient

$$\frac{ON'}{ON} = \frac{p}{p'}.$$

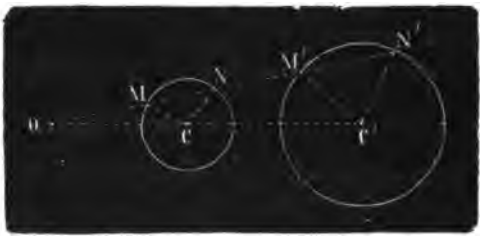


FIG. 600.

D'où il résulte que le centre d'homothétie est O et que le rapport d'homothétie du cercle C′ au cercle C est $\frac{p}{p'}$, l'homothétie est d'ailleurs directe ou inverse, selon que ce rapport est positif ou négatif.

972. — Réciproquement, *deux cercles homothétiques sont deux figures inverses par rapport à l'un des centres de similitude pris pour pôle d'inversion.*

Soient C, C′ deux cercles homothétiques (*fig.* 600) et O un de leurs centres de similitude. Je dis que ces deux cercles sont inverses.

En effet, il est facile de voir que :

$$\frac{ON}{ON'} = \frac{R}{R'} \text{ et } \frac{OM'}{OM} = \frac{R'}{R};$$

multipliant ces égalités membre à membre, il vient :

$$\frac{ON.OM'}{ON'.OM} = \frac{R.R'}{R'.R} = 1.$$

d'où

$$ON.OM' = ON'.OM.$$

Ce qui prouve la réciprocité des cercles C et C′.

THÉORÈME

973. — *La figure inverse d'une sphère ne passant pas par le pôle est une sphère homothétique de la première par rapport au pôle d'inversion.*

Pour le démontrer, il suffit de faire tourner la figure 600 autour de OCC′ comme charnière. Il est dès lors facile de tirer les conclusions du théorème précédent relatif au cercle. Le centre d'homothétie est O et le rapport d'homothétie de la sphère C′ à la sphère C est $\frac{p}{p'}$; l'homothétie est directe ou inverse selon que ce rapport est positif ou négatif. — Si $p = p'$, la sphère est sa propre inverse à elle-même.

Réciproquement, *deux sphères quelconques peuvent être considérées comme deux figures inverses par rapport à l'un ou à l'autre de leurs centres d'homothétie pris pour pôle d'inversion.*

Démonstration analogue à celle du n° 972.

THÉORÈME

974. — 1° *La figure inverse d'un cercle C, dont le plan ne passe pas par le pôle d'inversion O, est un cercle C'.*

2° *Les deux cercles inverses C et C' sont sur la même sphère.*

1° Considérons un cercle C et un pôle O non situé dans son plan. Ce cercle C peut être regardé comme l'intersection du plan P de ce cercle C, et d'une sphère S passant par le pôle O. Les deux figures inverses de P et de S par rapport au point O seront une sphère S' inverse de P (969), et un plan P' inverse de S (970). Ces deux figures inverses, par leur intersection, détermineront un cercle C' qui sera l'inverse de C.

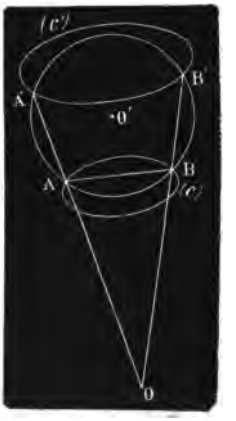


FIG. 600 *bis*.

2° Les deux cercles inverses sont sur la même sphère.

Soient A et B deux points du premier cercle, A' et B' deux points correspondants du second. Les quatre points A, B, A', B' forment un quadrilatère inscriptible (358) et sont sur un même cercle O', lequel avec le premier cercle considéré (C) détermine une sphère. En effet, les deux perpendiculaires menées par les centres de ces cercles, contenues dans un même plan perpendiculaire sur le milieu de AB, doivent se rencontrer en un même point qui est le centre de la sphère.

Cette sphère coïncide avec son inverse puisque $OA \times OA'$, puissance du pôle O par rapport à cette sphère, est égal à la puissance d'inversion (973). Donc cette sphère passant par le premier cercle (C) passera également par son inverse (C').

Points antihomologues.

975. Définitions. — Si deux cercles C et C' sont homothétiques, ils sont également inverses (972); de sorte qu'un centre d'homothétie, tel que O, est en même temps pôle d'inversion.

Si, d'autre part, on mène à ces cercles deux sécantes quelconques, les couples de points qui se correspondent dans l'homothétie, c'est-à-dire les points E et E', F et F', G et G', H et H' sont dits *homologues*. Les couples de points qui se correspondent dans l'inversion sur les mêmes droites, sont E et F', F et E', G et H', H et G'. Les points de chacun de ces couples sont dits *antihomologues*. Les cordes telles que FH, E'G', dont les extrémités sont des points antihomologues, sont elles-mêmes dites *antihomologues*.

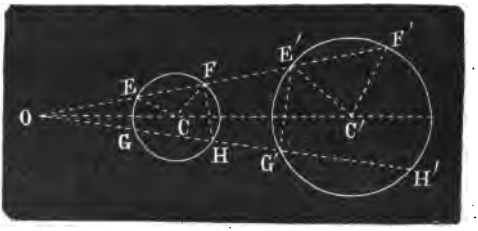


FIG. 601.

Par suite de triangles semblables faciles à voir, on a les égalités suivantes :

$$OE.OF' = OF.OE' = OG.OH' = OH.OG'.$$

Ces quatre produits égaux font connaître que : *Si l'on mène par le centre d'homothélie* O *deux sécantes et qu'on prenne, à volonté, quatre points d'intersection, de façon qu'il n'y en ait pas deux qui soient homothétiques, ces quatre points sont sur un même cercle.*

En groupant les points comme il est indiqué, on aurait les quatre cercles :

FHG'E', EGE'G', FHF'H', EGF'H'.

THÉORÈME

976. — *Deux cordes antihomologues se coupent sur l'axe radical des deux cercles.*

En effet, soient les cordes MN, M'N' antihomologues dans les cercles C, C'

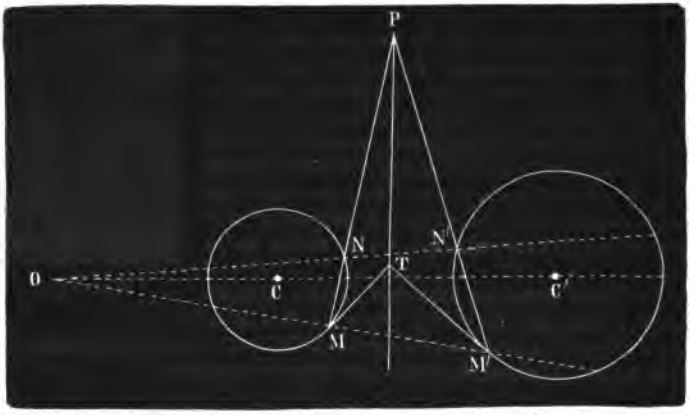


FIG. 602.

inverses par rapport à l'origine O, et P le point de concours de ces cordes. On a (975) :

$$OM.OM' = ON.ON'.$$

Donc les quatre points M, N, M', N' sont sur un même cercle. D'où il résulte que :

$$PM.PN = PM'.PN'.$$

Le point P ayant même puissance par rapport aux cercles C et C', est sur l'axe radical de ces cercles.

977. Corollaire. — *Les tangentes à deux cercles en deux points antihomologues se coupent sur l'axe radical de ces cercles* (*fig.* 370).

Car le théorème est vrai quelle que soit la longueur des cordes : donc, il sera encore vrai si elles sont infiniment petites, c'est-à-dire si les points N et N' se confondent avec les points M et M', cas où les sécantes MNP, M'N'P deviennent les tangentes MT, M'T.

978. Théorème. — *Deux cordes antihomologues se coupent sur le plan radical des deux sphères.*

979. Corollaire. — *Les plans tangents à deux sphères en deux points antihomologues, se coupent sur le plan radical des deux sphères.*

CHAPITRE II

Applications. — Théorème de Ptolémée. — Cercle tangent à deux cercles, à trois cercles. — Appareil de Peaucellier. — Projection stéréographique.

§ 1er. — APPLICATION I. — THÉORÈME DE PTOLÉMÉE

980. — *Le produit des diagonales d'un quadrilatère inscriptible est égal à la somme des produits des côtés opposés.*

Soient ABCD le quadrilatère inscrit et XY la transformée du cercle par rayons vecteurs réciproques. Si l'on prend le sommet A pour origine, les sommets B, C, D auront pour points réciproques B′, C′, D′. On a d'abord la relation évidente

$$B'D' = B'C' + C'D'.$$

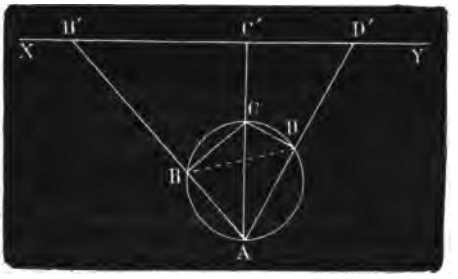


FIG. 603.

Mais (962).

$$B'D' = BD.\frac{p}{AB.AD},$$

$$B'C' = BC.\frac{p}{AB.AC},$$

$$C'D' = CD.\frac{p}{AC.AD}.$$

Remplaçant les segments B′D′, B′C′ et C′D′ par leurs valeurs respectives, et supprimant p de part et d'autre, il vient :

$$\frac{BD}{AB.AD} = \frac{BC}{AB.AC} + \frac{CD}{AC.AD}.$$

et si l'on chasse les dénominateurs et qu'on simplifie, on a enfin

$$BD.AC = BC.AD + CD.AB. \qquad \text{C. q. f. d.}$$

APPLICATION II. — PROBLÈMES

981. — *Mener par un point A un cercle tangent à deux cercles donnés* C *et* C′.

Supposons le problème résolu et soit I le cercle demandé tangent aux cercles donnés en D et D′.

Tirons la corde des contacts DD′. Les points D et D′ étant les centres de similitude inverse (308) des cercles I et C d'une part, I et C′ de l'autre sont en ligne droite (310) avec le centre O de similitude directe des cercles C et C′. D'ailleurs, en traçant AO, on voit immédiatement que, si l'on connaissait le point B où cette droite rencontre le cercle I, le problème ne consisterait plus qu'à mener par deux points A et B, un cercle tangent à un cercle donné C

question déjà résolue (382). La difficulté est donc de déterminer le point B. Or les sécantes OA, OD donnent :

$$OA.OB = OD.OD';$$

mais les deux couples de points D et D', E et E' sont antihomologues : ils sont donc sur un même cercle, d'où la relation :

$$OD.OD' = OE.OE';$$

par suite,

$$OA.OB = OE.OE',$$

d'où

$$OB = \frac{OE\ OE'}{OA}.$$

La droite OB est donc une quatrième proportionnelle aux trois lignes connues OE, OE' et OA. Le point B est donc déterminé.

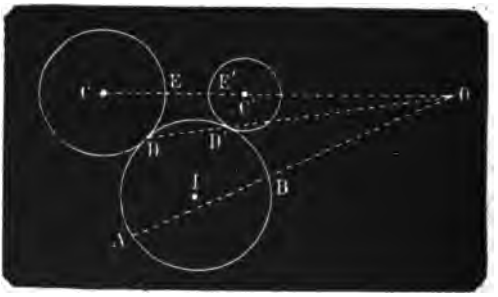


FIG. 604.

On ferait un raisonnement analogue dans le cas où le cercle demandé devrait être tangent intérieurement aux mêmes cercles; ou s'il devait être tangent extérieurement à l'un et intérieurement à l'autre. Il y a donc en tout quatre solutions.

382. — *Décrire un cercle* O *tangent à trois cercles donnés* A, B, C.

Supposons le problème résolu. Si nous menons OA, OB, OC, ces droites contiendront évidemment les points de contact D, E, F. D'autre part, on voit sans peine que si du point B comme centre on décrit un cercle de rayon R' — R et un du point C de rayon R'' — R, ces deux cercles seront tangents à un cercle passant en A, et dont le centre est le même que celui du cercle demandé. C'est alors le cas du n° précédent.

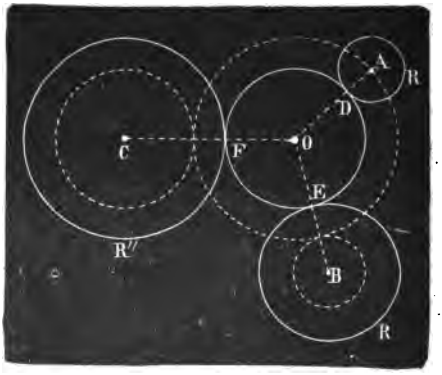


FIG. 605.

Ce problème a huit solutions formant quatre groupes de deux; car le cercle O, au lieu d'être tangent *extérieurement* aux cercles A, B, C, pourrait leur être tangent *intérieurement*, ce qui donnerait une seconde solution. De même, le cercle O peut être tangent *extérieurement* au cercle A et *intérieurement* à B et C, ou bien le cercle O peut être tangent *intérieurement* au cercle A et *extérieurement* à B et C, ce qui donne les deux solutions du second groupe. Il est facile de trouver les deux autres groupes de solutions, il suffit pour cela de faire intervenir successivement les cercles B et C à la place de A.

983. Autre solution. — Supposons le problème résolu. Soient ω et ω' les centres des deux cercles du premier groupe de solutions tangents aux trois cercles donnés A, B, C. Soient, d'autre part, a, b, c, les points de contact du cercle ω avec les cercles A, B, C et a', b', c' ceux du cercle ω'.

La difficulté du problème consiste à trouver les cordes aa', bb', cc' ; car si on les connaissait, il n'y aurait plus qu'à tracer un cercle par les points a, b, c et un autre par les points a', b', c'. Cherchons donc à déterminer ces cordes.

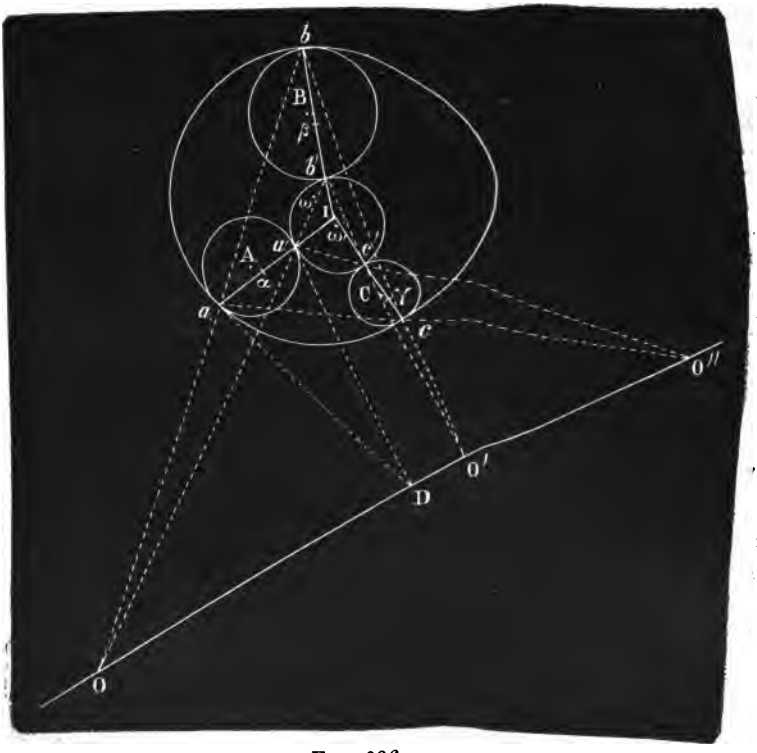


FIG. 606.

1° Les droites ab et $a'b'$ passent par le centre O de similitude directe des cercles A et B (308) et (310) ; de même bc et $b'c'$ se coupent en O′, centre de similitude directe des cercles B et C ; enfin ac et $a'c'$ se coupent en O″, centre de similitude directe des cercles A et C. On a vu d'ailleurs (310) que les trois points O, O′ O″ sont en ligne droite.

2° Chacune des cordes de contact aa', bb', cc' passe par le centre I de similitude inverse des cercles ω et ω' ; car a, par exemple, est un centre de similitude directe des cercle A et ω, tandis que a' est un centre de similitude inverse des cercles A et ω' : donc la corde aa' passe par le troisième centre I de similitude inverse des cercles ω et ω' (310).

3° Le point I est le centre radical des cercles A, B, C ; car les cordes aa' et

bb' sont antihomologues dans les cercles A et B considérés comme inverses par rapport à l'origine O, donc leur point de concours I a lieu sur l'axe radical des cercles A et B. De même, le point de concours I des cordes antihomologues aa' et cc' a lieu sur l'axe radical des cercles A et C. Donc I est le centre radical des trois cercles A, B, C. Le point I est alors connu ; si nous pouvons trouver un second point des cordes aa', bb', cc', ces cordes seront déterminées et le problème sera résolu.

4° Chacune des cordes aa', bb', cc' contient le pôle, par rapport à son cercle, de l'axe de similitude OO'O'' des trois cercles A, B, C. Pour arriver à le prouver, montrons que l'axe de similitude OO'O'' des cercles A, B, C est aussi l'axe radical des cercles ω et ω'. En effet, dans ces deux cercles les cordes ab et $a'b'$ sont antihomologues, leur intersection O se trouve donc sur l'axe radical de ces deux cercles (976). Pour le même motif les points O' et O'' appartiennent aussi à cet axe radical. D'autre part, les tangentes en a et a', au même cercle A, viendront aussi se couper en D sur l'axe radical. Donc (823) le pôle de la droite OO'O'', par rapport au cercle A, est un point de aa'. De même les pôles de la droite OO'O'', par rapport aux cercles B et C, sont un point de bb' et un point de cc'.

Le problème est donc résolu. On cherchera d'abord l'axe de similitude OO'O'' et le centre radical I des trois cercles A, B, C ; puis on prendra (823) les trois pôles α, β, γ de cet axe par rapport à chacun de ces cercles et on les joindra au centre radical I : les droites $I\alpha$, $I\beta$, $I\gamma$ rencontrent les cercles A, B, C aux points de contact a et a', b et b', c et c'.

Les cercles demandés ω et ω' passent l'un par a, b, c et l'autre par a' b' c'.

On déterminera les autres groupes de solutions à l'aide d'un raisonnement analogue.

Cette solution, aussi remarquable par sa simplicité que par son élégance, est due au géomètre français Gergonne.

§ II. — APPLICATION III. — APPAREIL DE PEAUCELLIER

964. — Nous avons vu qu'une figure étant composée de droites et de plans, si on la transforme par inversion, on peut obtenir une nouvelle figure composée de droites, de cercles, de plans et de sphères.

Le général Peaucellier a réalisé mécaniquement la transformation du *mouvement circulaire* en *mouvement rectiligne*, au moyen d'un losange articulé MAM'B dont deux sommets opposés A et B sont reliés au point fixe O par deux tiges égales OA et OB, articulées en O ainsi qu'en A et B. Parfois le point O, au lieu d'être à l'intérieur du losange, est à l'extérieur sur le prolongement de MM'.

FIG. 607.

FIG. 608.

Cet appareil porte plus souvent le nom *d'inverseur de Peaucellier*, parce que

le point M décrit la *transformée* par *inversion* de la ligne que l'on fait décrire au point M'.

Il est, en effet, facile de démontrer que le produit OM × OM' est *constant*, quelle que soit la forme que prenne le losange.

1° Supposons que les tiges OA et OB sont en ligne droite (*fig.* 608). Désignons par l le côte du losange et par a la longueur OA = OB.

On a (1) $OM \times OM' = \sqrt{l^2 - a^2} \times \sqrt{l^2 - a^2} = l^2 - a^2$.

2° Supposons en second lieu que le losange soit infléchi (*fig.* 607), on aura :

$$OM = DM + OD$$

$$OM' = DM' - OD = DM - OD,$$

puisque $DM = DM'$;

d'où :

(2) $OM \times OM' = \overline{DM}^2 - \overline{OD}^2 = [l^2 - \overline{AD}^2] - \overline{OD}^2 = l^2 - [\overline{AD}^2 + \overline{OD}^2] = l^2 - a^2$.

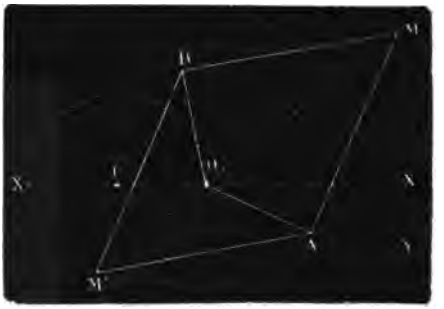


FIG. 609.

Ce qui montre bien que $OM \times OM' = l^2 - a^2$ est un produit constant, puisque l et a sont des longueurs invariables : par conséquent M et M' sont des points inverses par rapport au point O. Si M est assujetti à décrire une ligne, M' décrira la ligne inverse ; la puissance d'inversion sera $l^2 - a^2$.

En particulier (*fig.* 609), si M' est assujetti à décrire une circonférence C passant par O, M décrira la droite XY perpendiculaire au diamètre XX' mené par l'origine O (967). Ce qui permet de transformer un mouvement circulaire en mouvement rectiligne.

§ III. — APPLICATION IV. — PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE

985. — On appelle projection stéréographique la perspective d'une sphère sur le plan d'un grand cercle MN de la sphère, l'un des pôles P de ce grand cercle étant pris comme point de vue. On définit encore la projection stéréographique d'un point A de la sphère, le point a où le vecteur PA rencontre le plan MN. La projection stéréographique d'une ligne tracée sur la sphère sera *le lieu* des projections stéréographiques des points de cette ligne. Mais on a vu que le plan MNO et la sphère sont deux figures inverses par rapport au pôle P.

FIG. 610.

Ici la puissance d'inversion est $2R^2$.

Dès lors les projections stéréographiques, ainsi que les figures inverses, jouissent des deux propriétés fondamentales.

1° *Les angles sont conservés dans la projection stéréographique* (964) ;

2° *La projection stéréographique d'un cercle* C *de la sphère qui ne passe pas*

par le pôle P *est un cercle* C′ (974). *S'il passe par le pôle* P, *sa projection est une droite* (967).

Lorsque la projection stéréographique d'un cercle est un cercle C′, il est utile de rechercher le centre de ce cercle C′.

Construisons d'abord le cône circonscrit à la sphère suivant le cercle C et dont le sommet est I. Si par le point I comme centre on construit une sphère S de rayon IM égal à la génératrice du cône, cette seconde sphère coupera orthogonalement la sphère de centre O suivant le cercle C.

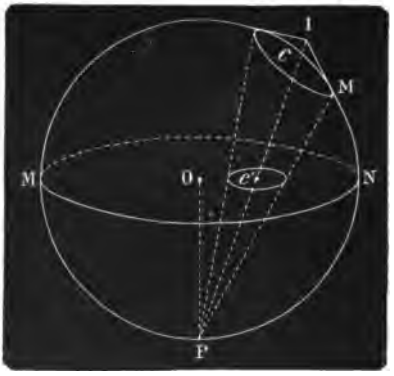


FIG. 611.

Considérons, en effet, le point M; le plan tangent en ce point à la sphère de centre I est perpendiculaire à IM. Le plan tangent à la sphère de centre O au même point M contient le rayon IM. Les deux plans tangents sont perpendiculaires et les sphères sont bien orthogonales.

Les inverses de ces sphères se couperont également à angle droit. Or l'inverse de la sphère de centre O est le plan MN. L'inverse de la sphère S, qui ne passe pas par le pôle P sera une autre sphère S′ qui devra couper orthogonalement le plan MN, c'est-à-dire qui aura son centre dans le plan MN. Mais l'intersection du plan MN et de S′ n'est autre que l'inverse de C intersection de S et de la sphère de centre O. Le centre de la sphère S′ est nécessairement sur le vecteur PI. L'intersection de ce vecteur PI avec le plan MN détermine le centre de (C′).

VECTEURS

CHAPITRE PREMIER

Composition des vecteurs. — Décomposition d'un vecteur. — Relations analytiques entre le vecteur résultant et les vecteurs composants.

§ Ier. — COMPOSITION DES VECTEURS

986. Définitions. — On appelle *vecteur* $\overline{AB}$ un segment de droite X'X ayant une origine A et une extrémité B.

Il faut distinguer dans ce vecteur : 1° l'origine ou point d'application A ; 2° la direction, qui est celle de la droite indéfinie X'X dont le vecteur est un segment ; 3° le *sens* qui est celui du mouvement d'un mobile allant de A vers B et que l'on indique par une flèche placée à l'extrémité du vecteur ; 4° la grandeur qui est la longueur $\overline{AB}$.

FIG. 612.

Deux vecteurs sont *identiques* quand ils se confondent.

Deux vecteurs sont *équipollents* lorsqu'ils sont : 1° égaux en longueur ; 2° de même sens ; 3° dirigés suivant la même droite, ou suivant des droites parallèles.

Deux vecteurs sont égaux et opposés quand ils sont parallèles, de même longueur mais de sens contraire, ils constituent alors un couple de vecteurs.

Deux vecteurs sont *directement opposés* quand ils sont égaux opposés et dirigés suivant la même droite *indéfinie*.

987. Axe orienté. — On appelle axe orienté une droite illimitée sur laquelle on choisit un sens appelé sens positif. Le sens contraire est appelé sens négatif.

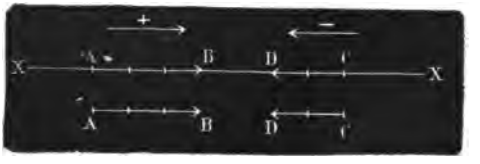


FIG. 613.

Ainsi, si la longueur du vecteur $\overline{AB}$ est 3 on aura sur l'axe $AB = 3$; au contraire si 2 est la longueur absolue de CD, on aura $CD = -2$.

988. — *La mesure algébrique du vecteur, somme géométrique de plusieurs vecteurs parallèles, ou portés sur un axe, est la somme algébrique des mesures algébriques de ces vecteurs.*

Ainsi dans l'exemple ci-dessus :

$$\overline{AB} + \overline{CD} = 3 - 2 = 1.$$

989. — *Somme géométrique de vecteurs concourants.*

Composer des vecteurs *concourants*, c'est remplacer ces différents vecteurs ayant même origine par un *seul vecteur* que l'on appelle leur somme géométrique, et qui a son point d'application à l'origine commune des vecteurs.

990. — 1. *Somme géométrique de deux vecteurs concourants.*

Si l'on a deux vecteurs concourants $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$, leur *somme géométrique* est, par définition, la diagonale $\overline{OR}$ du parallélogramme OABR obtenu en menant par A un vecteur équipollent à $\overline{OB}$, et par B un vecteur équipollent à $\overline{OA}$. Ce qui s'écrit par convention :

$$(OR) = (OA) + (OB),$$

et s'énonce OR somme géométrique de OA et de OB; OR est aussi la résultante de (OB) + OA), l'ordre des deux vecteurs étant indifférent.

FIG. 614.

991. — *La trigonométrie* fournit le moyen de calculer la résultante de deux vecteurs concourants, connaissant la longueur de ces vecteurs et l'angle de leurs directions.

$$\overline{OR}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\overline{OA} \times \overline{OB} \cos \widehat{OAR}$$

ou :

$$\overline{OR}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + 2.\overline{OA} \times \overline{OB} \cos \widehat{OAB},$$

puisque $\widehat{AOB} = (\pi - \widehat{OAR})$.

Si l'angle des deux vecteurs composants est nul, la somme géométrique des vecteurs est égale à la somme algébrique des valeurs des vecteurs. S'ils sont de même origine, égaux et opposés, leur somme est nulle.

992. — II. *Somme géométrique de trois vecteurs.*

La somme géométrique de trois vecteurs $\overline{OA}$ $\overline{OB}$ $\overline{OC}$, ayant même origine et non situés dans un même plan est égale à la diagonale du parallélipipède construit sur les trois vecteurs composants.

Par l'extrémité A du premier vecteur, menons un vecteur $\overline{AB'}$ équipollent à $\overline{OB}$; puis par B', un vecteur équipollent à $\overline{OC}$.

Le vecteur $\overline{OR}$ d'origine O et d'extrémité R est la somme géométrique des trois vecteurs donnés. Ce vecteur $\overline{OR}$ est indépendant de l'ordre dans lequel on compose les trois vecteurs OA, OB, OC, car le

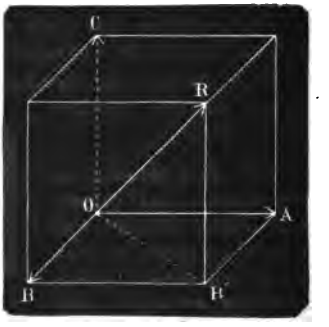


FIG. 615.

point R est le sommet opposé au point O dans le parallélipipède construit sur OA, OB, OC.

La *somme géométrique* $\overline{AR}$ des trois vecteurs est exprimée par l'égalité géométrique :

$$(AR) = (OA) + (OB) + (OC).$$

993. — III. *Somme géométrique d'un nombre quelconque de vecteurs concourants.*

Soient n vecteurs OA, OB, OC, OD... OM, ON d'origine commune O. Par l'extrémité A du premier menons un vecteur AB_1, équipollent au deuxième OB ; par B_1, un vecteur B_1C_1 équipollent au vecteur OC et ainsi de suite jusqu'au dernier M_1R équipollent à ON. Par l'extrémité R menons OR, nous aurons la *somme géométrique* ou *résultante* des vecteurs donnés.

Cette somme est *indépendante* de l'ordre dans lequel on prend les vecteurs composants pour les porter bout à bout. Ce fait résulte de ce qu'on peut intervertir l'ordre de deux vecteurs consécutifs : en raisonnant, comme en arithmétique, relativement au produit de plusieurs facteurs, on peut par conséquent les ranger dans un ordre quelconque sans changer leur somme géométrique.

La somme géométrique s'exprime par l'égalité conventionnelle.

$$(OR) = (OA) + (OB) + \ldots\ldots (ON) \quad (+ \ldots\ldots)$$

dans le second membre, l'ordre des termes est indifférent.

§ II. — DÉCOMPOSITION D'UN VECTEUR

994. Problème inverse. — 1° *Décomposition d'un vecteur* $\overline{OR}$ en deux vecteurs composants, connaissant l'un des vecteurs *composants* $\overline{OA}$.

L'autre vecteur composant sera $\overline{OB}$ équipollent à $\overline{AR}$ qui joint les extrémités

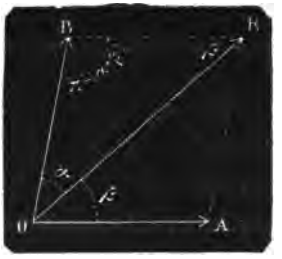


FIG. 616.

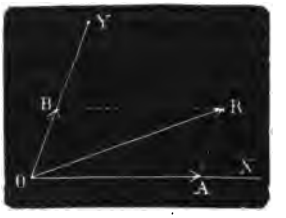


FIG. 617.

de OA et de OR. C'est le second côté du parallélogramme dont OR est la diagonale et OA l'un des côtés.

$$(OB) = (OR) - (OA)$$

qui est la conséquence de la relation géométrique :

$$(OR) = (OB) + (OA).$$

2° *Décomposition d'un vecteur* suivant deux directions OX et OY qui sont dans un *même plan* avec OR.

On construit le parallélogramme dont OR est la diagonale et dont les côtés sont dirigés suivant les axes donnés.

Les vecteurs OA et OB répondent seuls à la question.

995. *Décomposition d'un vecteur OR suivant trois directions données OX, OY, OZ.*

Étant donné le vecteur OR, il suffit de mener trois plans parallèles aux plans XOY, XOZ, YOZ. On forme ainsi un parallélipipède dont OR est la diagonale ; les trois vecteurs cherchés forment les trois arêtes et l'on a :

$$(OA) + (OB) + (OC) = (OR).$$

Remarque. — Si les trois directions ainsi que le vecteur OR étaient dans le même plan, il est facile de voir que le problème admettrait une infinité de solutions.

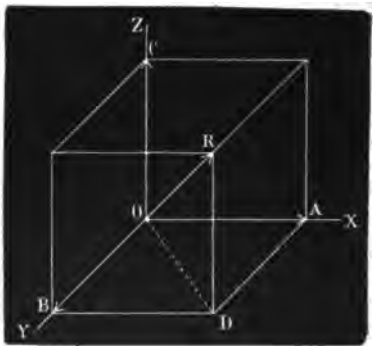


FIG. 618.

§ III. — RELATIONS ANALYTIQUES ENTRE LE VECTEUR RÉSULTANT ET LES VECTEURS COMPOSANTS

996. Cas de deux vecteurs composants. — Théorème. — *Le rapport de chaque vecteur au sinus de l'angle des deux autres est constant.*

Le triangle ABR (fig. 616) donne les relations

$$\frac{OA}{\sin\alpha} = \frac{OB}{\sin\beta} = \frac{OR}{\sin[\pi - (\alpha+\beta)]} = \frac{OR}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Donc le rapport de chaque vecteur au sinus de l'angle des deux autres est constant.

997. — *Relations analytiques entre le vecteur résultant et les trois vecteurs composants*, au cas où ils sont rectangulaires :

On a : (fig. 618) $\overline{OR}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2.$

En effet, $\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{OD}^2;$

Mais, $\overline{OD}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{OR}^2.$

Lorsque les vecteurs composants sont rectangulaires, si l'on appelle α, β, γ les angles de OR avec OA, OB, OC.

On a : $OA = R\cos\alpha$; $OB = R\cos\beta$; $OC = R\cos\gamma$,

$$\text{d'où : } \cos\alpha = \frac{OA}{\sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{OB}{\sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{OC}{\sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2}}.$$

Élevant au carré et ajoutant membre à membre ces trois égalités, on a la relation :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

CHAPITRE II

Projection d'un vecteur sur un axe. — Théorème des projections. — Représentation analytique des vecteurs.

§ Ier. — PROJECTION D'UN VECTEUR SUR UN AXE

998. Définitions. — Soit X'X un axe orienté dans le sens positif; soit un plan P non parallèle à l'axe de projection. Cet axe X'X et le plan P forment un *système de projection.* — Si le plan P est perpendiculaire à l'axe, on a un *système de projections orthogonales.*

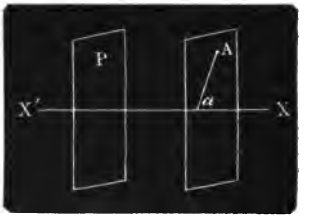


FIG. 619.

La projection a d'un point A sur l'axe X'X sera l'intersection de cet axe avec le plan mené parallèlement au plan P par le point A (fig. 619).

On appelle projection d'un vecteur $\overline{AB}$ sur l'axe X'X, le *segment* de *l'axe dirigé* qui a pour origine la projection a du point A et pour extrémité la projection b

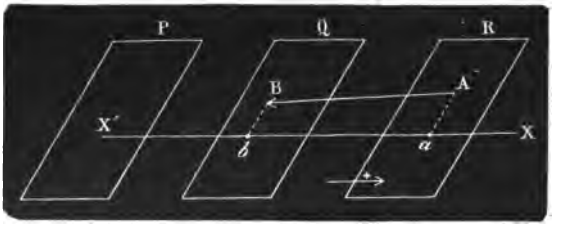


FIG. 620.

du point B (fig. 620). Dans la figure le vecteur AB étant dirigé dans le sens négatif de l'axe, sa projection sera négative.

999. Contour polygonal fermé. — On appelle *contour polygonal fermé*, un polygone plane ou gauche (1) dont les côtés sont parcourus par un mobile partant d'un des sommets du polygone, A par exemple, et parcourant successivement dans un sens déterminé, les différents vecteurs et sommets du polygone pour revenir au point de départ A (fig. 621).

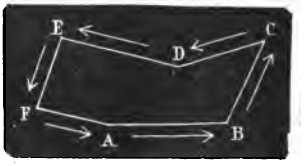


FIG. 621.

1. On appelle polygone gauche, un polygone dont tous les côtés ne sont pas dans un même plan.

§ II. — ÉNONCÉ GÉOMÉTRIQUE DU THÉORÈME DES PROJECTIONS

1000. — *La projection de la somme géométrique d'un système de vecteurs quelconques sur un axe orienté est la somme géométrique des projections des vecteurs sur cet axe.*

1° Considérons d'abord les *projections* de *deux* vecteurs équipollents, OV, O'V' sur un axe orienté X'X, parallèlement à un même plan fixe P ; nous verrons que ces projections sont deux vecteurs équipollents.

Projection OV = ov ; Projection O'V' = $o'v'$.

Il faut démontrer que $\overline{ov} = \overline{o'v'}$. Menons par O et par O' des vecteurs OV_1

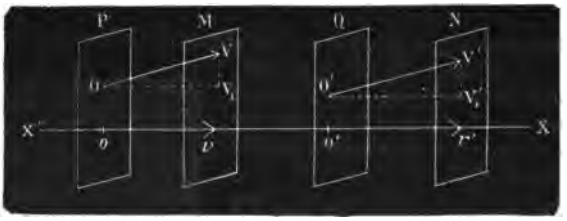


FIG. 622.

et $O'V_1'$ parallèles à X'X. Ces vecteurs sont respectivement égaux à $\overline{ov}$ et $\overline{o'v'}$ comme parallèles comprises entre plans parallèles.

Les plans parallèles VOV_1 et $V'O'V_1'$ coupent les plans parallèles M et N suivant des parallèles VV_1 et $V'V_1'$.

Dans les triangles VOV_1 et $V'O'V_1'$, les angles O et O' ayant leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens sont égaux, on prouverait de même l'égalité des angles V et V'.

Les côtés OV et O'V' sont égaux par hypothèse ; de plus, ils sont adjacents à deux angles égaux chacun à chacun, donc les triangles VOV' et $V'O'V_1'$ sont égaux, ce qui entraîne l'égalité des côtés $OV_1 = O'V_1'$ et par là même celle des projections $\overline{ov} = \overline{o'v'}$.

2° Considérons en second lieu un système de vecteurs O_1V_1, O_2V_2, O_3V_3... O_nV_n leur projection sur un axe orienté est $\overline{o_1v_1}$, $\overline{o_2v_2}$, $\overline{o_3v_3}$... $\overline{o_nv_n}$.

La somme géométrique des premiers vecteurs s'obtient en formant le polygone de composition (993). $OM_1 + M_1M_2$... dont les côtés sont respectivement équipollents à O_1V_1, O_2V_2.

Projetons ce polygone en $\overline{om_1}$, $\overline{m_1m_2}$... Ces vecteurs sont respectivement équipollents à $\overline{o_1v_1}$, $\overline{o_2v_2}$..., etc.

La somme géométrique des vecteurs projections est donc bien $\overline{om_n}$ projection de $\overline{OM_n}$, somme géométrique des vecteurs OV_1, O_2V_2... O_nV_n.

1001. Remarque. — Pour que la projection d'un contour polygonal ou d'une portion de droite soit nulle, il faut et il suffit que les projections des points extrêmes se confondent. Ce qui a lieu si l'origine est confondue avec l'extrémité, si le contour polygonal est fermé, ou si le contour ou la portion de droite sont parallèles au plan projetant P.

De là on peut déduire que la condition *nécessaire* et *suffisante* pour que la *résultante* d'un système de vecteurs concourants soit *nulle* est que si on la projette parallèlement à trois plans formant un trièdre, sur trois axes

quelconques, la somme des projections de ces vecteurs sur chacun de ces axes soit nulle.

§ III. — ÉNONCÉ ALGÉBRIQUE DU THÉORÈME DES PROJECTIONS

1002. — *La mesure algébrique de la projection de la somme géométrique de plusieurs vecteurs sur un axe orienté est la somme algébrique des mesures des projections de ces vecteurs.*

Si l'axe de projection X'X est orienté dans le sens positif : les projections des vecteurs seront mesurées par des nombres positifs ou négatifs, suivant que ces projections seront dirigées suivant le sens positif ou négatif de l'axe X'X'. Cette conclusion résulte de la définition donnée (998) de la projection d'un vecteur sur un axe.

Remarque. — Ce Théorème est à proprement parler celui qu'on appelle *Théorème des projections*. En général, la *projection* de la *somme géométrique* de plusieurs vecteurs est égale à la *somme* des projections de ces vecteurs : somme *géométrique*, si la projection est faite sur un *plan*, somme *algébrique* si la projection est faite sur un *axe*.

1003. Paramètre de projection. — Soit un axe orienté X'X ; soit une droite orientée YY' dirigée dans l'espace, parallèlement à un vecteur donné OV. Nous avons vu que les projections sur un même axe de deux vecteurs équipollents sont des segments égaux, par conséquent la grandeur de la projection sur l'axe orienté X'X d'un segment $\overline{\alpha\beta}$ égal à l'unité, pris sur Y'Y sera indépendant de l'origine α. — La valeur algébrique de la projection $\overline{\alpha'\beta'}$, du segment αβ se nomme le *paramètre de projection* de la droite dirigée Y'Y sur X'X.

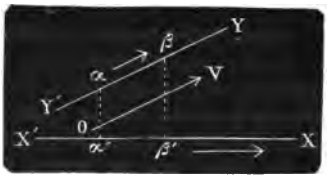


FIG. 623.

1004. — Lorsque les projections sont *orthogonales*, le *paramètre de projection* est le *cosinus* de l'angle que fait la direction positive de Y'Y avec la direction positive de X'X.

Ainsi (fig. 624) la projection de $OV = O'V' = 1$, égale à la projection de O'V', est cos α, puisque $O'V' = R = 1$.

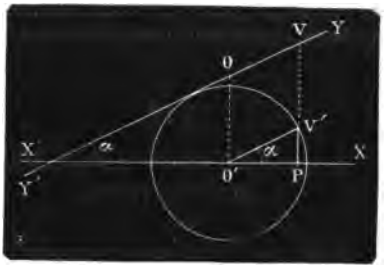


FIG. 624.

1005. Théorème. — *La projection d'un vecteur dirigé* OC *est en grandeur et en signe, le produit de la valeur algébrique de ce vecteur par le paramètre de projection correspondant.*

On sait que les vecteurs équipollents ont des projections équipollentes ; par conséquent on peut supposer que le segment unité OV et la droite orientée OC ont même origine O. La grandeur et le signe de leur projection ne seront pas changés.

Les plans menés par O, V, C étant parallèles $\dfrac{\overline{OC}}{\overline{OV}} = \dfrac{\overline{oc}}{\overline{ov}}$.

Si les vecteurs OC et OV ont même sens, $\overline{oc}$ et $\overline{ov}$ ont même sens. Si OV et OC ont des sens différents, $\overline{ov}$ et $\overline{oc}$ ont aussi des sens différents.

Les rapports $\frac{\overline{OC}}{\overline{OV}} = \frac{\overline{oc}}{\overline{ov}}$ sont en même temps tous deux positifs ou tous deux négatifs. Comme d'ailleurs, ils ont même valeur absolue, ils sont égaux.

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OV}} = \frac{\overline{oc}}{\overline{ov}}.$$

$\overline{OV}$ étant le vecteur unité sur Y'Y, le premier rapport est la mesure de $\overline{OC}$.

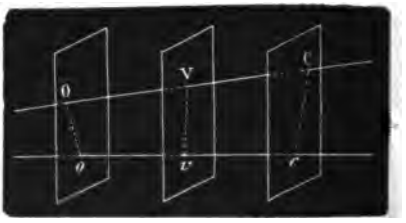


FIG. 625.

On a

$\overline{oc}$ = mesure de $\overline{OC} \times \overline{ov}$.

La projection d'un vecteur est donc bien égale au produit de la mesure algébrique de ce vecteur par le *paramètre de projection* correspondant.

1006. Orientation en Géométrie et orientation en Mécanique. On a vu en Géométrie qu'un angle BAC est orienté dans le sens positif (33) quand AC coïncidant d'abord avec AB s'écarte de la droite vers la gauche par rapport à un observateur ayant les pieds en A et regardant le déplacement. La même convention a été adoptée en Trigonométrie.

De même pour un trièdre SABC; en géométrie (591), si l'on suppose un observateur ayant la tête en A et les pieds en S et regardant l'intérieur du trièdre, le trièdre sera direct si SB est à droite et SC à gauche de l'observateur.

C'est le contraire qui a lieu en Mécanique. Nous verrons en particulier (1010), dans la théorie des moments que le sens direct des angles et des rotations est le sens des aiguilles d'une montre. Comme l'étude des vecteurs doit surtout servir en mécanique, pour éviter toute confusion, nous adopterons, dans la théorie des vecteurs, l'orientation communément admise en mécanique.

§ IV.

REPRÉSENTATION ANALYTIQUE DES VECTEURS

1007. — *Coordonnées d'un point dans un plan.* Soient deux axes rectangulaires X'X et Y'Y et soit O l'intersection de ces deux axes. Considérons un point M du plan dont les projections orthogonales sur X'X et Y'Y soient A et B. OA est l'abcisse du point M et se désigne par x; OB est son ordonnée et se désigne par y.

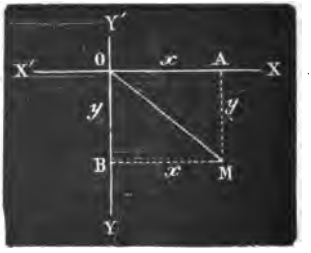


FIG. 626.

Le vecteur OM est la somme géométrique des vecteurs $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$.

1008. — *Coordonnées d'un point dans l'espace.* — Soient trois axes rectangulaires OX, OY OZ et un point M de l'espace. On appelle coordonnées du point M les projections du vecteur OM sur les trois axes.

OA s'appelle *abscisse* et se désigne par x. OB s'appelle *ordonnée* ou *éloignement* et se désigne par y; OC s'appelle cote et se désigne par z.

FIG. 627.

1009. Projection d'un vecteur $\overline{AB}$ sur les trois axes de coordonnées OX, OY, OZ. — Soient x, y, z, les coordonnées du point A; x_1 y_1 z_1 les coordonnées du point B; X_1, Y_1, Z_1 les projections du vecteur AB sur les trois axes.

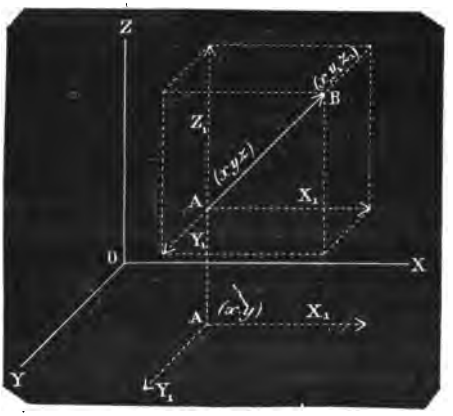


FIG. 628.

On a :

$$x_1 = x + X_1$$
$$y_1 = y + Y_1$$
$$z_1 = z + Z_1$$

Ce qui donne :

$$X_1 = x_1 - x$$
$$Y_1 = y_1 - y$$
$$Z_1 = z_1 - z.$$

Ces égalités déterminent les valeurs algébriques des projections d'un vecteur sur les trois axes, lorsque l'on connaît les différences des coordonnées de l'origine et de l'extrémité du vecteur.

CHAPITRE III

Moments des vecteurs. — Moments linéaires par rapport à un point. — Moments par rapport à un axe.

§ Ier. — MOMENT LINÉAIRE PAR RAPPORT A UN POINT

1010. — *Sens de rotation autour d'un axe.* — Soit Z'Z un axe orienté positivement dans le sens de la flèche $z'z$.

Soit une courbe quelconque (C) non située dans un même plan que l'axe. On dit qu'un mobile M se déplace sur cette courbe dans le sens *positif* ou *direct* lorsqu'un observateur ayant les pieds en Z' et la tête en Z, voit le mobile se déplacer devant lui *de sa gauche vers sa droite.*

Dans le cas contraire, on dit que le mobile se déplace dans le sens négatif ou rétrograde.

Si l'on suppose un axe perpendiculaire au milieu du cadran d'une montre les aiguilles tournent dans le sens direct.

FIG. 629.

1011. — *Moment linéaire d'un vecteur par rapport à un point.*

On appelle moment linéaire d'un vecteur AB d'origine A par rapport à un point arbitraire O de l'espace un autre vecteur OG d'origine O ayant :

1° une *longueur* OG numériquement égale au produit de AB par sa distance d au point O ;

2° Une direction perpendiculaire au plan déterminé par AB et le point O ;

3° Un sens tel qu'un mobile parcourant le vecteur AB de A vers B tourne dans le sens positif autour de l'axe orienté OG.

FIG. 630.

La grandeur du moment OG est numériquement égale au double de l'aire du triangle ABO puisque $OG = AB \times d$.

1012. — **Remarques.** — 1° On peut voir que si un mobile suivait le vecteur OG de O vers G, il tournerait aussi dans le sens *direct* autour de l'axe orienté $\overline{AB}$;

2° Le moment linéaire de AB par rapport au point O ne change pas quand on fait glisser le vecteur AB en un point quelconque de sa direction, pourvu qu'il conserve son sens et sa grandeur. Le produit $\overline{AB} \times d$ reste le même ;

3° Il est également aisé de constater que le déplacement du point O sur une parallèle à AB ne modifie pas le moment $\overline{OG}$;

4° Le moment $\overline{OG} = \overline{AB} \times d$ devient nul lorsque le vecteur $\overline{AB}$ est nul, ou encore lorsque la direction de ce vecteur passe par le point O, car alors le facteur d devient nul.

1013. Théorème. — *Le moment linéaire d'un vecteur* $\overline{AB}$ *par rapport au point O est égal au moment linéaire, par rapport au même point* O *de la projection orthogonale* A*b du vecteur* AB *sur un plan* M *mené par* A *perpendiculairement à* OA.

Soient un vecteur $\overline{AB}$, d'origine A et un point O. Menons par A un plan M perpendiculaire à OA. Montrons que le moment OG du vecteur $\overline{AB}$ par rapport au point O est égal au moment du vecteur $\overline{Ab}$ projection orthogonale de $\overline{AB}$ sur le plan M.

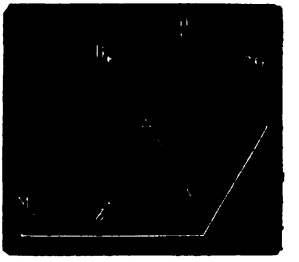


FIG. 631.

OG est numériquement égal au double de l'aire du triangle ABO.

Mais le triangle AbO est équivalent au triangle ABO ; ils ont une base commune OA et même hauteur puisque les sommets B et b sont sur une même parallèle à la base OA. Les moments de $\overline{AB}$ et de Ab ont même direction puisque tous deux sont perpendiculaires aux plans ABO et AbO qui sont confondus. Enfin, ils ont même sens puisqu'un mobile parcourant soit le vecteur $\overline{AB}$, soit le vecteur Ab tourne dans le même sens autour de l'axe OG perpendiculaire au plan OAbB.

THÉORÈME DE VARIGNON

relatif aux moments linéaires, par rapport à un point.

1014. — *Le moment linéaire, par rapport à un point* O *de la résultante de plusieurs vecteurs concourants est égal à la somme géométrique des moments linéaires de ces vecteurs.*

Commençons par démontrer le théorème pour deux vecteurs encourants; nous l'étendrons ensuite au cas d'un nombre quelconque de vecteurs.

1° *Soient deux vecteurs,* $\overline{AB}$. $\overline{AB_1}$ *concourants au point* A.

Soit $\overline{AR}$ la résultante géométrique de ces vecteurs. Construisons les moments linéaires OG, OG_1 et OH de ces trois vecteurs $\overline{AB}$, $\overline{AB_1}$ et $\overline{AR}$ par rapport à un point O quelconque. Nous allons montrer que OH moment linéaire de $\overline{AR}$ est bien la somme géométrique de OG, OG_1 moments linéaires de $\overline{AB}$, $\overline{AB_1}$. Soit M le plan mené par A perpendiculairement à OA.

Appelons Ab, Ab_1, Ar les projections des vecteurs AB, AB_1 et AR sur le plan M. La projection d'un parallélogramme étant un parallélogramme, la somme géométrique des projections Ab, Ab_1 est le vecteur Ar.

On a vu précédemment (1013) que les moments linéaires de Ab, Ab_1 et Ar sont identiques à ceux de AB, AB_1 et AR. Leur valeur numérique est égale aux produits de Ab, Ab_1 et Ar par OA et perpendiculaires aux plans OAb, OAb_1 et OAr dans le sens indiqué par la définition des moments linéaires. Ces trois moments sont contenus dans un plan P perpendiculaire à OA au point O. Menons par O trois vecteurs parallèles respectivement de même sens, aux vecteurs Ab, Ab_1 et Ar, et ayant pour grandeur

$$OG' = Ab \times OA, OG'_1 = Ab_1 \times OA:$$
$$OH' = Ar \times OA.$$

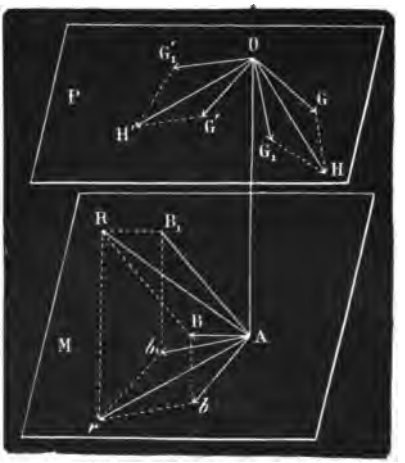


FIG. 632.

Ces trois vecteurs contenus dans le plan P forment un parallélogramme OG'H'G' homothétique de $Abrb_1$. La diagonale OH' est donc homothétique de la diagonale Ar.

Faisons tourner d'un angle droit autour de O dans le plan P, dans le sens direct de rotation l'ensemble des vecteurs OG', OH', OG'_1, nous aurons les vecteurs OG, OH et OG_1 qui seront les moments linéaires de Ab, Ab_1 Ar par rapport au point O. Or OH est la diagonale du parallélogramme construit sur OG_1 et OG; OH est donc bien la somme géométrique des moments linéaires des vecteurs en même temps qu'elle représente le moment linéaire de AR par rapport au point O; ce qui démontre le théorème.

2° *Soient* n *vecteurs concourants* $\overline{AB}$ $\overline{AB_1}$ $\overline{AB_2}$ $\overline{AB_3}$... $\overline{AB_n}$.

Soit AR_n leur résultante. Construisons les moments linéaires OG_1 OG_2 OG_3...

OG_n de ces vecteurs par rapport au point O. Soit OG le moment linéaire de AR_n. Il faut montrer que OG est la somme géométrique de OG_1, OG_2, OG_3... OG_n.

Soit $\overline{AR_1}$ le vecteur somme géométrique de AB et AB_1 ; AR_2 le vecteur somme géométrique de $\overline{AR_1}$ et de $\overline{AB_2}$..., etc. On peut écrire :

$$(AR_1) = (AB) + (AB_1)$$
$$(AR_2) = (AR_1) + (AB_2)$$
$$(AR_3) = (AR_2) + (AB_3)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(AR_n) = (AR_{n-1}) + (AB_n).$$

Ces équipollences additionnées membre à membre donnent après réduction $(AR_n) = (AB) + (AB_1) + (AB_2) + (AB_3) + (AB_n)$.

Donc (AR_n) est la somme géométrique de tous les vecteurs.

Or, d'après le premier cas, on a

$$\text{Moment } (AR_1) = \text{moment } (AB) + \text{moment } (AB_1)$$
$$\text{Moment } (AR_2) = \text{moment } (AR_1) + \text{moment } (AB_2)$$
$$\text{Moment } (AR_3) = \text{moment } (AR_2) + \text{moment } (AB_3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\text{Moment } (AR_n) = \text{moment } (AR_{n-1}) + \text{moment } (AB_n).$$

Si l'on additionne membre à membre ces équipollences, on obtient après réduction

$$\text{Moment } (AR_n) = \text{moment } (AB) + \text{moment } (AB_1) + \text{moment } (AB_2) + \ldots \text{ moment } (AB_n).$$

Ce qui démontre bien le théorème dans le cas général de n vecteurs concourants.

1015. — *Système de vecteurs quelconques et non concourants. — Somme géométrique et moment résultant par rapport à un point.*

Soient des vecteurs AB, A_1B_1, A_2B_2, A_nB_n placés d'une façon quelconque dans l'espace. Prenons un point O quelconque et par ce point menons des vecteurs OB' OB'_1 OB'_2, OB'_n respectivement équipollents aux vecteurs donnés. Construisons la somme géométrique OR de ces vecteurs. Ce vecteur est, *par définition*, la *somme géométrique*, ou la *résultante générale* des vecteurs relativement au point O.

Prenons maintenant les moments linéaires OG, OG_1, OG_2... OG_n des vecteurs AB, A_1B_1... A_nB_n, par rapport au point O. Soit OH la résultante géométrique de ces moments linéaires. On l'appelle, *par définition*, le *moment résultant* des vecteurs donnés par rapport au point O.

A chaque point O de l'espace correspond ainsi une somme géométrique *OR* et un moment résultant *OH*. Quand le point O change, la somme géométrique reste la même en signe, grandeur, direction et sens. — Le moment résultant change en général avec le déplacement du point O. — *OR* et *OH* sont les *éléments de réduction* des vecteurs relativement au point O.

1016. — *Système de vecteurs concourants.* — Soit un système de vecteurs ayant même origine A. Leur somme géométrique relative au point A est leur résultante AR. — Leur moment résultant par rapport au point A est évidemment nul.

Pour tout autre point O, la somme géométrique OR_1 des vecteurs donnés est

égale à AR : leur moment résultant OH par rapport au point O est égal au moment résultant de leur résultante AR par rapport au point O. Ce moment résultant est perpendiculaire au plan OAR.

§ II. — MOMENTS LINÉAIRES PAR RAPPORT A UN AXE

1017. Définition. — *Le moment d'un vecteur AB par rapport à l'axe Z'Z orienté de Z' vers Z est la valeur algébrique du produit de sa projection* $\overline{ab}$ *sur le plan (Q) perpendiculaire à l'axe Z'Z, par la distance d de cette projection au pied O de l'axe.*

Le moment linéaire de $\overline{ab}$ par rapport au point O est un vecteur OG dirigé suivant Z'Z, c'est-à-dire un segment positif ou négatif suivant qu'il est dirigé ou non dans le sens positif de l'axe. Dans la présente figure, il est dirigé dans le sens positif de l'axe. La plus courte distance d du vecteur AB à l'axe Z'Z, étant la perpendiculaire commune aux deux droites, se projette en vraie grandeur, $OD = d$, sur le plan Q.

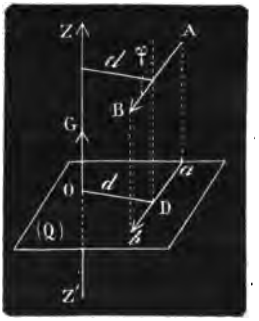


FIG. 634.

La valeur absolue du moment OG est $\overline{ab} \times d$.

Soit φ l'angle de la direction positive du vecteur AB avec Z'Z, on a : $ab = AB \sin \varphi$. Ce qui donne :

$$OG = \pm AB \times d \times \sin \varphi,$$

pris avec le signe convenable suivant que le mobile parcourant AB tourne dans le sens positif ou négatif des rotations.

1018. Remarque I. — Le moment du vecteur AB ne change pas quand on déplace le plan P ou lorsqu'on fait glisser le vecteur AB suivant sa propre direction ; car, dans ces deux cas, aucun des facteurs de la formule AB, d, et $\sin \varphi$ ne change, ainsi que le signe à prendre devant le produit.

1019. Remarque II. — La formule

$$OG = \pm AB \times d \times \sin \varphi$$

montre que le moment est nul, si le vecteur est nul, ou encore, s'il rencontre l'axe ou s'il est parallèle à l'axe.

1020. Théorème. — *Le moment linéaire d'un vecteur par rapport à un axe est la valeur algébrique de la projection sur cet axe du moment linéaire du vecteur par rapport à un point quelconque pris sur l'axe.*

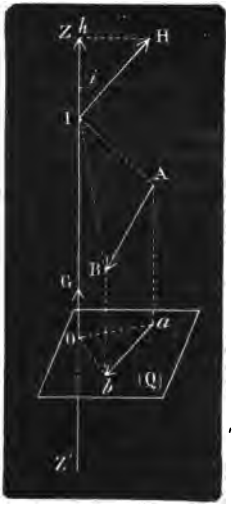


FIG. 635.

Soit un point quelconque I pris sur l'axe. Construisons le moment linéaire IH du vecteur AB par rapport au point I ; projetons ce vecteur IH sur l'axe Z'Z. Il vient $Ih = IH \cos i$. Il faut prouver que $Ih = OG$. On voit sur la figure qu'ils ont le même signe ; prouvons qu'ils ont même valeur absolue :

OG = 2 fois aire Oab. IH = 2 fois aire IAB.

Mais l'angle i est l'angle des perpendiculaires au plan Q et au plan IAB, il est donc égal à l'angle de ces deux plans. On a donc $Oab = IAB \times \cos i$.

Finalement on voit que :

$$\mathit{Th} = OG = 2 \times IAB \times \cos i.$$

C. Q. F. D.

THÉORÈME DE VARIGNON
relatif aux moments par rapport à un axe.

1021. — *Le moment de la résultante de plusieurs vecteurs concourants par rapport à un axe est égal à la somme algébrique des moments de ces vecteurs.*

Prenons un point quelconque I sur l'axe Z'Z. Nous avons vu (1014) que le moment linéaire résultant est égal à la somme géométrique des moments linéaires des vecteurs composants. La projection sur l'axe Z'Z du vecteur résultant est égale à la somme *algébrique* des projections des moments linéaires des vecteurs composants.

1022. Théorème. — *Les vecteurs donnés étant quelconques, la somme algébrique de leurs moments par rapport à un axe est égale à la projection, sur cet axe du moment résultant par rapport à un point quelconque de l'axe.*

En effet, prenons un point I quelconque sur l'axe, on sait que, *par définition* (1015), le *moment résultant* des vecteurs donnés par rapport à I est la *somme géométrique* des moments linéaires des vecteurs donnés, par rapport à I. *La projection* de ce moment résultant est donc égale à la *somme algébrique* des projections des moments linéaires des divers vecteurs sur ce même axe.

C. Q. F. D.

§ III. — EXPRESSION ANALYTIQUE DES MOMENTS

1023. — *Moments d'un vecteur par rapport aux trois axes de coordonnées.*

Soit le trièdre rectangulaire OX_1 OY_1 OZ_1 orienté dans le sens direct. On sait, en mécanique, qu'un observateur ayant les pieds en O et la tête en Z, verra OX se diriger vers OY dans le sens des aiguilles d'une montre. L'observateur placé sur OX verra OY se diriger vers OZ ; placé sur OY, il verra OZ se diriger vers OX. Soit un vecteur AB, dans l'espace, dont l'origine A a pour coordonnées $(x, y, z,)$. Nous appellerons X_1 Y_1 Z_1 les projections du vecteur sur les trois axes et L_1 M_1 N_1 ses moments par rapport aux trois axes. Il s'agit de calculer ces trois dernières quantités.

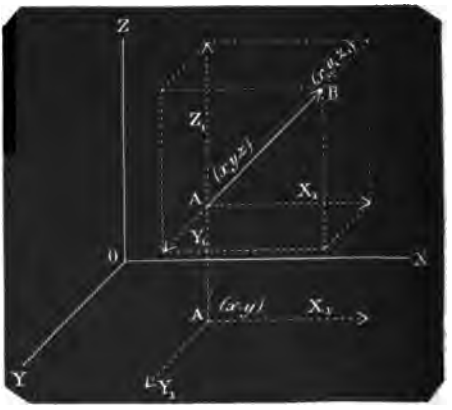


FIG. 636.

Considérons d'abord le moment de AB, par rapport à l'un des axes, OZ par exemple.

D'après le théorème de Varignon (1021), le moment du vecteur résultant AB par rapport à OZ est égal à la somme algébrique des moments des vecteurs composants X_1 Y_1 Z_1. Or le moment de Z_1 est nul (1019). Le moment de Y_1 est égal à celui de sa projection Y_1 par rapport au point O. La distance de Y_1 au point O est x, le moment de Y_1 est donc xY_1; de plus il est positif, car il tend à déplacer le point A de OX vers OY, c'est-à-dire dans le sens des aiguilles d'une montre. Le moment de X_1 par rapport au point O est yX_1, mais il est négatif car il tend à déplacer le point A de OY vers OX. On a donc :

$$\text{Moment de } \overline{AB} \text{ par rapport à OZ} = N_1 = xY_1 - yX_1.$$

On aura de même, par permutations,

$$L_1 = yZ_1 - zY_1$$
$$M_1 = zX_1 - xZ_1$$

1024. — *Moment linéaire d'un vecteur par rapport à l'origine O.*

Soit OG le moment linéaire du vecteur $\overline{AB}$ par rapport au point O.

D'après un théorème précédent (1020), la projection de ce moment sur un quelconque des trois axes Ox, Oy, Oz est égale au moment du vecteur par rapport à chacun des axes. Les trois projections de OG sont précisément les quantités L_1, M_1 N_1 que nous venons de calculer.

La grandeur du vecteur est donc

$$\overline{OG} = \sqrt{L_1^2 + M_1^2 + N_1^2}$$

Ses angles avec les axes sont donnés par $\cos\alpha = \frac{L_1}{OG}$; $\cos\beta = \frac{M_1}{OG}$; $\cos\gamma = \frac{N_1}{OG}$.

CHAPITRE IV

Moment résultant d'un système de vecteurs. — Couple de vecteurs. — Relations entre les moments résultants d'un système quelconque de vecteurs, par rapport à deux points O et O'. — Moment relatif de deux vecteurs.

§ Ier. — MOMENT RÉSULTANT D'UN SYSTÈME DE VECTEURS

1025. — On a vu (1015) que le *moment résultant* d'un système de vecteurs est la *somme géométrique* des moments linéaires de ces vecteurs.

On a vu également (1016) que le *moment résultant* de vecteurs concourants est le moment de leur *somme géométrique* mené par le point de concours.

Le moment résultant varie donc, si le point, ou l'axe par rapport auquel on prend les moments, se déplace. — Le moment résultant sera nul si le point est sur la somme géométrique et sa grandeur augmentera si le point s'en éloigne.

En général, le *moment résultant dépend de la position* du point ou de l'axe. — Examinons le cas d'un seul vecteur.

1026. Théorème. — *Le moment linéaire d'un vecteur* $\overline{AB}$ *par rapport à un point O est la somme géométrique :* 1° *du moment de ce vecteur par rapport à la projection orthogonale O′ du point O sur un plan passant par le vecteur ;* 2° *du moment par rapport au point O du vecteur* $\overline{O'\alpha}$ *équipollent au vecteur* $\overline{AB}$ *mené par le point O′.*

Soit $\overline{OG}$ le moment linéaire du vecteur $\overline{AB}$ par rapport au point O, et O′ la projection de O sur le plan Q passant par $\overline{AB}$.

Le vecteur $\overline{OG}$ est décomposable en deux vecteurs rectangulaires OM, ON contenus dans le plan OO′G.

$$(\overline{OG}) = (\overline{OM}) + (\overline{ON}).$$

Du point O abaissons sur AB la perpendiculaire OI, et joignons O′I.

A cause des triangles OO′I et OGN semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires.

On a :

$$\frac{ON}{O'I} = \frac{NG}{OO'} = \frac{OG}{OI}.$$

Mais

$$NG = OM \text{ et } OG = AB \times OI.$$

d'où :

$$\frac{ON}{O'I} = \frac{OM}{OO'} = \frac{AB \times OI}{OI} = AB.$$

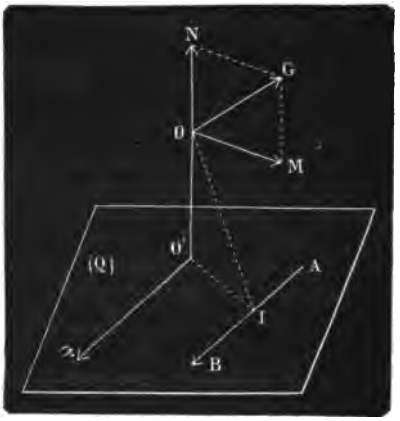


FIG. 637.

d'où : $$ON = O'I \times AB \text{ et } OM = OO' \times AB.$$

Les deux vecteurs ON et OM peuvent donc être regardés, l'un, comme le moment linéaire du vecteur $\overline{AB}$ par rapport au point O′, et l'autre, comme e moment linéaire du vecteur $\overline{O'\alpha}$, équipollent à $\overline{AB}$, par rapport au point O.

§ II. — COUPLE DE VECTEURS

1027. — On dit que deux vecteurs forment un *couple* quand ils sont *égaux*, *parallèles* et de *sens contraire*. — AB et A′B′ forment un *couple de vecteurs*. (fig. 638).

1028. Théorème. — *Le moment résultant des deux vecteurs d'un couple par rapport à un point O de l'espace est un vecteur perpendiculaire au plan du couple, égal au moment du couple, équipollent au moment linéaire de l'un des vecteurs par rapport à l'origine de l'autre et indépendant en grandeur, direction et sens de la position du point O choisi.*

Soient $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ les vecteurs d'un couple ; O un point quelconque de l'espace ; O′ sa projection sur le plan du couple.

Menons par O′ les vecteurs

$$(O'\alpha) = (AB) ; (O'\alpha') = (A'B').$$

En appliquant le théorème précédent, il vient : Moment de $\overline{AB}$ par rapport

au point O égal à la somme géométrique: 1° du moment de $\overline{AB}$ par rapport au point O'; 2° du moment de $\overline{O'\alpha}$ par rapport au point O. Ce qui peut s'écrire,

$$\left(M^t_{(o)}\,\overline{AB}\right) \equiv \left(M^t_{(o')}\,\overline{AB}\right) + \left(M^t_{(o)}\,\overline{O'\alpha}\right).$$

On a également

$$\left(M^t_{(o)}\,\overline{A'B'}\right) = \left(M^t_{(o)}\,\overline{A'B'}\right) + \left(M^t_{(o)}\,\overline{O'\alpha'}\right).$$

Additionnant membre à membre ces équipollences, en remarquant que,

$$\left(M^t_{(o)}\,\overline{O'\alpha}\right) + \left(M^t_{(o)}\,\overline{O'\alpha'}\right) = 0,$$

puisque ces moments sont égaux, opposés et de signe contraire, leur somme est nulle.

Nous aurons

$$\left(M^t_{(o)}\,\overline{AB}\right) + \left(M^t_{(o)}\,\overline{A'B'}\right) = \left(M^t_{(o')}\,\overline{AB}\right) + \left(M^t_{(o')}\,\overline{A'B'}\right).$$

Il reste à prouver que:

$$\left(M^t_{(o')}\,\overline{AB}\right) + \left(M^t_{(o')}\,\overline{A'B'}\right) = \overline{AB} \times \overline{IJ}.$$

Pour fixer les idées, supposons le point O' en dehors des parallèles portant les vecteurs du couple; les moments linéaires des vecteurs AB, A'B' par rapport au point O' sont dirigés suivant O'O, l'un dans un sens et l'autre en sens opposé. Le vecteur O'G' qui est leur somme géométrique sera égal à la *différence* de leurs longueurs et sera dirigé dans le sens O'O, car le moment de AB par rapport à O', dirigé dans le sens direct, est supérieur en valeur absolue au moment de A'B' par rapport au même point O'.

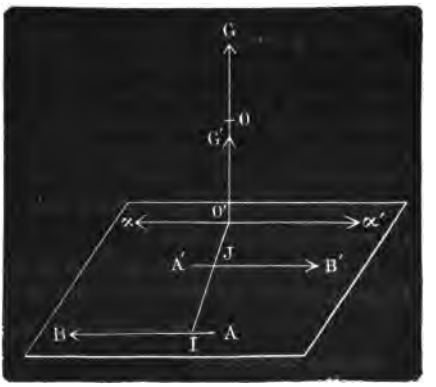


FIG. 638.

Le moment de AB est égal à $AB \times O'I$:

Le moment de A'B' est $A'B' \times O'J$.

Ce qui donne comme somme géométrique :

$$AB \times O'I - A'B' \times O'J.$$

Ou puisque

$$AB = A'B'$$

$$AB\,(O'I - O'J) = AB \times IJ.$$

On a donc finalement :

$$\left(M^t_{(o)}\,\overline{AB}\right) + \left(M^t_{(o)}\,\overline{A'B'}\right) = \overline{AB} \times \overline{IJ}.$$

Le vecteur $O'G' = OG$ est donc égal à $AB \times IJ$.

C'est *l'axe du couple.* Il est perpendiculaire au plan du couple et égal au moment linéaire d'un des vecteurs par rapport au point origine de l'autre vecteur. De plus, il est facile de vérifier que la grandeur du moment du couple $AB \times IJ$ est indépendante de la position du point O.

IJ est le *bras* de levier du couple.

1029. Théorème. — *Le moment linéaire d'un couple de vecteurs par rapport à un axe est égal à la projection sur cet axe du moment linéaire du couple.*

On vient de voir que le moment linéaire est indépendant de la position du point O choisi dans l'espace. Si l'on prend un point de l'axe, on projettera sur l'axe le *moment linéaire* du couple par rapport à ce point de l'axe, et l'on aura ainsi le moment linéaire du couple par rapport à l'axe (1020).

§ III. — RELATIONS ENTRE LES MOMENTS RÉSULTANTS D'UN SYSTÈME QUELCONQUE DE VECTEURS PAR RAPPORT A DEUX POINTS O ET O′

1° Commençons par le cas d'un seul vecteur.

1030. Théorème. — *Le moment linéaire d'un vecteur* $\overline{AB}$ *par rapport à un point* O′ *est la somme géométrique du moment linéaire du vecteur* $\overline{AB}$ *par rapport à un autre point* O *et du moment linéaire par rapport au point* O′ *du vecteur* $\overline{O\alpha}$ *équipollent à* AB *et mené par le point* O.

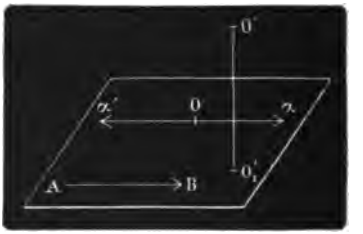


FIG. 639.

Soient le vecteur $\overline{AB}$ et les deux points O et O′ quelconques dans l'espace; faisons passer un plan par $\overline{AB}$ et par le point O. Du point O′ abaissons une perpendiculaire OO′₁ sur ce plan. — Par le point O menons deux vecteurs égaux et parallèles à $\overline{AB}$, l'un $\overline{O\alpha}$ de même sens et l'autre $\overline{O\alpha'}$ de sens opposé.

La somme des moments de $\overline{O\alpha}$ et de $\overline{O\alpha'}$ par rapport à tout point de l'espace est nulle, car ces moments sont égaux et directement opposés.

$$\text{On a : } \left(M^t_{(o')}\,\overline{O\alpha}\right) + \left(M^t_{(o')}\,\overline{O\alpha'}\right) = 0.$$

On peut donc écrire :

$$\left(M^t_{(o')}\,\overline{AB}\right) = \left(M^t_{(o')}\,\overline{AB}\right) + \left(M^t_{(o')}\,\overline{O\alpha}\right) + \left(M^t_{(o')}\,\overline{O\alpha'}\right).$$

Mais $\overline{AB}$ et $\overline{O\alpha'}$ forment un couple.

On a donc : (1028)

$$\left(M^t_{(o')}\,\overline{AB}\right) + \left(M^t_{(o')}\,\overline{O\alpha'}\right) = \left(M^t_{(o)}\,\overline{AB}\right).$$

Ce qui donne finalement

$$\left(M^t_{(o')}\,\overline{AB}\right) = \left(M^t_{(o)}\,\overline{AB}\right) + \left(M^t_{(o')}\,O_\alpha\right).$$

C. Q. F. D.

2° Cas d'un nombre quelconque de vecteurs :

1031. Théorème général. — *Le moment résultant d'un système quelconque de vecteurs par rapport à un point* O′ *est la somme géométrique du moment résultant du système par rapport à un point* O, *et du moment de la résultante générale* OR *relative au point* O, *par rapport au point* O′.

Soient O′H′ le moment résultant du système par rapport à O′ et OH le moment résultant du système par rapport à O ; on devra avoir :

$$(O'H') = (OH) + \left(M^t_{(o')}\,\overline{OR}\right).$$

Soit $\overline{AB}$ l'un des vecteurs du système donné et $\overline{O\alpha'}$, le vecteur équipollent d'origine O.

On a vu précédemment que :

$$\left(M^t_{(o')}\overline{AB}\right) = \left(M^t_{(o)}\overline{AB}\right) + \left(M^t_{(o')}\overline{O\alpha}\right).$$

De même pour les vecteurs équipollents A_1B_1 et $O\alpha_1$, on a :

$$\left(M^t_{(o)}\,\overline{A_1B_1}\right) = \left(M^t_{(o)}\overline{A_1B_1}\right) + \left(M^t_{(o')}\overline{O\alpha_1}\right).$$

Et ainsi de suite.

Ajoutons membre à membre ces équipollences, nous obtiendrons l'égalité géométrique

$$\left(\Sigma\, M^t_{(o')}\overline{AB}\right) = \left(\Sigma\, M^t_{(o)}\overline{AB}\right) + \left(\Sigma\, M^t_{(o')}\overline{O\alpha}\right).$$

Or, par définition, on a :

$$(O'H') = \left(\Sigma\, M^t_{(o')}\overline{AB}\right) \text{ et } (OH) = \left(\Sigma\, M^t_{o}\overline{AB}\right).$$

Puisque les vecteurs tels que $\overline{O\alpha}$ équipollent à $\overline{AB}$ ont le point O pour origine, leur moment résultant $\left(\Sigma\, M^t_{(o')}\overline{O\alpha}\right)$ est égal au moment de leur résultante $\overline{OR}$.

$$\text{On a donc } (O'H') = (OH) + \left(M^t_{(o')}\overline{OR}\right).$$

C. Q. F. D.

1032. Remarque. — Si la somme géométrique des vecteurs est nulle, on a $\left(M^t_{(o')}\overline{OR}\right) = 0$.

On a alors $(O'H') = (OH)$, c'est une extension du théorème relatif au couple de vecteurs.

Par conséquent, lorsque la somme géométrique d'un système de vecteurs quelconque est nulle leur moment résultant par rapport à un point O' quelconque est constant en grandeur, direction et signe, puisqu'il est équipollent au moment résultant par rapport à un point fixe O.

Si l'on a à la fois $(OR) = 0$, $OH = 0$; on aura également $O'H' = 0$.

§ IV. — MOMENT RELATIF DE DEUX VECTEURS

1033. Définition. — On appelle *moment relatif de deux vecteurs* $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ le produit

$$\pm\, \overline{AB} \times \overline{CD} \times d \times \sin\varphi,$$

d étant leur plus courte distance et φ l'angle de leurs directions. On prend le signe + ou — suivant qu'un mobile parcourant l'un des vecteurs tourne autour de l'autre vecteur dans le sens direct ou dans le sens rétrograde.

Cette notion constitue une généralisation de la théorie du moment d'un vecteur AB par rapport à un axe $z'z$. Prenons sur $z'z$, dans le sens positif, un vecteur CD égal à 1 ; le moment relatif de AB et de CD est

$$\pm\, AB \times d \times \sin\varphi.$$

Il se réduit au moment de AB par rapport à l'axe.

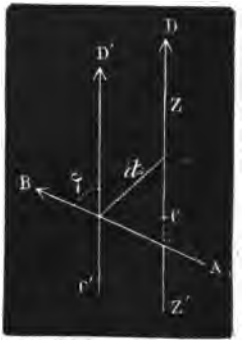


FIG. 640

1034. Théorème. — *La valeur absolue du moment relatif de deux vecteurs* $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, *est égale au volume du parallélipipède qui a ces deux vecteurs comme arêtes non consécutives.*

La base du parallélipipède est $CD \times CB' \sin\varphi$.

La hauteur est la distance des plans BAD', B'CD, c'est-à-dire la plus courte distance d des deux vecteurs (579).

Par conséquent le volume du parallélipipède est bien égal à :

$$AB \times CD \sin\varphi \times d$$

valeur absolue du moment relatif de AB et de CD.

FIG. 641.

1035. Théorème. — *La valeur absolue du moment relatif de deux vecteurs est égale à six fois le volume du tétraèdre construit sur ces vecteurs.*

Le tétraèdre en question $ABCDD_1$ s'obtient en joignant CB, AD, BD par des droites. Son volume est le sixième du parallélipipède. En prenant D comme sommet et ABC comme base, on voit que les deux solides ont même hauteur, et que la base de la pyramide triangulaire est la moitié de la base du parallélipipède. Ce tétraèdre est donc le *sixième* du volume du parallélipipède.

PROJECTIONS CENTRALES

CHAPITRE PREMIER

Perspective d'un point, d'une droite. — Point de fuite. — Perspective de droites concourantes, ou parallèles.

§ Ier. — PERSPECTIVE DU POINT ET DE LA DROITE POINT DE FUITE

1036. Définitions. — Étant donné un point *O* appelé *point de vue*, où est censé placé l'œil de l'observateur, un plan T appelé *plan du Tableau*, un point M de l'espace, on appelle *projection centrale* ou *conique* ou encore *perspective* du point M le *point de rencontre m* du vecteur OM et du plan (T).

On appelle encore le *point O* le *centre* de projection, le *plan* (*T*), le *plan de projection*, et le *vecteur OM* la *projetante* du point M. Le plan (V) contenant le point de vue O et parallèle à (T) s'appelle *plan de vue*.

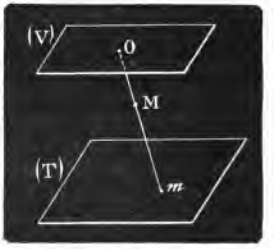


FIG. 642.

1037. Perspective ou projection centrale d'un point. — 1° Si le point M est au-dessous du plan de vue (V), la projetante OM rencontre (T) au point *m* qui est la perspective de M.

2° Si M est dans le plan de vue, OM est parallèle à (T); le point M n'a pas de perspective, ou plutôt sa perspective est rejetée à l'infini ainsi que la perspective de tous les points du plan (V). Le point *m* est la perspective de tous les points du vecteur indéfini *Om*.

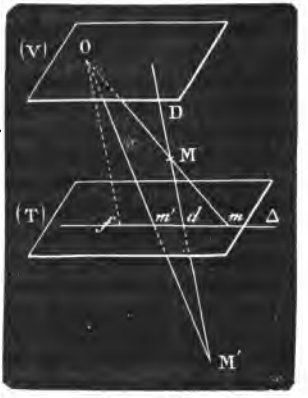


FIG. 643.

1038. Projection centrale d'une droite. — La *perspective* ou *projection centrale d'une droite* de l'espace est *le lieu* des perspectives des différents points de cette droite. La perspective d'une droite D est la trace sur le plan (T) du plan déterminé par la droite D et le point de vue O.

La droite Δ est le lieu des perspectives des différents points M et M' de la droite D.

1039. Point de fuite d'une droite. — Le point f de la droite Δ où la droite Of menée parallèlement à D perce le plan du tableau est le *point de fuite* de la droite D. Il est la perspective du *point à l'infini* de la droite.

Si la droite D passe par le point de vue, la perspective de tous ses points se réduit au seul point où elle perce le plan P.

Si elle est dans le plan de vue, elle n'a pas de perspective, ou plutôt sa perspective est rejetée à l'infini.

§ II. — PERSPECTIVE DES DROITES CONCOURANTES OU PARALLÈLES

1040. Perspective de droites concourantes. — 1° Soient deux droites D et D′ concourantes. Supposons qu'aucune d'elles ne soit dans le plan de vue, leur point de concours situé par conséquent hors du plan de vue, aura une perspective située sur les perspectives des deux droites. Si le plan qui contient les deux droites ne passe pas par le point de vue, ces deux droites auront une perspective distincte, et la perspective m du point de concours M sera à l'intersection des perspectives de ces droites.

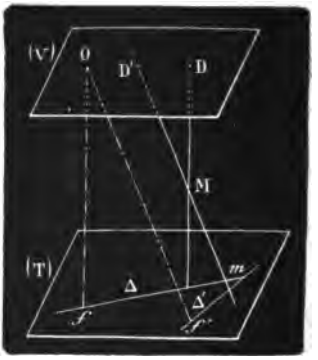


FIG. 644.

2° Si les deux droites D et D′ ont leur point de concours O′ dans le plan de vue (fig. 645), la perspective de ce point est rejetée à l'infini, mais les plans projetants qui passent tous deux par OO′ coupent le plan du tableau suivant deux parallèles à OO′. Les perspectives des droites D et D′ sont parallèles, à moins que le plan de ces droites ne passe par le point de vue; alors les perspectives de ces droites sont confondues.

3° Si l'une des droites est dans le plan de vue, sa perspective est rejetée à l'infini. Le point commun aux deux droites étant également dans le plan de vue, sa perspective est rejetée à l'infini.

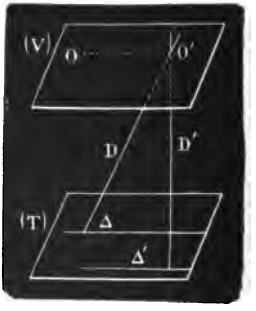


FIG. 645.

On voit donc que si deux droites concourantes ne sont ni l'une ni l'autre dans le plan de vue, et si leur point de concours a une perspective non rejetée à l'infini, cette perspective est à l'intersection de la perspective des deux droites concourantes.

La réciproque de ce théorème n'est pas toujours vraie. Les perspectives de deux droites peuvent avoir un point de commun M′, lorsque la droite qui joint le point de vue O à M′ rencontre les deux droites, ce qui n'exige pas que les droites se coupent dans l'espace.

1041. Perspective de deux droites parallèles. — Soient deux droites D,D′ parallèles, non parallèles au plan du tableau, leurs perspectives passeront par la trace de la parallèle à chacune d'elles, menée par le point de vue. Elles ont donc, *même point de fuite*, et leurs perspectives P et P′ ont ce même point f commun.

Réciproquement. — 1° Si deux droites ont *même point de fuite, elles sont parallèles.* Ce point de fuite est la trace sur le plan du tableau de la droite O*f* menée par le point de vue O parallèlement aux droites données. Toutes les droites qui ont le point de fuite *f* sont parallèles à O*f* et par suite sont parallèles entre elles.

2° Si les deux droites parallèles sont des droites de front, c'est-à-dire parallèles au plan du tableau sans être situées dans le plan de vue, leurs perspectives sont parallèles comme déterminées par deux plans projetants passant par deux

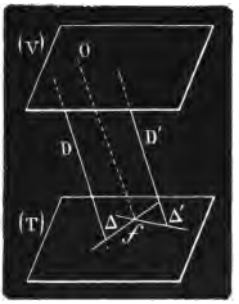


FIG. 645 *bis.*

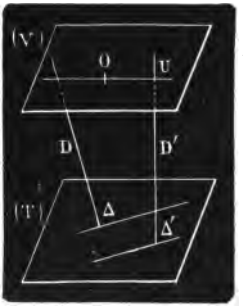


FIG. 646.

parallèles au plan du tableau. *Leur point de fuite* est alors rejeté à l'infini.

3° Les droites qui ont leurs perspectives parallèles ne sont pas nécessairement parallèles entre elles. Il faut et il suffit qu'elles s'appuient sur une même *droite de front* OU (fig. 646) passant par le point de vue O.

La condition est nécessaire, en effet si les perspectives ΔΔ′ sont parallèles les plans projetant se coupent suivant une parallèle au plan du tableau passant par O et rencontrant D et D′.

La condition est suffisante, car si tous les plans projetants passent par la droite de front OU, leurs intersections Δ et Δ′ avec le plan du tableau (T) seront parallèles.

CHAPITRE II

Perspective d'une figure plane. — Ligne de fuite d'un plan. — Conception de la droite à l'infini d'un plan. — Perspective d'une ligne courbe.

§ Ier. — PERSPECTIVE D'UNE FIGURE PLANE LIGNE DE FUITE D'UN PLAN

1042. Perspective d'une figure plane. — Ligne de fuite d'un plan. — Soit un plan P passant par le point de vue O et coupant le plan de vue, les perspectives de ses différents points sont sur la trace π du plan P et du plan (T) du tableau (fig. 647). Réciproquement, toute droite qui joint O à un point de la trace π est projetante de ses points. On en conclut que toute figure plane tracée dans P a sa perspective sur π.

Les points de la trace du plan P avec le plan de vue ont tous leur perspective rejetée à l'infini.

2° Si un plan P n'est pas un plan de front et ne passe pas par le point de vue (fig. 648), tous ses points ont une perspective, excepté ceux qui appartiennent à la droite d'intersection de ce plan avec le plan de vue, qui ont leur perspective rejetée à l'infini.

Réciproquement, tout point m du tableau peut être regardé comme la

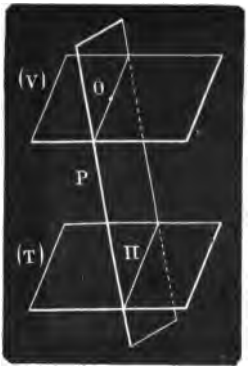


FIG. 647.

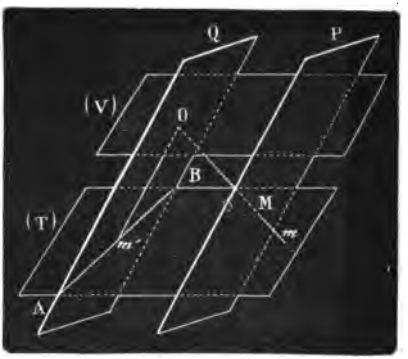


FIG. 648.

perspective d'un point M du plan P. Il est en effet la perspective de la trace M du vecteur Om traversant le plan P.

Il n'y a d'exception que si le vecteur Om' est dans un plan Q parallèle au plan P, et passant par le point de vue O.

L'intersection AB de Q avec le plan du tableau T est la *ligne de fuite* du plan P.

3° Si le plan P est parallèle au plan du tableau, sa *ligne de fuite* est rejetée à l'infini.

1043. Plans parallèles. — Deux plans PP′ parallèles entre eux, mais non parallèles au plan du tableau ont la *même ligne de fuite*, puisque c'est l'*intersection* avec le plan (T) du plan Q mené par *O* parallèlement à P et à P′ qui est la ligne de fuite de P et de P′.

Réciproquement, si deux plans P et P′ ont même *ligne de fuite*, ils sont parallèles au plan Q et par là même sont parallèles entre eux.

2° Si deux plans sont parallèles au plan du tableau, leur ligne de fuite est rejetée à l'infini.

Réciproquement, si la ligne de fuite de deux plans est rejetée à l'infini, chacun de ces plans est parallèle au plan du tableau, ils sont donc parallèles entre eux.

§ II. — CONCEPTION DE LA DROITE A L'INFINI D'UN PLAN

Si deux droites d'un plan sont concourantes, elles ont un point de commun. Si elles sont parallèles, on est convenu de dire qu'elles ont un point de commun à l'infini.

Si deux plans ne sont pas parallèles, ils ont une droite commune d'intersection. S'ils sont parallèles, on est convenu de dire qu'ils ont une droite *commune* à l'infini.

1044. Droite de l'infini d'un plan. — En général un plan a une ligne de fuite.

La perspective d'une droite d'un plan P est une droite du plan du tableau (T). Inversement une droite du tableau (T) peut être regardée comme la perspective d'une droite du plan P. On voit donc que la *ligne de fuite* F du plan P peut être regardée comme la perspective d'une droite du plan P. Mais comme tous les points de cette droite du plan P sont rejetés à l'infini on est amené à dire que tous les points d'un plan situés à l'infini dans ce plan sont sur une même droite qui est *la droite à l'infini du plan* P. Inversement, la droite Δ du plan P située dans le plan de vue (V) est la droite qui a pour perspective la *droite de l'infini* du plan (T).

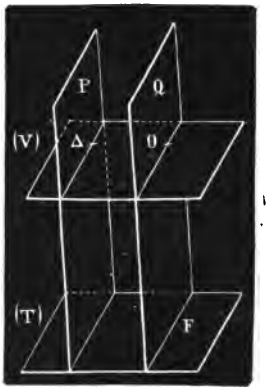


FIG. 649.

§ III. — PERSPECTIVE D'UNE LIGNE COURBE

1045. Perspective d'une ligne courbe. — La projection d'une courbe C) *est le lieu* des perspectives des différents points de cette courbe. Généralement c'est une courbe (*c*) du plan du tableau. Il y a exception si cette courbe (C) est contenue dans un plan passant par le point de vue O, sa projection est alors une droite, intersection du plan projetant avec le plan du tableau (1042).

Soient M et M′ deux points de la courbe (C); la droite *mm′* est la perspective de la droite MM′. Lorsque le point M′ se rapproche indéfiniment de M, le point *m′* se rapproche également de *m*. Les droites $\overline{MM'}$ et $\overline{mm'}$ ont pour positions limites les tangentes *MT* et *mt* aux courbes (C) et (*c*); *mm′* ne cessant pas d'être la projection de MM′, *mt* sera la projection de MT.

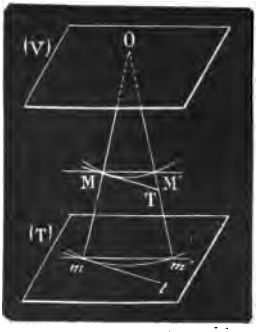


FIG. 650.

Ce qui démontre *que la tangente* en un point M d'une courbe (C) a pour projection la tangente à la courbe (*c*) projection de (C) au point *m* projection de M.

Si la tangente MT passait par le point de vue O, sa projection se réduirait au point *m*.

CHAPITRE III

Transformation des figures par la perspective. — Rapports anharmoniques. — Quadrilatère complet. — Triangles homologiques.

§ Ier. — RAPPORT ANHARMONIQUE CONSERVÉ EN PROJECTION

1046. Définitions. — On appelle propriétés *descriptives* des figures celles dans lesquelles n'interviennent que les relations de *situation* et nullement les mesures de grandeur. Les propriétés descriptives des figures sont projectives.

Ainsi trois points en ligne droite se projettent suivant trois points en ligne droite. En général, deux droites concourantes se projettent suivant deux droites concourantes.

Les propriétés *métriques* des figures sont celles dans lesquelles interviennent des mesures de longueur. En général, ces propriétés métriques ne se conservent pas en projection.

Il y a exception pour certaines propriétés métriques qui sont projectives. Le *faisceau harmonique*, par exemple, se projette suivant un *faisceau harmonique*.

Application I. — *Le rapport anharmonique se conserve en projection centrale.*

1047. Définition. — Étant donnés quatre points ABCD sur une droite orientée X'X, on appelle *rapport anharmonique* de ces quatre points considérés dans l'ordre où ils sont nommés,

le nombre $$\lambda = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA} \times \overline{DB}}{\overline{CB} \times \overline{DA}} = (ABCD).$$

On prend le rapport des distances du *troisième* point au *premier* et au

Fig. 650 *bis*.

deuxième, et on le divise par le rapport des distances du *quatrième* point au *premier* et au *deuxième*.

On donne le nom de *faisceau anharmonique* à un système de rayons OA, OB, OC, OD partant d'un point quelconque *O centre du faisceau*.

THÉORÈME

1048. — *Le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite se conserve en projection centrale.*

Soit O le point de vue. Les projections centrales de ABCD seront A'B'C'D' et continueront de former un rapport anharmonique égal au premier.

En effet :

On a, (1) $$\frac{CA}{\sin COA} = \frac{OA}{\sin OCA};$$

(2) $$\frac{CB}{\sin COB} = \frac{OB}{\sin OCB},$$

mais sin OCA = sin OCB.

Divisant membre à membre (1) et (2) il vient

$$\frac{CA}{CB} = \frac{OA}{OB} \times \frac{\sin COA}{\sin COB}.$$

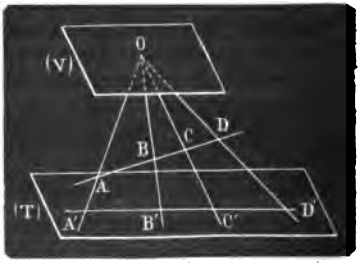


Fig. 651.

On aurait de même

$$\frac{DA}{DB} = \frac{OA}{OB} \times \frac{\sin DOA}{\sin DOB}$$

et finalement :

(3) $$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{\sin COA}{\sin COB} : \frac{\sin DOA}{\sin DOB}.$$

Le rapport anharmonique du premier membre ne dépend donc que des angles formés entre eux par les rayons.

On aura de même :

$$(4)\quad \frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'} = \frac{\sin C'OA'}{\sin C'OB'} : \frac{\sin D'OA'}{\sin D'OB'}.$$

Les seconds membres des égalités (3) et (4) étant égaux, les premiers membres sont aussi égaux.

$$\text{Donc } (A'B'C'D') = (ABCD).$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Le rapport est *harmonique* lorsque $\lambda = -1$,

c'est-à-dire lorsque $$\frac{\overline{C'A}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{DB},$$

§ II. — TRANSFORMATION DU QUADRILATÈRE COMPLET

1049. Application II. — *Projeter un quadrilatère complet suivant un parallélogramme.*

Soit le quadrilatère complet ABCDEF. On a vu (818) que l'une quelconque DB des trois diagonales est divisée harmoniquement par les deux autres AC, FE et que les points I et M sont conjugués par rapport à B et à D. Nous verrons que le rapport harmonique est conservé en projection.

Prenons un point de vue O arbitraire, et le plan du tableau parallèle au plan OFE ; la droite FE sera projetée suivant la droite de l'infini (1039) ; les points F' E' projections de F et de E sont à l'infini. Les droites AD, CB dont le point de concours F est projeté à l'infini ont leurs projections parallèles (1040). Il en est de même de AB et de CD dont le point de concours E est également projeté à l'infini. Le quadrilatère ABCD est donc projeté suivant le parallélogramme A'B'C'D'.

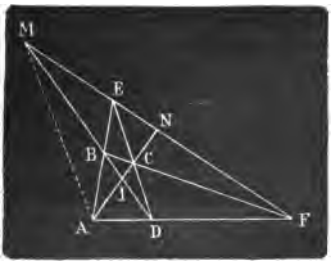


FIG. 652.

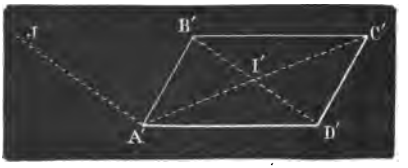


FIG. 653.

Le point I, intersection des diagonales AC, BD, est projeté en I' centre de A'B'C'D'. Le point M, appartenant à la droite FE, est projeté à l'infini sur B'D'. Le point I' milieu de B'D' est le conjugué de la projection à l'infini de M par rapport à B' et à D'. (424).

Le faisceau harmonique AM, AB, AC, AD se projette suivant un *nouveau faisceau harmonique* A'J, A'B', A'C', A'D'.

A'J est, en effet, la projection de AM parallèle à D'B', car AM et DB ayant la perspective de leur point de concours M projetée à l'infini, ont leurs projections parallèles (1040).

§ III. — APPLICATION III. — TRIANGLES HOMOLOGIQUES

1050. Définition. — Deux triangles ABC A′B′C′ situés dans un même plan et tels que les droites AA′, BB′, CC′ qui joignent les sommets correspondants, concourent en un même point O sont dits *homologiques;* le point O est le *centre d'homologie.*

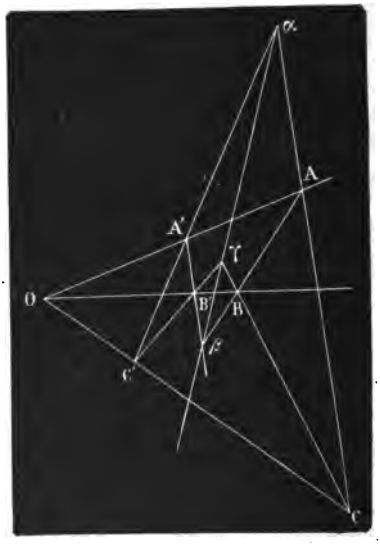


FIG. 654.

1051. Théorème. — *Dans deux triangles homologiques les points de rencontre* α, β, γ, *des côtés correspondants,* CA *et* C′A′, AB *et* A′B′, BC *et* B′C′ *sont trois points en ligne droite.*

Soient α et γ les points de rencontre des côtés CA et C′A′, CB et C′B′. Faisons une projection centrale sur un plan du tableau parallèle au plan déterminé par α, γ et le point de vue O, αγ sera projetée à l'infini (1039). Les côtés CA, C′A′ ayant leur point de concours α projeté à l'infini, auront leurs projectives *ca, c′a′* parallèles (1040). Il en sera de même des côtés CB, C′B′ qui ont leur point de concours γ projeté à l'infini.

D'un autre côté, les projections *aa′, bb′, cc′* des concourantes AA′, BB′, CC′ seront concourantes.

Les figures *abc, a′b′c′* sont alors homothétiques et *ab* projection de AB est parallèle à *a′b′* projection de A′B′. Le point de concours β de AB et A′B′ a donc sa projection à l'infini ; il est donc sur la droite αγ.

Remarque. — La droite αβγ est appelée *axe d'homologie.*

1052. Théorème réciproque. — *Si, dans deux triangles, les points de rencontre* α, β, γ *des côtés homologues* CA *et* C′A′, AB *et* A′B′, BC *et* B′C′ *sont en ligne droite, les triangles sont homologiques.*

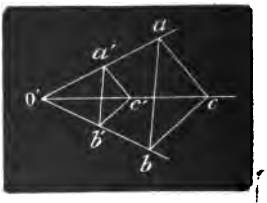


FIG. 655.

Projetons la figure de telle sorte que la droite α, β, γ se projette suivant la droite de l'infini du plan du tableau. Dès lors les triangles ABC A′B′C′ seront projetés de telle sorte que leurs côtés correspondants auront leurs projections *abc a′b′c′* deux à deux parallèles, puisque les projections de leurs points de concours sont rejetées à l'infini (1049). Ces deux triangles *abc a′b′c′* sont donc homothétiques. Il existera donc un centre d'homothétie O′. Soit le point O de la figure dont la projection est O′. Ce point sera nécessairement à la fois sur les droites AA′ BB′ CC′. Ce sera le *centre d'homologie* des triangles qui sont eux-mêmes *homologiques.*

TRANSVERSALES

Théorèmes de Ménélaüs et de Céva. Applications.

§ I. — THÉORÈMES DE MÉNÉLAUS ET DE CÉVA

1053. *Définition.* — On appelle *transversale* une droite qui coupe les trois côtés d'un triangle prolongés indéfiniment. Si l'on désigne par A′, B′, C′, les points où la transversale rencontre les côtés BC, AC, AB, du triangle ABC (*fig.* 656 et *fig.* 657), chacun de ces points sera l'origine des segments terminés aux sommets situés

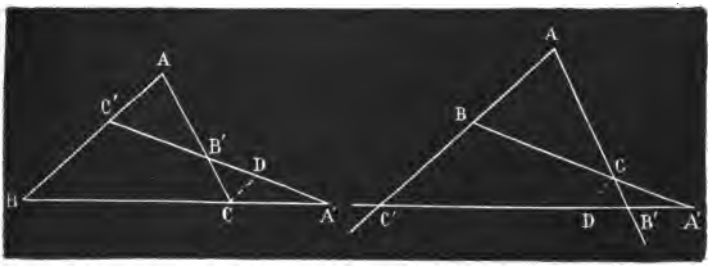


FIG. 656. FIG. 657.

sur ce même côté. Or, il y a toujours deux points de rencontre d'une transversale avec les côtés d'un triangle et un sur un côté prolongé (*fig.* 656), ou tous les trois sont sur les prolongements des côtés (*fig.* 657). Si la rencontre a lieu sur les côtés, comme en B′ et en C′ (*fig.* 656), les segments B′A et B′C de même que les segments C′A et C′B ont des directions opposées et leurs signes sontcontraires

(423); si la rencontre a lieu sur les prolongements des côtés, les segments B'A et B'C, etc. (fig. 657) ont tous la même direction, et, par suite, tous ont le même signe.

THÉORÈME DE MÉNÉLAÜS

1054. — *Une transversale à un triangle détermine sur ses côtés six segments tels que le produit des rapports des deux segments de chacun des côtés est égal à l'unité (fig. 656 et fig. 657).*

D'après cet énoncé on doit avoir la relation :

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Montrons, en premier lieu, que le produit des trois rapports est positif. Or le premier est positif; car les segments qui le composent, étant de même sens, ont le même signe; les segments qui entrent dans chacun des deux autres sont également de même sens dans la figure 657 et, par suite, sont positifs; mais ils sont de sens opposés dans la figure 656 et sont négatifs l'un et l'autre: en conséquence, leur produit est positif. Il résulte de là que les trois rapports considérés sont, ou tous trois positifs, ou un positif et deux négatifs : donc dans tous les cas le produit des trois sera positif.

Montrons maintenant qu'il est égal à l'unité. A cet effet, menons par le point C une parallèle CD au côté AB. Par suite de cette parallèle les triangles A'BC', A'CD sont semblables, de même que les triangles B'AC' et B'CD, d'où les égalités suivantes :

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{C'B}{CD}$$

$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{CD}{C'A}.$$

Multipliant ces deux relations membre à membre et supprimant le facteur commun CD, il vient :

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} = \frac{C'B}{C'A},$$

d'où, en divisant les deux membres par $\frac{C'B}{C'A}$,

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

1055. Remarque. — La loi de formation du produit constant

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B}$$

mérite quelque attention. On voit que les deux segments d'un même rapport appartiennent au même côté et que chacun d'eux a pour origine le point de rencontre de ce côté avec la transversale. On remarque, d'autre part, que le numérateur de chaque rapport est terminé par la même lettre que le dénominateur du rapport précédent. Avec ces indications on peut facilement écrire la relation en commençant par un segment quelconque. Si, par exemple, le premier segment est B'A, le premier facteur sera $\frac{B'A}{B'C}$ et la relation s'écrira de la manière suivante:

$$\frac{B'A}{B'C} \times \frac{A'C}{A'B} \times \frac{C'B}{C'A} = 1.$$

THÉORÈME (*réciproque*)

1056. — *Si trois points pris sur les côtés d'un triangle, ou sur leurs prolongements, déterminent six segments tels que le produit des rapports de deux segments de chacun des côtés, soit égal à l'unité, ces trois points sont en ligne droite.*

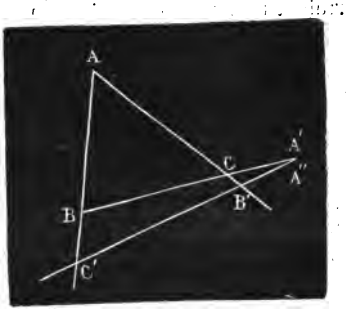


FIG. 658.

S le triangle est ABC et si les trois points pris sur les côtés BC, AC, AB prolongés, s'il est nécesaire, sont A', B', C', on a par hypothèse :

$$\frac{A'B}{AC'} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Il faut prouver que les points A', B', C' sont en ligne droite.

En effet, si l'on représente par A'', le point où la droite C'B' coupe BC ou son prolongement, on a, d'après le théorème direct :

$$\frac{A''B}{A''C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Comparant la relation accordée et cette dernière, on en déduit forcément cette égalité :

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{A''B}{A''C}.$$

Donc les points A' et A'' se confondent et les trois points A', B', C' sont en ligne droite.

THÉORÈME DE JEAN DE CÉVA

1057. — *Les droites menées d'un point du plan d'un triangle à ses trois sommets déterminent sur ses côtés six segments tels que le produit des rapports des deux segments de chacun des côtés est égal à — 1.*

Soit O le point donné dans le plan du triangle ABC et A', B', C' les points où les droites menées du point O rencontrent les côtés du triangle ABC en passant par ses sommets. Il faut démontrer qu'on a la relation :

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = -1.$$

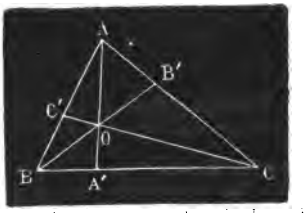


FIG. 659.

En effet, le triangle ABA' coupé par la transversale COC' donne (1054) :

$$\frac{CB}{CA'} \times \frac{OA'}{OA} \times \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

D'autre part, AA'C coupé par la transversale BOB' donne de même :

$$\frac{BA'}{BC} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{OA}{OA'} = 1.$$

Multipliant ces deux dernières relations membre à membre et supprimant les facteurs communs, il vient :

$$\frac{CB}{CA'} \times \frac{C'A}{C'B} \times \frac{BA'}{BC} \times \frac{B'C}{B'A} = 1,$$

ou

$$\frac{CB}{BC}\times\frac{C'A}{C'B}\times\frac{BA'}{CA'}\times\frac{B'C}{B'A}=1;$$

mais le rapport $\frac{CB}{BC}=-1$, de plus $\frac{BA'}{CA'}=\frac{A'B}{A'C}$: donc on a la relation cherchée

$$\frac{A'B}{A'C}\times\frac{B'C}{B'A}\times\frac{C'A}{C'B}=-1.$$

THÉORÈME (*réciproque*)

1058. — *Si trois points pris sur les côtés d'un triangle ou sur leurs prolongements, déterminent six segments tels que le produit des rapports des deux segments de chacun des côtés est égal à* -1, *les droites qui joignent ces points aux sommets opposés sont concourantes.*

Soient (*fig.* 660) A′, B′, C′ trois points tels qu'on ait la relation :

$$\frac{A'B}{A'C}\times\frac{B'C}{B'A}\times\frac{C'A}{C'B}=-1.$$

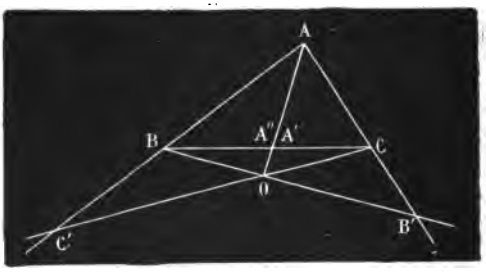


FIG. 660.

Il s'agit de prouver que les droites qui joignent les points A′, B′, C′ aux sommets A, B, C concourent en un même point O.

A cet effet, joignons le point A au point de concours O des droites BB′, CC′ et soit A″ le point où AO rencontre le côté BC. Le théorème direct donne :

$$\frac{A''B}{A''C}\times\frac{B'C}{B'A}\times\frac{C'A}{C'B}=-1.$$

Comparant la relation accordée et cette dernière, on en déduit :

$$\frac{A'B}{A'C}=\frac{A''B}{A''C}.$$

Donc les points A′ et A″ se confondent ; par suite la droite AA′ passe en O, point de concours des droites BB′, CC′.

1059. Remarque. — Les réciproques des deux théorèmes directs précédents sont d'un usage fréquent en géométrie : la première sert à démontrer que trois points sont en ligne droite et la seconde que trois droites sont concourantes.

APPLICATION I. — THÉORÈME

1060. — *Les pieds des bissectrices de deux des angles d'un triangle sur les côtés opposés et le pied de la bissectrice du supplément du troisième, sont en ligne droite.*

Soient ABC le triangle et CC′, BB′, AA′ les trois bissectrices répondant à l'énoncé. Il faut démontrer que les points A′, B′, C′ sont en ligne droite, ou que les six segments déterminés par ces points sur les côtés du triangle ABC satisfont à la relation du n° 1056.

Or, les bissectrices CC', BB', AA' donnent

$$\frac{C'B}{C'A}=\frac{BC}{AC},\quad \frac{B'A}{B'C}=\frac{AB}{BC},\quad \frac{A'C}{A'B}=\frac{AC}{AB}.$$

Si l'on multiplie ces égalités membre à membre, on voit immédiatement que le second produit est égal à 1 : donc on a aussi :

$$\frac{C'B}{C'A}\times\frac{B'A}{B'C}\times\frac{A'C}{A'B}=1.$$

Donc les points A', B', C' sont en ligne droite.

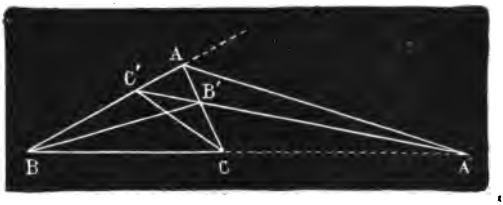


FIG. 661.

APPLICATION II. — THÉORÈME

1061. — *Les milieux des trois diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite.*

Le quadrilatère complet est un quadrilatère ordinaire, ABCD, dont on prolonge les côtés opposés jusqu'à leur intersection. Il y a alors deux sommets nouveaux E et F et une diagonale nouvelle EF.

Soient M, N, P les milieux des diagonales AC, BD, EF du quadrilatère complet ABCDEF.

Il s'agit de démontrer que les trois points M, N, P sont en ligne droite.

La droite MGL, menée parallèlement à la base AF, dans le triangle ACF, rencontre CD et CF en leurs milieux G et L.

De même, NGK menée parallèlement à BF, dans le triangle DBF, passe par les milieux G et K de DC et de DF.

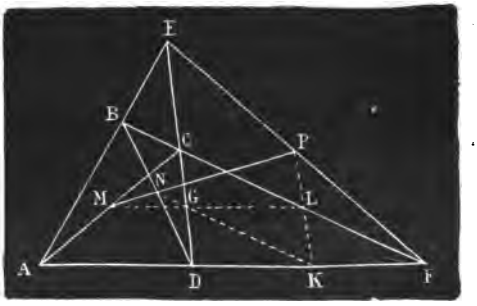


FIG. 662.

D'autre part, si l'on tire KL cette droite passera évidemment en P. Les trois points M, N, P sont donc situés sur les côtés du triangle KLG, ils sont par conséquent en ligne droite (1056) si l'on a la relation :

$$\frac{PK}{PL}\cdot\frac{ML}{MG}\cdot\frac{NG}{NK}=1;$$

mais il est facile de voir que :

$$\frac{PK}{PL}=\frac{\frac{1}{2}ED}{\frac{1}{2}EC}=\frac{ED}{EC},\quad \frac{ML}{MG}=\frac{\frac{1}{2}AF}{\frac{1}{2}AD}=\frac{AF}{AD},\quad \frac{NG}{NK}=\frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}BF}=\frac{BC}{BF}.$$

On est donc conduit à démontrer la relation :

$$\frac{ED}{EC}\cdot\frac{BC}{BF}\cdot\frac{AF}{AD}=1.$$

Or, les côtés prolongés du triangle FCD coupés par la transversale ABE donnent précisément cette relation.

Donc les trois points M, N, P sont en ligne droite.

APPLICATION III. — THÉORÈME

1062. — ***Les trois centres d'homothétie directe de trois circonférences sont en ligne droite; deux centres d'homothétie inverse sont aussi en ligne droite avec le centre d'homothétie directe qui correspond au troisième centre d'homothétie inverse.***

C'est une seconde démonstration d'un théorème déjà connu (310).

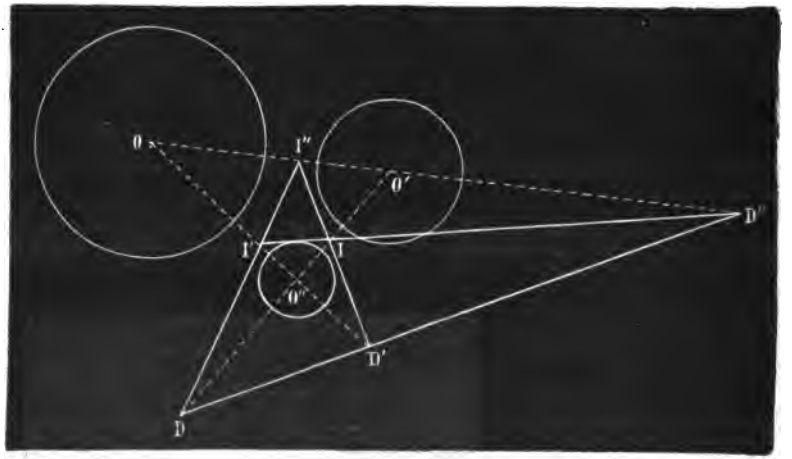


FIG. 663.

Soient O, O', O'' trois circonférences, R, R', R'' leurs rayons, D, D', D'' leurs centres d'homothétie directe et I, I', I'' leurs centres d'homothétie inverse.

Considérons d'abord les trois centres d'homothétie directe situés sur le prolongement des côtés du triangle OO'O''. Nous avons :

$$\frac{DO'}{DO''} = \frac{R'}{R''}, \quad \frac{D'O''}{D'O} = \frac{R''}{R}, \quad \frac{D''O}{D''O'} = \frac{R}{R'},$$

d'où

$$\frac{R'}{R''} \cdot \frac{R''}{R} \cdot \frac{R}{R'} = 1,$$

et par suite

$$\frac{DO'}{DO''} \cdot \frac{D'O''}{D'O} \cdot \frac{D''O}{D''O'} = 1.$$

Donc (429) les trois points D, D', D'' sont en ligne droite.

Considérons en second lieu les trois centres d'homothétie D, I', I'', l'un direct et les deux autres inverses, situés sur les côtés du même triangle. Nous avons :

$$\frac{DO'}{DO''} = \frac{R'}{R''}, \quad \frac{I'O''}{I'O} = \frac{R''}{R}, \quad \frac{I''O}{I''O'} = \frac{R}{R'},$$

d'où, comme plus haut,

$$\frac{DO'}{DO''} \cdot \frac{I'O''}{I'O} \cdot \frac{I''O}{I''O'} = 1.$$

Donc, les trois centres D, I', I'' sont aussi en ligne droite. C. q. f. d.

APPLICATION IV. — THÉORÈME

1063. — *Les médianes d'un triangle sont concourantes.* (Voir n° 141.)

Les droites AA', BB', CC' étant les médianes du triangle ABC, on a :

$$A'B = A'C,\ B'C = B'A,\ C'A = C'B.$$

Multipliant ces égalités membre à membre, il vient :

$$A'B \times B'C \times C'A = A'C \times B'A \times C'B,$$

d'où

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = -1.$$

Il est facile de voir (423) que les trois rapports sont négatifs; leur produit est donc négatif.

Donc les médianes sont concourantes.

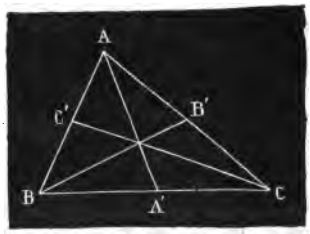


FIG. 664.

APPLICATION V. — THÉORÈME

1064. — *Les bissectrices des angles intérieurs d'un triangle sont concourantes.* (Voir n° 88.)

Les droites AA', BB', CC' étant les bissectrices des angles intérieurs du triangle ABC, on a :

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{AB}{AC},\ \frac{B'C}{B'A} = \frac{BC}{BA},\ \frac{C'A}{C'B} = \frac{CA}{CB}.$$

Multipliant ces égalités membre à membre, il vient :

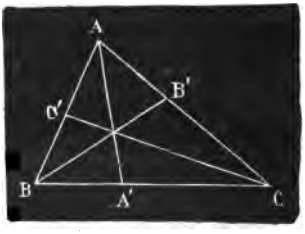


FIG. 665.

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = \frac{AB}{AC} \times \frac{BC}{BA} \times \frac{CA}{CB} = \frac{AB}{BA} \times \frac{BC}{CB} \times \frac{CA}{AC} = -1.$$

Donc, les bissectrices des angles intérieurs sont concourantes (1058).

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE

données aux Examens du Baccalauréat

(LATIN-SCIENCES ET SCIENCES-LANGUES)

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

1. — Un triangle ABC a ses sommets sur trois droites rectangulaires : démontrer que les hauteurs du triangle concourent au point P pied de la hauteur du tétraèdre OABC dont ABC est sa base. Le point Q étant le pied de la hauteur CPQ sur le côté AB, et connaissant les segments $AQ = c$, $QB = c'$ du côté AB, et la distance $PQ = d$, calculer les arêtes $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$. — Discussion. (*Poitiers.*)

2. — On considère un tétraèdre SABC dont les arêtes SA, SB, SC sont deux à deux perpendiculaires entre elles et l'on demande :

1° De calculer les longueurs des arêtes SA, SB, SC et le volume SABC en fonction des côtes a, b, c du triangle ABC ;

2° De montrer que la projection P du sommet S sur le plan ABC coïncide avec le point de concours des hauteurs du triangle ABC et que l'aire du triangle SBC est moyenne proportionnelle entre les aires des triangles PBC et ABC. (*Caen.*)

3. — On donne un trièdre SXYZ, un point fixe A sur l'arête SX, un point fixe B sur l'arête SY ; et on suppose qu'un point mobile C décrit la troisième arête SZ du trièdre.

Dans ces conditions on demande :

1° Le lieu géométrique du centre de la sphère qui passe par les quatre points S, A, B, C ;

2° Le lieu géométrique du point de rencontre G des médianes du triangle ABC ;

3° Le lieu géométrique du pied H de la hauteur issue du sommet A, dans le triangle ABC. (*Lyon.*)

4. — Une pyramide quadrangulaire SOABC a pour base un carré OABC de côté a et pour hauteur la perpendiculaire OS de longueur h au plan de base. On inscrit dans cette pyramide un prisme droit MNPQnpqO d'une hauteur variable $OM = x$ et l'on demande d'exprimer en fonction de x la surface totale de ce prisme.

On étudiera à l'aide de graphiques et en se servant des dérivées la variation de cette surface totale quand on fait croître x de o à h et cela dans les trois hypothèses suivantes :

1° $a = 1$ $\quad h = \frac{1}{3}$

2° $a = 1$ $\quad h = \frac{1}{2}$

3° $a = 1$ $\quad h = 2$ (*Alger.*)

5. — On donne une pyramide régulière à base carrée : soit a le côté de la base et h la hauteur. Un plan parallèle à la base à une distance x de cette base

coupe la pyramide entre la base et le sommet suivant un carré. On considère le parallélipipède rectangle ayant pour base ce carré et pour hauteur x :

1° Déterminer x de façon que le parallélipipède soit un cube ;

2° En supposant $a = \frac{h}{2}$, étudier les variations de la surface *totale* du parallélipipède lorsque x varie de o à h. (*Bordeaux.*)

6. — On considère un tétraèdre régulier. Quelle est la valeur du cosinus de l'angle plan α de l'un quelconque des dièdres du tétraèdre?

Construire graphiquement cet angle α. Quelle est la valeur que donnent les tables pour le logarithme décimal de cos α ? Combien l'angle α contient-il de grades et de centièmes de grades, c'est-à-dire de minutes centésimales.

Calculer $tg \frac{\alpha}{2}$. (*Lyon.*)

7. — Un cylindre et un cône droit à base circulaire ont même hauteur h. Calculer les rayons x et y des bases, sachant qu'ils ont des volumes équivalents et que les surfaces totales sont aussi équivalentes. (*Paris.*)

8. — Étant donné un cône circulaire droit de rayon R et de hauteur h, on le coupe par un plan parallèle au plan de la base et on prend la section pour la base d'un nouveau cône ayant pour sommet le centre de la base du premier. Comment doit-on mener le plan sécant pour que le volume du nouveau cône soit maximum ? Calculer en fonction de R et de h l'expression de la surface totale de ce cône de volume maximum. (*Alger.*)

9. — On considère un solide formé de deux cônes de révolution opposés par le sommet, on donne le demi-angle au sommet α de chacun des cônes et la distance h de leurs bases et l'on demande d'étudier la variation de la surface du solide, quand on fait croître de o à h, la hauteur de l'un des cônes considérés. Représentation graphique de cette variation. Déterminer l'angle α, de manière que le minimum de la surface totale à étudier soit égal à $\frac{1}{2} \pi h$?

(*Caen.*)

10. — Un cône droit a pour base un cercle de rayon R situé dans un plan P et pour hauteur H. On coupe ce cône par un plan P' parallèle à P situé du côté du sommet à une distance x de P. On considère le cylindre dont les bases sont situées dans les plans P et P' et dont la base correspondant au plan P' est l'intersection de ce plan et du cône précédent.

Exprimer la surface totale du cylindre; en étudier la variation dans les cas suivants :

1° $H = 1$ $\quad R = 2$

2° $H = 1$ $\quad R = 1$

3° $H = 1$ $\quad R = \frac{1}{2}$

Dans chacun des cas, on suppose que x varie de o à 1. — On représentera graphiquement les variations trouvées pour la surface. (*Grenoble.*)

11. — Volume d'un tronc de cône dont la hauteur est égale à 2 mètres, et les rayons des bases $1^m,5$ et 4 mètres. (*Clermont.*)

12. — Soient $a \cos\varphi$ et $a \sin\varphi$ et les diamètres des deux bases d'un tronc de cône, φ désignant un angle compris entre o et $\frac{\pi}{4}$; soit h la hauteur du tronc.

On demande de déterminer sur la droite qui joint les centres des deux bases un point tel que les deux cônes ayant ce point pour sommet et pour bases respectives les deux bases du tronc de cône aient leurs surfaces latérales équivalentes. — Discuter. (*Nancy.*)

13. — Un ouvrier veut construire la partie évasée en forme de tronc de cône circulaire ABCD d'un entonnoir ayant les dimensions suivantes : diamètre $AB = 2^{cm}$, diamètre $CD = 2^{cm}$, angle d'ouverture $AOB = 60°$.

1° Déterminer les dimensions (rayons *om* et *op*, angle *mon*) du quadrilatère curviligne *mnpq* qu'il faut tracer sur la feuille de fer-blanc pour obtenir le développement de la surface latérale du tronc de cône ABCD.

2° Calculer en litres la contenance de ce tronc de cône. (*Paris.*)

14. — On connaît le rayon R d'une base d'un tronc de cône de révolution. Calculer le rayon de la seconde base, sachant que le volume de ce tronc de cône est dans un rapport donné K avec le volume d'un cylindre de même hauteur et de rayon R.

Discussion. — Minimum de K. — Effectuer le calcul en supposant $K = \frac{7}{16}$. (*Grenoble.*)

15. — Résoudre un triangle rectangle sachant qu'en tournant autour de son hypoténuse il engendre un volume équivalent à celui d'une sphère de rayon R et qu'en tournant autour d'un des côtés de l'angle droit il engendre un volume équivalent à celui d'une sphère de rayon R'. Condition de possibilité. — Discussion? (*Grenoble.*)

16. — On fait tourner un triangle rectangle successivement autour de chacun des côtés. Déterminer la relation qui existe entre les trois volumes engendrés.

Calculer les côtés en fonction de l'hypoténuse dans le cas particulier où l'un de ces volumes est moyenne proportionnelle entre les deux autres. (*Montpellier.*)

17. — On considère un triangle ABC rectangle en A et d'hypoténuse a.

1° Donner, au moyen de a et des lignes trigonométriques de l'angle B, les expressions du volume et de la surface du solide engendré par ce triangle tournant autour de l'hypoténuse ;

2° Expression de la somme des côtés de l'angle droit.

3° Étant donné l'hypoténuse a, déterminer b de façon que la somme des côtés de l'angle droit soit égale à s. — Discuter. (*Grenoble.*)

18. — On donne un triangle BAC rectangle en A ; par le sommet C on mène une droite CD faisant avec CA un angle x.

Déterminer cet angle de manière que le triangle en tournant autour de CD engendre un volume égal à $\frac{\pi \times b \times c \times l}{3}$, b et c désignant les côtés de l'angle droit et l étant une longueur donnée.

En particulier, déterminer le maximum du volume engendré et la valeur correspondante de x.

Remarque sur la position du triangle. (*Caen.*)

19. — Trouver le volume engendré par un hexagone régulier tournant autour d'un de ses côtés. (*Lyon.*)

20. — On considère un trapèze ABCD dont les angles A et B sont droits et dans lequel OE est la parallèle équidistante des bases. On a $OA = OB = OE = a$ et $\widehat{OED} = \alpha$.

Exprimer au moyen de a et de α :

1° Les aires BDCA et DOC;

2° La surface totale et le volume du tronc de cône engendré par la rotation du trapèze tournant autour de AB;

3° a étant donné, déterminer α de façon que le volume du tronc de cône soit égal à celui d'une sphère donnée. — Discussion. (*Grenoble.*)

21. — Un demi-cercle est limité par un diamètre AB de longueur 2R. On lui mène les deux tangentes AC, BD en A et B et une troisième tangente CD faisant avec le diamètre AB un angle que l'on appelle a. On fait tourner la figure autour du diamètre AB; le trapèze ABCD engendre un tronc de cône.

Évaluer le volume de ce tronc de cône et sa surface totale S en fonction de $\operatorname{tg} a = t$; en déduire les variations de V et de S lorsque la tangente CD varie.

Évaluer le rapport $y = \frac{s}{S}$ de la surface latérale du tronc de cône à sa surface totale en fonction de $m = \cos 2a$, et en déduire la variation de ce rapport lorsque CD varie. (*Grenoble.*)

22. — Dans un cercle on trace une corde AB et sur cette corde, on construit un rectangle vers l'extérieur du cercle, de sorte que sa hauteur soit la moitié de la corde AB. On fait tourner la figure obtenue autour du diamètre perpendiculaire à AB et on obtient un volume. Considérant ce volume comme un solide, on demande sa surface.

Discussion quand la corde AB varie en gardant une direction constante. (*Marseille.*)

23. — Étant donnée une demi-circonférence de centre O et de diamètre AA', trouver une corde MM' de cette demi-circonférence telle que l'angle MOM' soit droit et que la surface engendrée par la corde MM' tournant autour de AA' soit égale à $\pi m R^2$, en désignant par R le rayon OA et par m une constante donnée. — Discussion.

On prendra comme inconnue l'angle $\widehat{AOM} = x$. (*Paris.*)

24. — On donne un cercle de centre O, de rayon R et deux diamètres rectangulaires A'A, B'B. On joint un point M du cercle au centre O, on abaisse de M la perpendiculaire MP sur B'B, et enfin en M on mène la tangente au cercle jusqu'à sa rencontre Q avec BB' :

1° Calculer le volume V engendré par le triangle OPM en tournant autour de AA';

2° Calculer le volume V_1 engendré par le triangle PQM en tournant autour de AA'.

3° Déterminer la position du point M sur le cercle de telle façon que l'on ait $V = kV_1$,

k étant un nombre positif donné. — Discussion. (*Clermont.*)

25. — D'un point A extérieur à un cercle de centre O et de rayon R on mène une tangente AT à ce cercle, T étant le point de contact. On désigne par x l'angle OAT.

1° Évaluer, au moyen de R et des lignes trigonométriques de x, la surface du solide engendré par le triangle OAT en tournant autour de OA.

2° Déterminer x de telle manière que le volume de ce solide soit égal au volume de la sphère de rayon R. (*Grenoble.*)

26. — Un secteur AOB fait un tour complet autour du rayon OA.

1° Exprimer en fonction de R et de l'angle AOB désigné par x la surface totale du solide ainsi engendré.

2° Connaissant R calculer $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ de manière que l'on ait $S = K\pi R^2$, K étant un nombre positif donné.

Discuter, trouver le maximum de K, la valeur correspondante de $tg\,\frac{x}{2}$ et celle du rayon du cercle décrit par le point B dans sa rotation autour de OA. (*Paris.*)

27. — D'un point P extérieur à un cercle O de rayon R on mène à la circonférence les tangentes PA, PB et on fait tourner la figure autour de la droite OP. En désignant par x la distance OP, on demande de trouver: 1° La surface latérale du cône PAB engendré par les tangentes; 2° les surfaces de deux calottes sphériques engendrées par les arcs de cercle ACB, AHB, situés de part et d'autre de AB.

Déterminer x de façon que la surface latérale du cône PAB soit égale à celle de la calotte sphérique ACB extérieure au cône. (*Rennes.*)

28. — Étant donné un cercle de rayon R, on prend, sur l'un de ses diamètres indéfiniment prolongé deux points A et A′ situés à l'extérieur du cercle et de part et d'autre du centre O; des points A et A′ on mène, d'un même côté du diamètre AA′, deux tangentes qui touchent le cercle respectivement en B et B′, et on considère les trois surfaces engendrées par la révolution du segment rectiligne AB, du segment rectiligne A′B′ et de l'arc de cercle BB′ autour du diamètre AA′. Cela posé, on demande de déterminer la position des points A et A′ par la double condition :

1° que la distance AA′ soit égale à une longueur donnée l supérieure à 2R;

2° que la somme des trois surfaces engendrées indiquées ci-dessus soit égale à une surface donnée πaR. On déterminera entre quelles limites doit se trouver comprise la quantité donnée a pour que le problème soit possible. (*Caen.*)

29. — Étant donnée une sphère de centre O, de rayon R, on prend sur un diamètre deux segments OS, OS′ de directions opposées et de même longueur x, supérieure à R. On considère deux cônes circonscrits à la sphère, l'un ayant son sommet en S et touchant la sphère suivant un petit cercle C, l'autre ayant son sommet en S′ et touchant la sphère suivant un cercle C′. Évaluer en fonction de x et de R le volume et la surface d'un solide limité par les portions de surfaces coniques comprises entre les sommets des cônes et leurs cercles de contact C et C′ et par la zone sphérique ayant pour bases ces mêmes cercles C et C′. — Rapport du volume à la surface. (*Caen.*)

30. — Sur un même plan horizontal reposent une sphère de rayon R et un cône droit dont la hauteur est égale au diamètre de la sphère. On coupe les deux corps par un plan horizontal P mené à une distance x du premier. Étudier comment varient en fonction de x, la somme y et le rapport z des aires des sections déterminées par P dans la sphère et dans le cône. On appelle a le rayon de base du cône. (*Grenoble.*)

31. — On donne un cercle de rayon R et un triangle isocèle inscrit dans le cercle et ayant pour base un diamètre AB du cercle. On fait tourner la figure autour de la hauteur du triangle isocèle; le cercle engendre une sphère et le triangle engendre un cône. On coupe les deux surfaces par un plan parallèle à la base du cône et situé à une distance x de cette base.

1° Calculer les surfaces des cercles de section ainsi déterminés.

2° Déterminer x de telle façon que la différence des aires des deux cercles soit égale à l'aire d'un cercle de rayon a. Cas particulier $a = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

3° Étudier la variation de la différence des aires des deux cercles lorsque x varie de o à R. (*Grenoble.*)

32. — On considère un cône droit circonscrit à une sphère de rayon R et on représente sa hauteur par $2R + x$. Exprimer en fonction de x la surface totale A du cône. Construire la courbe qui représente les variations de la fonction $\frac{A}{\pi R}$ quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$.

Minimum de l'aire A. (*Caen.*)

33. — On donne une sphère tangente à un plan P et un cône ayant pour base dans ce plan un cercle égal à un grand cercle de la sphère et dont la hauteur est égale au diamètre de la sphère. A quelle distance du plan P doit-on lui mener un plan parallèle pour qu'il détermine dans les deux corps des sections égales? (*Marseille.*)

34. — On coupe une sphère de rayon R par un plan P situé à une distance x du centre. Suivant l'intersection de la sphère et du plan on circonscrit à la sphère un cône dont la base parallèle au plan P est tangente à la sphère. Trouver le volume de ce cône et comment varie son volume avec la valeur attribuée à x. (*Marseille.*)

35. — On demande de calculer par sa tangente le demi-angle à la base d'un cône droit sachant que le rapport de la surface totale du cône à la surface de la sphère inscrite est égal à un nombre donné $\frac{K}{4}$. — Discuter. (*Ajaccio.*)

36. — D'un point O comme centre, on décrit une sphère de rayon x et d'un point A donné à une distance a du point O, x étant plus petit que a, on circonscrit un cône à la sphère : évaluer le volume V compris à l'intérieur du cône entre la sphère et le sommet. Construire la courbe qui représente la variation de la fonction $y = \frac{3aV}{\pi}$ quand x croît de o à a. (*Caen.*)

37. — Un tronc de cône circonscrit à une sphère S a son volume égal à celui d'un hémisphère donné, de rayon R, et sa surface totale double de la surface d'un cercle donné, de rayon a. Calculer les rayons x, y, des deux bases du tronc et le rayon z de la sphère S. — Discussion.

Dans le cas où $\frac{R^6}{a^6} = \frac{3}{13}$, évaluer l'angle des génératrices du tronc de cône avec les plans des bases. (*Caen.*)

38. — Calculer les rayons x et y des deux bases d'un tronc de cône, sachant que cette arête fait un angle de 60° avec le plan de la base inférieure et que la surface totale du tronc est égale à celle d'une sphère ayant pour diamètre l'arête a. (*Paris.*)

39. — Qu'obtient-on lorsqu'on se propose de trouver un tronc de cône droit tel que, en désignant par r le rayon de la petite base, R le rayon de sa grande base, h sa hauteur et A son apothème, ces quatre quantités rangées dans l'ordre r, h, R, A, forment une progression géométrique ? Quel est le rapport du volume du corps obtenu à celui d'une sphère de rayon égal à celui r de la petite base? (*Lyon.*)

40. — Dans un cône le rayon de base est r, l'arête latérale a. Calculer :

1° le volume du cône ;

2° le rayon de la sphère qui passe par le sommet et le cercle de base du cône ;

3° l'aire des zones de cette sphère qui ont pour base la base du cône.

(*Clermont.*)

41. — Étant donné un hémisphère de rayon R limité par le grand cercle AOB de centre O, on considère le point S situé à l'extrémité du rayon OS perpendiculaire au plan du cercle AOB, et on trace le cône ayant ce cercle pour base et le point S pour sommet.

On mène un plan parallèle au plan AOB, à une distance x du centre O.

Calculer l'aire y de la couronne comprise entre les deux circonférences suivant lesquelles le plan coupe la sphère et le cône. Étudier la variation de y quand x varie de o à R et représenter cette variation par une courbe.

(*Paris.*)

42. — Sur un segment de droite AB de longueur $2a$ on prend entre A et B un point M. On considère les sphères décrites sur AB, AM, et MB comme diamètres.

1° Calculer en fonction de $\frac{AM}{2} = x$ le volume V compris entre la plus grande des sphères et les deux plus petites. Étudier la variation de V lorsque M se déplace.

2° Déterminer M de façon que le volume V soit égal au produit par un nombre donné m de la somme des volumes des deux plus petites sphères. — Discuter. (*Grenoble.*)

43. — Calculer le rayon de base et la hauteur d'un cône sachant que 1° sa surface latérale est les $\frac{2}{5}$ de la surface de la base ; 2° son volume est équivalent au volume d'une sphère de 4 centim. de rayon. (*Paris.*)

44. — Trouver l'arête du cube et celle du tétraèdre régulier inscrit dans une sphère de 3 centim. de rayon. (*Clermont.*)

45. — Un corps est constitué par un cylindre ABCD de rayon x et de hauteur y, surmonté d'un hémisphère de même rayon DEC.

1° Entre quelles limites doit être compris le rayon x pour que la surface totale soit égale à πa^2, a étant une longueur donnée ? On remarquera que x et y doivent être des quantités positives ;

2° Étudier la variation du volume du corps dans les mêmes conditions que précédemment, c'est-à-dire lorsque la surface totale est égale à πa^2.

(*Clermont.*)

Problèmes du Baccalauréat (Mathématiques A)

1. — Un prisme a pour section droite un triangle ABC dont les côtés opposés aux angles A, B, C sont désignés par a, b, c. Par le point A on fait passer des plans de telle sorte que chacun d'eux coupe le prisme suivant un triangle A'B'C' rectangle en A.

Quelle relation existe-t-il entre les segments $BB' = x$ et $CC' = y$?

Montrer que l'on peut déterminer sur BC deux points M tels que les droites MA' soient toujours rectangulaires.

3° Déterminer le plan AB'C' de telle façon que le triangle AB'C' étant encore rectangle en A, la somme $x + y$ des segments BB' et CC' ait une valeur donnée m. (*Nancy.*)

2. — Avec une feuille de papier rectangulaire ABCD de côtés $a = AB = DC$, $b = AD = BC$, on veut construire une boîte ouverte de la manière suivante. On enlève à chacun des quatre sommets un petit carré de côté x, puis on relève les quatre rectangles adjacents, de façon à ce que ces quatre rectangles constituent les quatre faces latérales d'un parallélipipède ouvert.

Déterminer x de manière que cette boîte ait le plus grand volume possible. Évaluer ce volume. (*Clermont.*)

3. — On donne une angle droit YOX. Par le sommet O de cet angle on mène dans son plan un segment de droite OA de longueur a, situé à l'intérieur de l'angle YOX et faisant avec OX un angle θ. On abaisse du point A les perpendiculaires AH et AK sur OX et sur OY.

Calculer en fonction de a et de θ, la *surface totale* du cylindre qu'engendre le rectangle OHAK en tournant autour de OX et étudier, par l'emploi des dérivées, comment varie cette surface lorsque θ varie de o à $\frac{\pi}{2}$, a restant constant. (*Bordeaux.*)

4. — Le rayon d'un secteur circulaire a pour mesure x quand on prend le mètre pour unité de longueur ; son angle au centre a pour mesure θ quand on prend l'angle droit pour unité d'angle.

Calculer le rayon de base R et la hauteur h du cône de révolution dont la surface latérale se développe suivant ce secteur.

Calculer le volume V de ce cône et étudier le sens des variations de V quand on fait varier simultanément θ et x de façon que l'aire du secteur demeure constante et équivalente à celle d'un cercle de rayon a. Pour quelle valeur de θ le volume est-il maximum et quel est ce volume maximum?

Calculer numériquement en litres ce volume en supposant $a = 1$ mètre. (*Chambéry.*)

5. — On considère un cône droit à base circulaire dont la surface totale est équivalente à celle d'un cercle d'un mètre de rayon.

1° Calculer son volume connaissant la longueur x du rayon de base : étudier la variation de ce volume quand x varie, et représenter cette variation par une courbe;

2° Calculer, à un litre près, le volume du cône quand x est égal à $\frac{2}{3}$ de mètre. (*Paris.*)

6. — On donne l'hypoténuse d'un triangle rectangle ABC. Calculer les côtés de l'angle droit et les angles aigus de ce triangle, sachant que le volume qu'il engendre en tournant autour d'un axe situé dans son plan, passant par le sommet A et perpendiculaire à la médiane AM relative à l'hypoténuse est dans un rapport donné m avec le volume de la sphère qui a l'hypoténuse pour diamètre.

Quel est le maximum de m et quel est le triangle correspondant?

Effectuer les calculs numériques en supposant $m = \frac{3}{5}$ et $a = 1$ mètre. (*Chambéry.*)

7. — On considère un cercle de centre C, de rayon R et la tangente AT en un point A de la circonférence. On mène un rayon CM faisant avec CA un angle $ACM = x$ et on joint A à M.

40. — Dans un cône le rayon de base est r, l'arête latérale a. Calculer :

1° le volume du cône ;

2° le rayon de la sphère qui passe par le sommet et le cercle de base du cône ;

3° l'aire des zones de cette sphère qui ont pour base la base du cône.

(*Clermont.*)

41. — Étant donné un hémisphère de rayon R limité par le grand cercle AOB de centre O, on considère le point S situé à l'extrémité du rayon OS perpendiculaire au plan du cercle AOB, et on trace le cône ayant ce cercle pour base et le point S pour sommet.

On mène un plan parallèle au plan AOB, à une distance x du centre O.

Calculer l'aire y de la couronne comprise entre les deux circonférences suivant lesquelles le plan coupe la sphère et le cône. Étudier la variation de y quand x varie de o à R et représenter cette variation par une courbe.

(*Paris.*)

42. — Sur un segment de droite AB de longueur $2a$ on prend entre A et B un point M. On considère les sphères décrites sur AB, AM, et MB comme diamètres.

1° Calculer en fonction de $\frac{AM}{2} = x$ le volume V compris entre la plus grande des sphères et les deux plus petites. Étudier la variation de V lorsque M se déplace.

2° Déterminer M de façon que le volume V soit égal au produit par un nombre donné m de la somme des volumes des deux plus petites sphères. — Discuter. (*Grenoble.*)

43. — Calculer le rayon de base et la hauteur d'un cône sachant que 1° sa surface latérale est les $\frac{2}{5}$ de la surface de la base ; 2° son volume est équivalent au volume d'une sphère de 4 centim. de rayon. (*Paris.*)

44. — Trouver l'arête du cube et celle du tétraèdre régulier inscrit dans une sphère de 3 centim. de rayon. (*Clermont.*)

45. — Un corps est constitué par un cylindre ABCD de rayon x et de hauteur y, surmonté d'un hémisphère de même rayon DEC.

1° Entre quelles limites doit être compris le rayon x pour que la surface totale soit égale à πa^2, a étant une longueur donnée ? On remarquera que x et y doivent être des quantités positives ;

2° Étudier la variation du volume du corps dans les mêmes conditions que précédemment, c'est-à-dire lorsque la surface totale est égale à πa^2.

(*Clermont.*)

Problèmes du Baccalauréat (MATHÉMATIQUES A)

1. — Un prisme a pour section droite un triangle ABC dont les côtés opposés aux angles A, B, C sont désignés par a, b, c. Par le point A on fait passer des plans de telle sorte que chacun d'eux coupe le prisme suivant un triangle A'B'C' rectangle en A.

Quelle relation existe-t-il entre les segments $BB' = x$ et $CC' = y$?

2° Montrer que l'on peut déterminer sur BC deux points M tels que les droites MB' et MC' soient toujours rectangulaires.

3° Déterminer le plan AB'C' de telle façon que le triangle AB'C' étant encore rectangle en A, la somme $x + y$ des segments BB' et CC' ait une valeur donnée m. (*Nancy.*)

2. — Avec une feuille de papier rectangulaire ABCD de côtés $a = AB = DC$, $b = AD = BC$, on veut construire une boîte ouverte de la manière suivante. On enlève à chacun des quatre sommets un petit carré de côté x, puis on relève les quatre rectangles adjacents, de façon à ce que ces quatre rectangles constituent les quatre faces latérales d'un parallélipipède ouvert.

Déterminer x de manière que cette boîte ait le plus grand volume possible. Évaluer ce volume. (*Clermont.*)

3. — On donne une angle droit YOX. Par le sommet O de cet angle on mène dans son plan un segment de droite OA de longueur a, situé à l'intérieur de l'angle YOX et faisant avec OX un angle θ. On abaisse du point A les perpendiculaires AH et AK sur OX et sur OY.

Calculer en fonction de a et de θ, la *surface totale* du cylindre qu'engendre le rectangle OHAK en tournant autour de OX et étudier, par l'emploi des dérivées, comment varie cette surface lorsque θ varie de o à $\frac{\pi}{2}$, a restant constant. (*Bordeaux.*)

4. — Le rayon d'un secteur circulaire a pour mesure x quand on prend le mètre pour unité de longueur ; son angle au centre a pour mesure θ quand on prend l'angle droit pour unité d'angle.

Calculer le rayon de base R et la hauteur h du cône de révolution dont la surface latérale se développe suivant ce secteur.

Calculer le volume V de ce cône et étudier le sens des variations de V quand on fait varier simultanément θ et x de façon que l'aire du secteur demeure constante et équivalente à celle d'un cercle de rayon a. Pour quelle valeur de θ le volume est-il maximum et quel est ce volume maximum?

Calculer numériquement en litres ce volume en supposant $a = 1$ mètre. (*Chambéry.*)

5. — On considère un cône droit à base circulaire dont la surface totale est équivalente à celle d'un cercle d'un mètre de rayon.

1° Calculer son volume connaissant la longueur x du rayon de base : étudier la variation de ce volume quand x varie, et représenter cette variation par une courbe;

2° Calculer, à un litre près, le volume du cône quand x est égal à $\frac{2}{3}$ de mètre. (*Paris.*)

6. — On donne l'hypoténuse d'un triangle rectangle ABC. Calculer les côtés de l'angle droit et les angles aigus de ce triangle, sachant que le volume qu'il engendre en tournant autour d'un axe situé dans son plan, passant par le sommet A et perpendiculaire à la médiane AM relative à l'hypoténuse est dans un rapport donné m avec le volume de la sphère qui a l'hypoténuse pour diamètre.

Quel est le maximum de m et quel est le triangle correspondant?

Effectuer les calculs numériques en supposant $m = \frac{3}{5}$ et $a = 1$ mètre. (*Chambéry.*)

7. — On considère un cercle de centre C, de rayon R et la tangente AT en un point A de la circonférence. On mène un rayon CM faisant avec CA un angle $ACM = x$ et on joint A à M.

1° Calculer en fonction de x le volume V engendré par le triangle ACM tournant autour de AT;

2° Étudier la variation de ce volume quand x varie;

3° Calculer le cosinus et le sinus de la valeur particulière de l'angle x qui rend V maximum. (*Paris.*)

8. — Trouver les côtés d'un triangle isocèle, connaissant le périmètre $2p$ et le volume V engendré par le triangle tournant autour de la base. — Discussion.

Dans le calcul, on posera $V = \frac{\pi a^3}{3}$. (*Rennes.*)

9. — Une circonférence de centre C et de rayon a est tangente en A et B à deux droites perpendiculaires l'une sur l'autre OX, OY. Une droite OMN issue du point O rencontre la circonférence aux points M et N.

1° Déterminer la position de OMN de façon que la somme des longueurs OM et ON soit égale à une longueur donnée $2l$; quelle est la limite supérieure que l ne peut dépasser pour qu'il y ait des solutions?

Dans le cas où $l = a.\frac{\sqrt{2}+1}{2}$, calculer l'angle θ que fait OMN avec OC.

3° Calculer, dans le cas $l = a.\frac{\sqrt{2}+1}{2}$, la surface latérale et le volume du cône circulaire droit engendré par le segment de droite ON, en tournant autour de l'axe OC. (*Lyon.*)

10. — On donne un cercle et un diamètre AA' de ce cercle : une sécante au cercle MM' se déplace en restant parallèle au diamètre AA'.

Étudier les variations :

1° de l'aire S du trapèze AM M'A';

2° du volume V engendré par ce trapèze en tournant autour de AA';

3° du rapport $\frac{V}{S}$. (*Clermont.*)

11. — Un cylindre ABCD de hauteur $EF = 2x$ est inscrit dans une sphère de rayon 1. Sur la hauteur EF de ce cylindre comme diamètre, on décrit une sphère S qui touche les deux bases du cylindre en leurs centres E et F.

On envisage la différence entre le volume du cylindre ABCD et celui de la sphère S.

Étudier la variation de cette différence quand x varie.

Pour quelle valeur de x cette différence est-elle maximum? Quelle est la valeur de ce maximum? (*Paris.*)

12. — Étudier les variations du volume d'un cône droit à base circulaire circonscrit à une sphère de rayon donné. On prendra pour variable indépendante la hauteur du cône. (*Marseille.*)

13. — Étudier les variations de la surface latérale d'un cône circulaire droit inscrit dans une sphère de rayon donné. (*Poitiers.*)

14. — On donne deux points fixes O, S à la distance a l'un de l'autre.

On trace une sphère de centre O et de rayon variable égal à x.

On lui circonscrit un cône STT', de sommet S et dont l'arête latérale a pour longueur celle de la tangente issue du point S à la sphère.

Trouver l'expression du volume du cône en fonction de a et x; étudier sa variation lorsque x varie. Maximum de ce volume et valeur de x correspondante. (*Nice.*)

15. — On coupe une sphère de rayon R par un plan MBC à la distance $OM = x$ du centre, et l'on considère le cône circonscrit à la sphère suivant le cercle d'intersection.

1° Calculer en fonction de R et de x, le volume du cône SBC, ainsi que le volume compris entre la surface latérale de ce cône et la surface de la sphère;

2° Déterminer x de telle façon que la somme des deux volumes soit égale à m fois le volume du cône qui a pour base le cercle BC et pour sommet l'extrémité A du rayon qui passe par M. — Discussion;

3° Le point M étant choisi de manière à ce que la somme du diamètre BC et de la distance OM soit maximum, calculer le demi-angle au sommet du cône.

(*Alger.*.

16. — Exprimer la surface totale S d'un cône droit, inscrit dans une sphère donnée, en fonction du rayon R de la sphère et de la distance x de son centre à l'une des génératrices du cône. R étant une constante, construire la courbe qui représente les variations de la quantité $\frac{R^2 S}{4\pi}$ considérée comme fonction de x, quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$. (*Caen.*)

17. — Sur une sphère dont le diamètre AB a un mètre de longueur, on considère un petit cercle C dont le plan est perpendiculaire à AB en un point D situé à une distance x du point A, puis on construit le cône ayant pour sommet A et pour base le cercle C.

1° Calculer la surface latérale S de ce cône en fonction de x;

2° Étudier la variation de cette surface S quand le point D se déplace de A en B, et représenter cette variation par une courbe;

3° Déterminer la valeur de x pour laquelle la surface S passe par un maximum, et calculer à un décimètre carré près la valeur correspondante de la surface. (*Paris.*)

18. — On considère une sphère dont le diamètre DD′, ayant pour extrémités D et D′, a une longueur de 1 mètre; sur cette sphère on trace un cercle C dont le plan est perpendiculaire à DD′ en un point P situé à une distance x du point D, puis on construit le cône ayant pour sommet D et pour base le cercle C.

1° Calculer en fonction de x le volume y de ce cône;

2° Étudier la variation de ce volume lorsque le point P se déplace de D en D′ et représenter cette variation par une courbe;

3° Déterminer la valeur de x pour laquelle y passe par un maximum, et calculer à un décimètre cube près la valeur correspondante du volume.

(*Toulouse.*)

19. — Une sphère de rayon R et un cône droit à base circulaire de hauteur 2R reposent sur un même plan horizontal P; ρ est le rayon de base du cône. Couper l'ensemble par un second plan horizontal P′ de manière que le volume du tronc de cône, ainsi déterminé soit égal au volume du segment de sphère compris entre P et P′ multiplié par m. — Discussion. (*Poitiers.*)

20. — On donne une sphère de rayon R, on la coupe par un plan qui est à une distance x du centre de la sphère.

1° Calculer x de façon que le rapport de l'aire de la section de la sphère par le plan à la différence des aires des deux calottes que le plan sécant détermine sur la sphère soit égal à un nombre donné m;

2° Étudier les variations de m lorsqu'on fait varier x;

3° Calculer à $\frac{1}{100}$ près par défaut la valeur de x pour $R = m = 1$.

(*Lyon.*)

21. — Un tronc de cône de révolution est circonscrit à une sphère. Calculer les rayons des bases et celui de la sphère inscrite, sachant que le volume du tronc de cône est égal au volume d'une sphère de rayon donné a, et que la surface totale du tronc est égale à la surface d'une sphère de rayon donné b. — Discussion. (*Montpellier.*)

22. — A une sphère de rayon x, on circonscrit un tronc de cône à bases parallèles dont les bases et les arêtes latérales sont tangentes à la sphère. On suppose l'aire de la surface latérale de ce tronc de cône égale à l'aire d'un cercle de rayon a.

1° Montrer que chaque arête latérale du tronc de cône est égale à la somme des rayons des bases et aussi au rayon a;

2° Exprimer en fonction de a et de x le volume V du tronc;

3° Pour des valeurs données de a et de x, déterminer les rayons R et r des bases;

4° Dire entre quelles limites peut varier x pour une valeur déterminée de a;

5° Comment varie le volume V quand x varie d'une de ces limites à l'autre? (*Toulouse.*)

23. — Deux sphères extérieures ont des rayons R et r. La distance des centres est d.

Un point M de la ligne des centres reste entre les deux sphères, soit x sa distance au premier centre. Calculer la somme des aires des zones des deux sphères qui sont vues du point M.

Étudier la variation de cette somme lorsque x varie. Déterminer son maximum et discuter les divers cas possibles. (*Montpellier.*)

24. — Deux sphères de rayons R et R′ sont tangentes extérieurement. Calculer le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle θ que la ligne des centres fait avec les plans tangents aux deux sphères.

Calculer le volume V compris entre les deux sphères et le cône circonscrit.

Calculer V à 1 centimètre cube près en supposant R = 1 mètre et R′ = 1 décimètre. (*Grenoble.*)

25. — On considère trois sphères extérieures les unes aux autres et dont les centres sont A, B, C et les rayons a, b, c; on a $a > b$. Les centres sont en ligne droite, B et C sont du même côté de A; on a $AB = h$, $AC = l$ et $l > h$. La sphère A est lumineuse.

1° Dire à quelles conditions la sphère C sera tout entière dans l'ombre projetée par B;

2° Déterminer l'aire de la sphère B qui est dans l'ombre;

3° En supposant que la sphère C ne soit qu'en partie dans l'ombre, et en considérant un grand cercle de cette sphère situé dans un plan passant par ABC, déterminer la longueur de l'arc de ce grand cercle qui est dans l'ombre portée par B;

4° Faire les calculs du 3° en supposant : $a = 109$, $b = 1$, $c = 1$, $h = 23\,400$, $l = 23\,500$. (*Grenoble.*)

26. — Une chaudière a la forme d'un cylindre ABCD limité, d'une part, par sa base AB et, de l'autre, par un hémisphère CMD, et l'on demande de déterminer, parmi tous les récipients de cette forme, celui qui, pour une même surface totale $S = \pi a^2$, présente la plus grande capacité $V = \pi v$.

On prendra, si l'on veut, pour variables le rayon $OD = x$ et la hauteur $OP = y$ du cylindre.

Dans le cas particulier où $a = 1$, on étudiera, à l'aide d'un graphique et par l'emploi des dérivées, le mode de variation du volume πv, ou de v en fonction du rayon x considéré comme variable. (*Alger.*)

27. — On considère un vase ayant la forme d'un cylindre ouvert à la partie supérieure et fermé à la base par une calotte sphérique.

Soient r le rayon du cylindre, h la hauteur totale du vase, x celle de la calotte. On demande :

1° De trouver, en fonction de r, h et x, la capacité V et la surface totale S du vase;

2° De calculer la hauteur x de la calotte sphérique, connaissant la surface S du vase, la hauteur totale h et le rayon r du cylindre.

Pour le calcul on posera : $S = 2\pi a^2$, (*Rennes.*)

28. — Sur une ellipse ayant pour foyers F et F′ et pour centre O, on considère un point M dont la projection orthogonale sur le grand axe se fait en F. On mène en M la tangente et la normale à l'ellipse qui rencontrent le grand axe en T et en N.

1° Calculer en fonction des demi-axes a et b, ou de la longueur c de OF les distances MF, MF′, ON et OT.

Vérifier la relation $OT \times ON = c^2$.

2° Supposant donnés les trois points en ligne droite F′ F et T construire le point M et les deux sommets du grand axe. (*Lille.*)

29. — On considère un point mobile M sur une ellipse de foyers F et F′, de grand axe $2a$.

1° Exprimer la quantité $U = \frac{1}{MF^2} + \frac{1}{MF'^2}$,

d'une part, en fonction du produit des rayons vecteurs : $x = MF \times MF'$; d'autre part, en fonction du carré de la demi-différence des mêmes rayons :

$y = \left(\frac{MF - MF'}{2}\right)^2$.

2° Étudier les variations de U quand le point M décrit l'ellipse donnée.

3° Déterminer les positions du point M pour lesquelles U a une valeur donnée $\frac{1}{l^2}$. — Discussion. (*Lille.*)

30. — Dans une ellipse, les deux demi-axes sont $OA = a$, $OB = b$, et les foyers sont F et E′.

Déterminer sur l'ellipse un point M tel que l'angle FMF′ ait une valeur donnée 2Θ. On prendra pour inconnues les deux rayons vecteurs $FM = x$, $F'M = y$.

Application numérique : 1° Calculer x et y à 1 centimètre près si $a = 5^m$, $b = 3^m$ et $\Theta = 30°$.

2° Exprimer en fonction des constantes a, b et de la variable $FM = x$ l'aire du triangle FMF′ et étudier les variations de cette aire. (*Paris.*)

31. — On donne un segment AA′ et un point F sur ce segment, et l'on mène les droites AT, A′T′ perpendiculaires sur AA′. On considère une droite Δ rencontrant les droites AT, A′T′ en des points Q et Q′ tels que l'angle QFQ′ soit constamment droit.

1° Montrer que les triangles AFQ, A′FQ′ sont semblables et que le produit $AQ \times A'Q'$ reste constant;

2° Si P est la projection du point F sur Δ, montrer que le quadrilatère AFPQ est inscriptible dans un cercle et que l'on a

$$\widehat{APF} = \widehat{AQF}, \qquad \widehat{A'PF} = \widehat{A'Q'F};$$

3° Démontrer que le lieu du point P est un cercle décrit sur AA′ comme diamètre et que la droite Δ reste tangente à une ellipse dont l'un des foyers est au point F. (*Rennes.*)

32. — Sur une ellipse de foyers F et F′, dont les longueurs a et b des demi-axes satisfont à la condition $b = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, on choisit un point M tel que l'angle FMF′ soit égal à 60°. Calculer les côtés et les angles F et F′ du triangle FMF′. (*Paris.*)

33. — Un système articulé est formé de quatre droites FA, AB, BF', F'F ; on suppose que $FA = F'B = l$, et que $AB = FF' = d$.

Les points F et F' restant fixes, A et B se meuvent dans un plan passant par F et F'.

1° Démontrer que le point de rencontre M des barres FA et F'B décrit une ellipse de foyers F et F' ;

2° Construire un point M pour lequel la barre AB ait une direction donnée Δ ;

3° Exprimer en fonction de $MF = \rho$, $MF' = \rho'$, de l et de d, l'aire du quadrilatère convexe BFF'A. (*Lille.*)

34. — Sur une parabole de sommet A et de foyer F, on considère une série de points $M_1M_2M_3\ldots M_n$, tels que si de chacun on abaisse une perpendiculaire sur l'axe de la courbe, son pied sur l'axe coïncide avec le pied de la normale à la parabole au point qui précède ; en d'autres termes, M_1 étant le premier point, M_1P_1 sera perpendiculaire sur l'axe, M_1P_2 normale en M_1 à la courbe, P_2M_2 perpendiculaire sur l'axe, M_2P_3 normale en M_2 à la courbe et ainsi de suite :

1° Calculer les carrés des longueurs P_1M_1, M_1P_2, P_2M_2, M_2P_3, P_3M_3, $M_3P_4\ldots$, $P_{n-1}M_{n-1}$, $M_{n-1}P_n$. On posera $AP_1 = a$ et on désignera par p le paramètre de la parabole. Somme des carrés des longueurs calculées ;

2° Supposant ensuite que toute la figure tourne autour de l'axe de la courbe, évaluer les volumes engendrés par les triangles $P_1M_1P_2$, $P_2M_2P_3$, $P_3M_3P_4\ldots$, $P_{n-1}M_{n-1}P_n$. Différence entre deux volumes consécutifs quelconques. (*Clermont.*)

35. — Sur une parabole donnée on prend un point M que l'on joint au foyer F et d'où l'on abaisse une perpendiculaire MH sur l'axe de la parabole. Évaluer en fonction de la distance x du point H au sommet de la parabole le volume engendré par la révolution du triangle MHF autour du côté HF. Montrer comment ce volume varie avec x ; construire la courbe qui représenterait les variations de ce volume. (*Caen.*)

36. — Déterminer le foyer d'une parabole connaissant la directrice DD' et deux points A et B de la courbe.

En supposant que la droite DD' et le point A soient donnés d'une manière fixe, trouver dans quelle région du plan ADD' doit se trouver le point B pour que le problème admette au moins une solution. Montrer que les paraboles correspondant aux diverses positions du point B dans la région considérée ont leurs sommets sur une ligne et dire quelle est l'espèce de cette ligne. (*Caen.*)

37. — On donne un cercle fixe (γ) de centre O et une tangente fixe AB de ce cercle :

1° Montrer que le lieu des centres O' des cercles (C) tangents à (γ) et à la droite AB est une parabole de foyer O ;

2° Soient M le point de contact d'un cercle (C) avec la droite AB, N son point de contact avec le cercle (γ) ; montrer que le point P où la tangente en N rencontre la droite AB est le milieu de AM ;

3° Montrer que la droite MN coupe la droite OA en un point fixe K, et que le produit $KN \times KM$ est constant et égal à $\overline{KA}^2$. (*Bordeaux.*)

38. — Construire le sommet d'une parabole connaissant le foyer, une tangente à la courbe et le point de contact de cette tangente. Lieu des sommets des paraboles ayant pour foyer un point donné et tangentes à une droite donnée. (*Caen.*)

39. — On considère un triangle BAC rectangle en A, et AH la hauteur abaissée du sommet A, les points M et P symétriques des points B et C par rapport au point A. En supposant que le triangle se déforme de façon que les

points C et H restent fixes, montrer que le lieu du point P est une droite Δ perpendiculaire à CH, que le lieu du point M est une parabole de foyer C et de directrice Δ et que les parallèles menées de M aux droites AH et AC interceptent sur BC une longueur constante. (*Rennes.*)

40. — Trouver le lieu géométrique des paraboles passant par un point donné P et admettant une directrice donnée D.

En déduire une construction des paraboles, passant par deux points donnés P et P′ admettant pour directrice une droite donnée D. En regardant P et D comme fixes, dans quelle région du plan doit se trouver P′ pour que ce dernier problème soit possible. (*Grenoble.*)

41. — Connaissant le foyer et la directrice d'une parabole, trouver l'intersection de la courbe avec une parallèle à l'axe menée à la distance h de l'axe.

Appelant p la distance du foyer à la directrice et K la distance du point M à la parallèle à la directrice menée à égale distance du foyer et de cette directrice, trouver la relation entre h, K et p. (*Grenoble.*)

42. — On considère toutes les paraboles qui passent par un point donné O et ont pour directrice une droite donnée LL′.

1° Trouver le lieu géométrique des foyers et celui des sommets de ces paraboles ;

2° Par un point M choisi dans une région convenable du plan passent deux des paraboles considérées. Construire ces paraboles et déduire de cette construction la courbe sur laquelle le point M doit être situé pour que ces deux paraboles soient confondues. En conclure la région du plan dans laquelle doit être pris le point M pour que ces deux paraboles existent et soient distinctes. (*Poitiers.*)

43. — Étant donnés dans un plan deux axes rectangulaires OX, OY, on considère un point M tel que la longueur de la droite OM et la projection OP de cette droite sur OX aient une somme donnée a. On demande :

1° D'exprimer en fonction de l'ordonnée PM, l'aire A du triangle OMP et le rayon z du cercle inscrit au triangle, puis de déterminer le maximum de A et de z ;

2° De trouver le lieu des positions que peut occuper le point M ;

3° De montrer que le centre du cercle inscrit au triangle OMP est toujours sur une parabole dont l'axe SS′ est parallèle à OY et dont le sommet S a pour coordonnées, par rapport à OX et OY, $x = \frac{a}{4}$, $y = \frac{a}{8}$. (*Caen.*)

44. — Un système de vecteurs est formé par les côtés AB, BC, CA d'un triangle :

1° Démontrer que le moment résultant de ce système par rapport *à un point quelconque de l'espace* a pour mesure le double de l'aire du triangle ;

2° Construire un couple dont un vecteur soit AB et qui ait même moment résultant que le système donné ;

3° Les vecteurs donnés ayant pour mesure $AB = 10^{cm}$, $BC = 8^{cm}$, $CA = 6^{cm}$. Calculer le bras de levier du couple. (*Lille.*)

45. — On considère le système de vecteurs formé par les quatre côtés AB, BC, CD, DA d'un quadrilatère gauche ABCD :

1° Démontrer que la somme géométrique est nulle et que le moment résultant en un point a toujours mêmes direction, sens et grandeur quel que soit ce point ;

2° Faire voir que ce moment a la direction de la perpendiculaire commune à AC et BD ;

3° Donner une construction graphique de sa grandeur quand le tétraèdre ABCD est régulier. (*Bordeaux.*)

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES

D'ARPENTAGE ET DE LEVÉ DE PLANS

CHAPITRE PREMIER

Arpentage.

TRACÉ DES DROITES SUR LE TERRAIN. — USAGE DE LA CHAINE ET DE L'ÉQUERRE D'ARPENTEUR. — ARPENTAGE D'UN TERRAIN QUELCONQUE

1. Définition. — *L'arpentage* a pour objet la mesure des surfaces sur le terrain. Cet art a pour base les principes développés au *Livre IV*. Or, d'après ce qui a été dit dans ce livre, pour être à même d'évaluer les aires des terrains, il faut savoir tracer des bases sur ces terrains ainsi que des perpendiculaires et savoir les mesurer.

C'est ce que nous allons apprendre.

FIG. 1.

§ Ier. — TRACÉ DES DROITES SUR LE TERRAIN

2. Le tracé des droites sur le terrain se fait généralement à l'aide de *jalons*.

On donne ce nom à des tiges de bois ou de fer ayant environ 1m,50 de hauteur. L'extrémité qui s'enfonce dans le sol est pointue, l'autre est fendue et porte une feuille de papier blanc ou une plaque de couleur vive, ce qui rend le jalon visible à de grandes distances. On doit planter les jalons bien verticalement et avoir le soin de les enfoncer assez dans la terre pour que le vent ne puisse ni les pencher, ni les renverser.

1° *La droite à tracer sur le terrain est petite.* Lorsque la droite à tracer est de médiocre étendue, on tend bien horizontalement, d'une extrémité à l'autre, un cordeau dont la direction représente celle de la ligne même. C'est ainsi que l'on opère journellement sur les routes, dans les jardins et dans la construction des bâtiments.

2° *La droite a une longueur d'une certaine importance.* Dans ce cas, on a recours aux jalons pour indiquer sa direction. S'il s'agit, par exemple, de relier par une droite les points A et B, on *jalonne*, comme on dit, la distance AB. Voici comment on procède. Le *géomètre* ou *opérateur* commence par

planter un jalon à l'une des extrémités de la ligne, au point A, par exemple; son *aide*, muni de plusieurs jalons, va en planter un autre au point B. L'aide, en revenant de B vers A, jalonne la ligne.

FIG. 2.

A cet effet, il s'arrête à quelque distance du point B et fait mine de planter un jalon. Le géomètre, placé à une petite distance du point A, vise dans la direction AB et fait signe de la main à son aide de porter le jalon à droite ou à gauche; lorsqu'il paraît se confondre avec les deux autres, il lui indique de l'enfoncer dans le sol. Le jalon C planté, l'aide marche de nouveau vers A, et sur les indications du géomètre resté en A, il plante d'autres jalons D, E... Le dernier jalon planté doit toujours cacher à l'observateur le jalon planté auparavant.

3. Remarque. — Si l'on voulait jalonner une droite (*fig.* 2) entre deux points A et B invisibles de l'un à l'autre, on planterait *par tâtonnement* deux jalons intermédiaires E et D de manière que les jalons D, E, A soient en ligne droite ainsi que les jalons E, D, C, B : la ligne AB se trouverait ainsi jalonnée.

§ II. — USAGE DE LA CHAINE D'ARPENTEUR.

4. Mesurer une droite sur le terrain. — On mesure généralement les droites sur le terrain à l'aide d'une *chaine d'arpenteur*.

Cet instrument se compose de cinquante chaînons en gros fil de fer, ayant chacun deux décimètres et reliés entre eux par des anneaux. Les mètres sont marqués par des anneaux en cuivre et le milieu de la chaîne par une petite tige de fer ou de cuivre. Enfin, il y a à chaque extrémité de la chaîne une poignée dont la longueur fait partie du dernier chaînon (*fig.* 3)

FIG. 4.

FIG. 3.

La chaîne est accompagnée d'un paquet de dix *fiches*. On appelle ainsi des tiges en gros fil de fer terminées en pointe par l'extrémité qui doit s'enfoncer dans le sol et courbées en anneau à l'autre extrémité. Une fiche a environ $0^m,30$ de longueur (*fig.* 4).

Au lieu de la chaîne ordinaire, dont nous venons de parler, on emploie aussi un ruban d'acier flexible de 10 mètres de longueur terminé à ses extrémités par des poignées; enfin, on se sert encore d'un petit instrument appelé *roulette*. C'est une boîte cylindrique portant, en son milieu, un axe autour duquel est enroulé un ruban de cuir ou de toile ayant 10 mètres de long. Ce dernier instrument est surtout en usage pour mesurer les petites longueurs.

5. Mesure d'une droite sur un terrain horizontal ou pouvant être considéré comme tel sans erreur sensible. — 1° *La longueur à mesurer a peu d'étendue.* Si la droite à mesurer est de médiocre étendue, on fait usage soit du mètre, soit du double mètre.

2° *La droite à mesurer* AB *a une certaine importance.* On commence par jalonner la ligne. Cela fait, l'aide, tenant d'une main la chaîne et de l'autre les dix fiches, se dirige vers le point B, et marche jusqu'à ce qu'il soit arrêté par l'opérateur, qui place le bord *extérieur* de la poignée qu'il tient contre le jalon A. La chaîne étant alors bien tendue, et n'étant raccourcie ni par un nœud ni par autre chose, l'aide se baisse et fait mine de planter une fiche qu'il maintient contre le bord *intérieur* de la poignée. L'opérateur lui indique de la main la direction AB et le lieu où la fiche doit être plantée. L'aide se relève ensuite et s'avance vers le même point; l'opérateur suit en évitant de marcher plus vite que l'aide, afin de ne pas former de nœuds dans la chaîne. Arrivé près de la fiche, il s'arrête, appuie le bord *extérieur* de la poignée contre cette fiche, en fait planter une autre à l'aide, comme il vient d'être indiqué, et enlève celle près de laquelle il vient de s'arrêter. Tous les deux se mettent de nouveau en marche, et l'opération se continue jusqu'à ce que l'aide arrive en B. Ce dernier, ayant appuyé la poignée de la chaîne contre le jalon B, l'opérateur laisse alors la chaîne tendue et s'approche vers la dernière fiche plantée en F. Il lui est facile de voir le nombre de mètres et doubles décimètres que contient FB; il peut même obtenir cette longueur à un décimètre près. Si cependant il désire une plus grande approximation, il mesure avec un mètre de poche la partie de cette longueur qui excède un nombre exact de mètres et de doubles décimètres. Il compte ensuite les fiches relevées et la dernière : le nombre de ces fiches exprime le nombre de fois 10 mètres que contient AF; en y ajoutant la distance FB, il a la longueur de la ligne entière. Lorsque la longueur de la ligne à mesurer dépasse 100 mètres, l'opérateur marque d'une manière quelconque

FIG. 5.

1. L'aide peut planter sa fiche sans avoir besoin des indications de l'opérateur, s'il a la précaution de remarquer un point quelconque (un petit tertre, un arbre, etc.) qui se trouve sur l'alignement AB, soit en deçà, soit au delà de

place de la dixième fiche, et rend les dix fiches à l'aide. Cet *échange*, qui représente une longueur de 100 mètres, doit être noté avec soin. L'opération se continue ensuite comme précédemment. Une longueur de 100 mètres est ce qu'on nomme une *portée*.

6. Mesure des droites sur les terrains inclinés. — Sur les terrains inclinés, on ne mesure généralement pas les longueurs exactes des lignes, mais seulement les longueurs de leurs projections. On agit ainsi parce que ce n'est que la surface renfermée par les projections des lignes limitant le terrain réel qu'on utilise soit pour les constructions, soit même pour la culture, attendu que les végétaux croissent verticalement.

Pour mesurer la projection horizontale d'une ligne AB, l'opérateur tient une poignée de la chaîne *sur le sol* au point A, et l'aide, ayant l'autre poignée, tend horizontalement la chaîne suivant AM, dans la direction AB. Lorsque CM ne dépasse pas la longueur d'une fiche, l'aide plante la fiche au point C, en la tenant bien verticale et en l'appuyant, comme nous l'avons indiqué, contre le bord intérieur de la poignée. L'opérateur va ensuite appuyer sa poignée contre le pied de la fiche plantée en C ; l'aide tend de nouveau la chaîne horizontalement

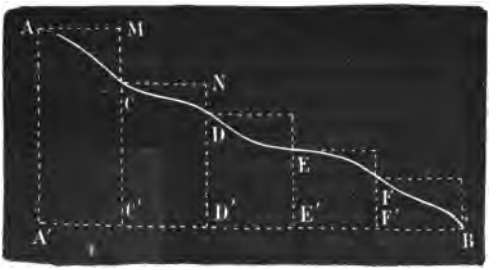


FIG. 6.

FIG. 7.

suivant CN et plante, comme au point C, une fiche en D, et ainsi de suite. Il est bien évident que la somme des longueurs AM, CN... est égale à A'B ou à la projection de AB. Lorsque la pente est rapide et que la hauteur CM dépasse la longueur d'une fiche, on se sert, pour déterminer les points C, D... d'un fil à plomb ou de préférence d'une fiche renflée ou *plombée* à sa partie inférieure (*fig.* 7). L'aide appuie la tête de cette fiche contre le bord intérieur de la poignée, et lorsque la chaîne est bien tendue, il laisse tomber la fiche, qui s'enfonce dans le sol au point C. Il remplace ensuite la fiche plombée par une fiche ordinaire. Lorsque la pente est très rapide, on ne tend que la moitié de la chaîne ou seulement quelques mètres. Dans ce cas, la chaîne se remplace souvent par un ruban métrique ou par un cordeau de longueur connue.

7. Observations importantes. — 1° Les fiches doivent être plantées verticalement, sans quoi on trouverait une longueur inexacte ; le géomètre et l'aide prendront donc la précaution de marcher un peu à gauche de la ligne à mesurer, pour que la chaîne ne dérange pas les fiches ;

2° Les deux extrémités de la chaîne devront toujours se trouver sur une même ligne horizontale; autant que possible, on enfoncera donc les fiches à la même profondeur;

3° La chaîne ne devra pas être trop tendue, si l'on ne veut pas la rompre ou la déformer;

4° Le géomètre doit toujours être sûr de la chaîne qu'il emploie, il doit donc la vérifier assez souvent. Pour cela, il aura dû préalablement tracer avec précaution, sur un sol horizontal, une longueur, égale à 10 mètres, qui lui sert d'étalon. Pour allonger une chaîne, il suffit en général de la tirer un peu. Dans le cas où elle est trop longue, ce qui arrive souvent, on courbe un ou plusieurs chaînons;

5° Une chaîne, ne pouvant jamais être parfaitement tendue, doit toujours avoir 4 ou 5 millimètres en plus de 10 mètres;

6° Les échanges de fiches méritent une grande attention. Il est indispensable que l'opérateur compte les fiches chaque fois qu'il les remet à l'aide.

§ III. — USAGE DE L'ÉQUERRE D'ARPENTEUR

8. — Pour mener des perpendiculaires sur le terrain, on emploie, en général, l'*équerre d'arpenteur*.

Il existe plusieurs espèces d'instruments de ce nom. Le plus usité est un prisme creux en cuivre qui a pour base deux octogones réguliers. Chacune des huit faces de l'équerre est partagée en deux parties égales dans le sens de la longueur par une fente ou *pinnule*. Dans quatre faces *a*, *a'* *b*, *b'* parallèles deux à deux, les pinnules se composent d'une fente étroite appelée *œilleton* et d'une ouverture plus large nommée *croisée* ou *fenêtre;* celle-ci est divisée en deux parties par un crin *c*, ou un fil de soie tendu (représenté dans la figure par la ligne blanche *c*) dans le prolongement de l'œilleton. Tout est d'ailleurs disposé de telle sorte que l'œilleton d'une face correspond à la croisée de la face opposée, et que le plan des fils de deux faces opposées est perpendiculaire au plan des fils des deux autres faces. Lorsqu'on veut viser un objet, on place l'œil *derrière l'œilleton* et l'on regarde le fil tendu dans la croisée opposée.

FIG. 8.

Dans les autres faces qui font avec celles dont nous venons de parler un angle de 45°, les pinnules sont simplement des fentes étroites, *f*.

L'équerre s'adapte au moyen d'une douille D à un bâton ferré ayant environ $1^m,50$ de longueur et qu'on nomme *pied de l'équerre*. La douille peut se dévisser et se placer dans l'équerre par l'ouverture *o*. Le pied de l'équerre se remplace dans les terrains pierreux par un pied à trois branches ou *trépied*.

9. Tracé des perpendiculaires. — 1° *Par un point* A *donné sur une droite* MN, *mener une perpendiculaire à cette droite* (fig. 9).

L'opérateur place verticalement l'équerre au point A, puis il la fait tourner jusqu'à ce qu'il voie le jalon planté en M à travers deux pinnules opposées. Si le point A est bien sur la ligne MN, en regardant en sens contraire, à travers les mêmes pinnules, la ligne de visée doit rencontrer le jalon N. L'opérateur regarde ensuite à travers deux pinnules dont la ligne de visée est perpendiculaire à la précédente, et fait planter à son aide un jalon B dans cette direction : la ligne AB est la perpendiculaire demandée.

2° *Par un point* A *donné hors d'une droite* MN, *abaisser une perpendiculaire sur cette droite* (fig. 10).

L'opérateur place son équerre sur la ligne MN en un point O qu'il pense être le pied de la perpendiculaire; alors il opère comme s'il vou-

FIG. 9.

FIG. 10.

lait élever une perpendiculaire à la droite MN; si la ligne de visée perpendiculaire à cette droite passe par le point A, il a la perpendiculaire demandée; dans le cas contraire, le point A est à droite ou à gauche de la ligne de visée; s'il est à droite, par exemple, d'une quantité AK, l'opérateur s'avance *à vue d'œil* sur ON d'une quantité OB = AK; si cette fois la ligne de visée perpendiculaire à MN ne rencontre encore pas le point A, il fera de nouveaux essais jusqu'à ce qu'il tombe au point B. Le géomètre un peu exercé détermine le pied d'une perpendiculaire après trois ou quatre essais.

10. Vérification d'une équerre. — Une équerre n'est exacte qu'autant que les directions marquées par les fils des pinnules sont perpendiculaires. Pour vérifier cet instrument, on le dispose bien verticalement en un point quelconque A, à une certaine distance d'un point M; visant à travers deux pinnules, on place un jalon N dans leur direction, à environ 50 mètres du point A; visant ensuite à travers deux autres pinnules dans la direction AB perpendiculaire à MN, on fait planter à peu près à la même distance un autre jalon au point B. Alors on tourne l'instrument, sans déranger son aplomb, de manière que la ligne de visée qui passait par B passe par N et réciproquement; si dans cette position on voit le

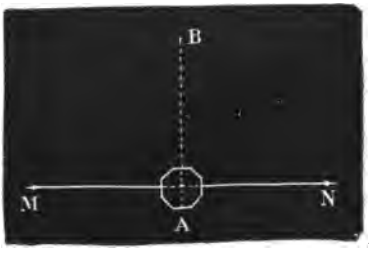


FIG. 11.

jalon B dans la ligne de visée qui passait en N, c'est une preuve que l'équerre est exacte.

§ IV. — ARPENTAGE D'UN TERRAIN QUELCONQUE

11. — Nous allons expliquer à la mesure des surfaces ce que nous savons maintenant sur la mesure des longueurs et le tracé des perpendiculaires.

Avant de commencer à mesurer un terrain on en fait une image approximative qu'on nomme *croquis;* le croquis se fait encore au fur et à mesure que l'opération avance.

1° *Trouver la surface d'un polygone* ABC... *à contour rectiligne.* — Pour mesurer la surface du polygone ABC..., on peut employer les méthodes que nous avons déjà fait connaître (nos 460 et suivants) ou celle-ci. On mène une base AF sur laquelle on abaisse des perpendiculaires, ou *ordonnées,* de tous les sommets du polygone; on choisit sur cette base un point O qui laisse du même côté toutes les ordonnées; on considère le point O comme l'origine des *abscisses.* Ainsi, comme on le sait, BB', CC', DD'... sont les ordonnées et OA, OB', OI'... sont les abscisses.

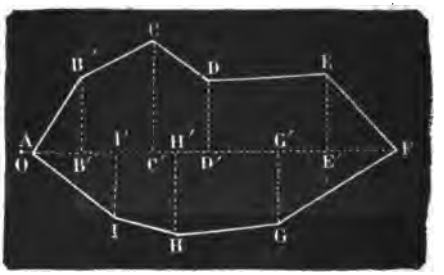


FIG. 12.

L'arpenteur mesure les ordonnées et les abscisses. Les longueurs trouvées s'inscrivent dans un tableau comme celui qui suit.

SOMMETS	ABSCISSES	ORDONNÉES
	Mètres.	Mètres.
A	3	0
B	16	19
I	24	17
C	35	29
H	40	22
D	49	18
G	68	19
E	80	20
F	98	0

Ce tableau contient toutes les données nécessaires pour obtenir l'aire du polygone ABCD..., car :

$$\text{Triangle ABB'} = \text{AB'} \times \frac{\text{BB'}}{2} = (\text{OB'} - \text{OA}) \times \frac{\text{BB'}}{2} = (16 - 3) \times \frac{19}{2} = 123^{\text{mq}},50.$$

$$\text{Triangle } AI'I = AI' \times \frac{II'}{2} = (OI' - OA) \times \frac{II'}{2} = (24 - 3) \times \frac{17}{2} = 178^{mq},50.$$

$$\text{Trapèze } B'BCC' = \frac{BB' + CC'}{2} \times B'C' = \frac{19 + 29}{2} \times (35 - 16) = 456 \text{ mètres carrés.}$$

$$\text{Trapèze } I'IHH' = \frac{II' + HH'}{2} \times I'H' = \frac{17 + 22}{2} \times (40 - 24) = 312 \text{ mètres carrés.}$$

On opérerait de même pour les autres trapèzes et les autres triangles; il est d'ailleurs évident que la somme de ces aires partielles sera égale à l'aire totale.

2° *Trouver la surface d'un polygone à contour curviligne.* — Lorsque

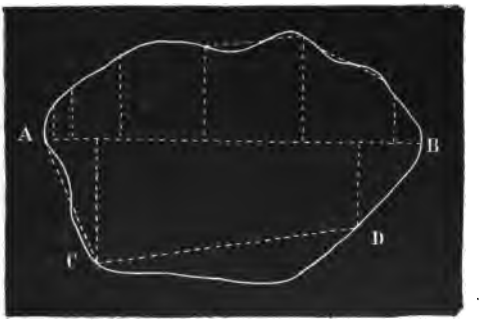


FIG. 13.

FIG. 14.

le terrain est à contour sinueux, on peut le diviser également en triangles et en trapèzes, ou employer la méthode de *compensation* (la figure indique la marche à suivre). La première méthode donne des résultats plus exacts que la seconde, mais elle est plus longue.

Dans le cas où le terrain à mesurer présente une grande étendue, on trace plusieurs bases AB, CD (*fig.* 13); il arrive alors que les perpendiculaires ne sont pas trop longues, ce qui diminue les causes d'erreur. On a d'ailleurs toujours à calculer la surface de triangles rectangles et de trapèzes.

3° *Trouver la surface d'un terrain inaccessible à l'intérieur.* — La propriété dont on veut mesurer la surface peut être un bois, un étang, une récolte sur pied, etc. Il suffit de l'entourer d'un polygone régulier (*fig.* 14), de calculer la surface de ce polygone et d'en retrancher les surfaces qui n'appartiennent pas à la propriété dont on cherche la contenance.

La figure montre les trapèzes à retrancher.

12. Remarque. — Parmi les procédés employés pour mesurer la surface comprise entre l'arc d'une courbe et une droite, il en est deux qu'il est bon de connaître.

1re Méthode. — *Mesurer, par exemple, une surface telle que* ADB. On partage la droite AB en *parties égales* assez rapprochées pour que les ordonnées, aux points de division, déterminent sur la courbe des portions pouvant être considérées comme rectilignes. En représentant

les ordonnées par y_1, y_2, y_3, y_4,... et la distance égale qui les sépare par δ, on a pour la surface cherchée :

$$\frac{\delta y_1}{2} + \delta\frac{y_1 + y_2}{2} + \delta\frac{y_2 + y_3}{2} + \delta\frac{y_3 + y_4}{2} + \frac{\delta y_4}{2}$$

ou

$$\delta\frac{2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4}{2}$$

ou enfin

$$\delta(y_1 + y_2 + y_3 + y_4).$$

Cette formule indique que pour obtenir la surface ADB, il faut multiplier l'une des divisions égales par la somme des ordonnées.

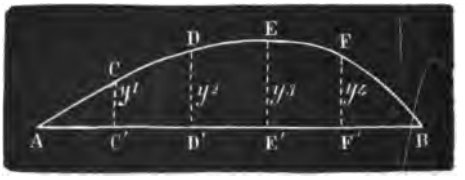


FIG. 15.

S'il s'agissait de la surface comprise entre C'F', les ordonnées extrêmes et le segment de courbe CF, on démontrerait, d'une manière identique, que pour obtenir cette surface il faut multiplier l'une des divisions égales par la somme de toutes les ordonnées intermédiaires augmentée de la demi-somme des ordonnées extrêmes. La formule suivante donnerait, par conséquent, la mesure de cette surface :

$$\delta\left(y_2 + y_3 + \frac{y_1 + y_4}{2}\right).$$

2e Méthode ou méthode de Simpson. — Cette méthode, qui donne des résultats beaucoup plus exacts que la précédente, est la conséquence d'une formule déjà connue. On sait, en effet, que si l'on désigne la surface d'un trapèze par S, sa demi-hauteur par h et ses bases par B et b, on a :

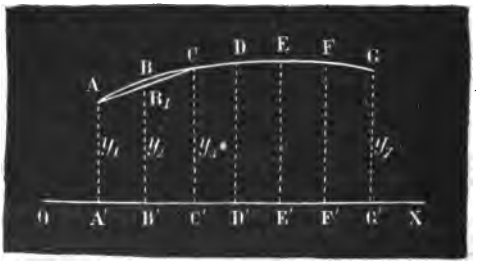


FIG. 16.

$$S = h(B + b) = \frac{h}{3}(3B + 3b) = \frac{h}{3}(B + b + 2B + 2b). \qquad (1)$$

Or, si l'on représente par B' une parallèle menée à égale distance chaque base, on a vu que $B' = \frac{B + b}{2}$, d'où $4B' = 2B + 2b$. Cette vale portée dans (1) donne :

$$S = \frac{h}{3}(B + b + 4B'). \qquad (2)$$

Connaissant la formule (2), proposons-nous maintenant d'évaluer la surface comprise entre un segment de courbe AG, un axe OX et les ordonnées AA', GG' menées des extrémités de AG à OX.

Supposons d'abord la concavité entière du segment tournée vers l'axe. Partageons A'G' en un nombre pair de parties égales, en 6, par exemple, dont l'une sera désignée par δ; puis menons par les points de division les ordonnées $y_1, y_2, \ldots\ldots y_7$. Si nous tirons la corde AC elle coupera l'ordonnée BB' en B_1 et déterminera le trapèze rectiligne AA'C'C qui, d'après la formule (2), a pour mesure :

$$\frac{\delta}{3}(AA' + CC' + 4B_1B').$$

Mais l'aire de ce trapèze rectiligne est moindre que l'aire du trapèze curviligne; pour avoir l'aire de ce dernier, il faut donc augmenter un peu l'aire du trapèze rectiligne. Il suffit, pour y arriver, de remplacer B_1B' par BB', ce qui donnera :

$$\frac{\delta}{3}(AA' + CC' + 4BB')$$

ou

$$\frac{\delta}{3}(y_1 + y_3 + 4y_2).$$

Nous aurons de même pour la mesure des autres trapèzes curvilignes :

$$\frac{\delta}{3}(y_3 + y_5 + 4y_4)$$

$$\frac{\delta}{3}(y_5 + y_7 + 4y_6).$$

La mesure approchée de la surface sera donc donnée par cette formule :

$$\frac{\delta}{3}\left[(y_1 + y_7 + 2(y_3 + y_5) + 4(y_2 + y_4 + y_6)\right].$$

Donc, la surface curviligne proposée a pour mesure le produit du tiers de la distance constante δ de deux ordonnées consécutives par la somme des ordonnées extrêmes, augmentée de deux fois la somme des autres ordonnées de rang impair et de 4 fois la somme de toutes les ordonnées de rang pair.

La formule est encore exacte dans le cas où la convexité du segment est tournée vers l'axe OX.

Si le segment est partie concave et partie convexe, on opère séparément sur chaque partie.

CHAPITRE II

Levé des plans.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES. — LEVÉ AU MÈTRE. — LEVÉ AU L'ÉQUERRE. — POLYGONES TOPOGRAPHIQUES. — LEVÉ AU GRAPHOMÈTRE. — LEVÉ A LA PLANCHETTE

§ I. — NOTIONS PRÉLIMINAIRES

13. — Les terrains présentent une surface à peu près unie et horizontale, ou sont accidentés d'une manière plus ou moins tranchée.

On appelle *plan d'un terrain horizontal* une figure semblable à celle de ce terrain.

Quand le terrain est inégal ou incliné, ce n'est plus sa figure qu'on représente sur le papier, mais celle de sa *projection horizontale*. On a alors ce qu'on appelle le *plan géométral* du terrain. Par exemple, un terrain incliné tel que ABCDE a pour projection le polygone A'B'C'D'E' sur le plan horizontal MN et pour plan géométral le polygone *abcde*, plan du polygone A'B'C'D'E'.

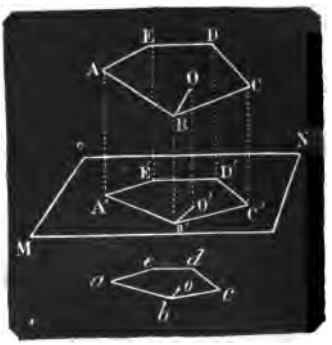


FIG. 17.

Lever le plan d'un terrain, c'est prendre sur ce terrain toutes les mesures nécessaires pour en faire le plan.

Ces mesures s'inscrivent sur le *croquis*.

Rapporter le plan sur le papier, c'est faire sur le papier le plan du terrain.

14. — Il y a différentes méthodes de lever un plan; mais avant d'en faire connaître quelques-unes, il nous semble utile de montrer comment on peut donner à chaque ligne du plan géométral la longueur voulue pour qu'il soit une image parfaite du plan de projection.

15. Échelle d'un plan. — On appelle *échelle d'un plan* le rapport d'une ligne du plan à son homologue du terrain. Ce rapport est arbitraire, cependant il ne doit être ni trop petit ni trop grand : trop petit, il ne permet pas de représenter correctement divers détails d'une certaine importance; trop grand, il nécessite pour le plan des dimensions qui en rendent le maniement difficile. En général, on prend le millimètre pour représenter 1, 2, 3... mètres, ou $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ de mètre. Si

l'on suppose, par exemple, que 1 millimètre sur le papier représente 1 mètre sur le terrain, l'échelle sera de 1 à 1000 ou $\frac{1}{1000}$.

Le rapport entre les lignes du plan et celles du terrain s'exprime habituellement par une fraction dont le numérateur est l'unité; exemples : $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{2000}$....

Le numérateur de chaque fraction indiquant une longueur sur le papier, et le dénominateur, la longueur correspondante sur le terrain, il est très facile de passer des longueurs mesurées sur le plan aux longueurs homologues du terrain, et réciproquement; car si on connaît la longueur d'une ligne prise sur le plan, il suffira de la multiplier par le dénominateur de l'échelle adoptée pour avoir la longueur de son homologue du terrain, et si, au contraire, on connaît la longueur d'une ligne sur le terrain, on aura celle de son homologue du plan en divisant la longueur de la ligne du terrain par ce même dénominateur.

Exemple I. — *Sur un plan pour lequel on a adopté l'échelle de* $\frac{1}{2500}$ *une ligne a* $0^m,20$: *trouver sa longueur sur le terrain.*

On a la proportion :

$$\frac{1}{2500} = \frac{0,20}{x},$$

d'où :

$$x = 2500 \times 0,20 = 500 \text{ mètres.}$$

Exemple II. — *Une ligne a* 160 *mètres, quelle sera sa longueur sur le plan à l'échelle de* $\frac{1}{2000}$ *?*

On a la proportion :

$$\frac{1}{2000} = \frac{x}{160},$$

d'où :

$$x = \frac{160}{2000} = 0^m,08.$$

16. Construction des échelles. — 1° *Échelle simple.* Les divisions de l'échelle représentent généralement 1 mètre, 10 mètres,

FIG. 18.

100 mètres, etc. Supposons, pour fixer les idées, que l'échelle du plan soit $\frac{1}{500}$: 1 mètre sur le terrain sera représenté par $0^m,002$ sur le papier, et 10 mètres par $0^m,02$ ou 2 centimètres. Sur une ligne indéfinie AB,

portons consécutivement, à partir du point A, des longueurs de 2 centimètres et divisons la première longueur AC en dix parties égales. Il est clair que chaque division de AB représente 10 mètres, et chaque division de AC, 1 mètre. Pour prendre sur cette échelle une longueur de 36 mètres, on placera l'une des pointes du compas sur la division 30, et l'autre sur la sixième à gauche du point C.

2° *Échelle décimale.* Lorsque le rapport adopté pour la construction d'un plan est très petit, les divisions qui, sur l'échelle précédente, indiquent les mètres, sont tellement rapprochées qu'il n'est guère possible de les bien distinguer. Or *l'échelle décimale* permet de mesurer ces petites longueurs avec une grande précision. Expliquons la construction de cette échelle, en prenant pour exemple le rapport $\frac{1}{2500}$. Dans ce cas, 1 mètre sur le terrain est représenté par $0^m,0004$ sur le papier et 100 mètres par $0^m,04$. Sur une droite indéfinie AB portons consécutivement, à partir du point A, une longueur de 4 centimètres autant de fois que nous voudrons ou que le comportera la longueur AB, et divisons AC en dix parties égales. Il est évident que chaque division de AB représentera 100 mètres, et chaque division de AC, 10 mètres. Par chacun des points A, C, 100, 200... de AB, élevons des perpendiculaires à cette droite. Sur les perpendiculaires extrêmes, portons dix longueurs arbitraires, mais égales, et joignons les points de division par des parallèles à AB. Enfin, prenons sur la dernière parallèle ED à AB une longueur *mn* égale au dixième de AC, tirons C*m* et, par les points de division de AC, menons des parallèles à C*m*.

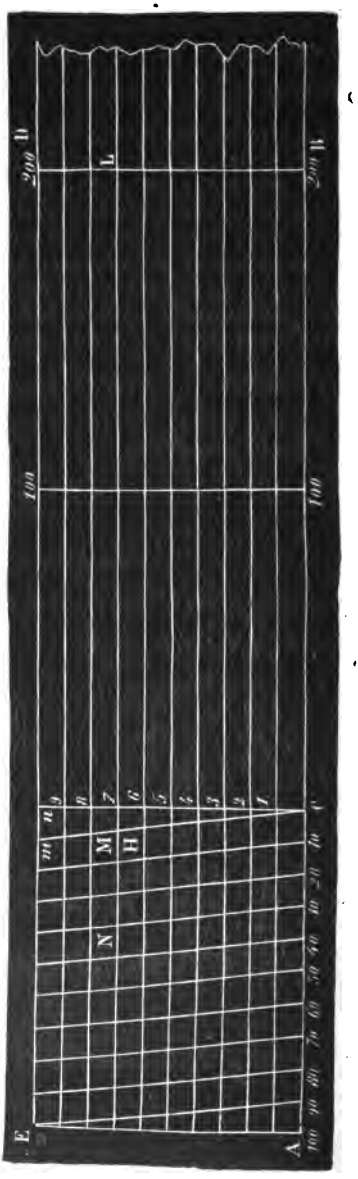


FIG. 19.

D'après cette construction, on voit aisément que les parties des parallèles comprises entre les deux lignes C*m*, C*n*, représentent respectivement 1, 2, 3... 10 mètres : par exemple, la partie H6 repré-

sente 6 mètres, car les triangles semblables CH6, C*mn*, donnent :

$$\frac{H6}{mn} = \frac{C6}{Cn} = \frac{6}{10}.$$

La longueur H6 étant les $\frac{6}{10}$ de *mn*, représente 6 mètres, puisque *mn* en représente 10.

17. Usage de l'échelle décimale. — Si l'on veut, par exemple, prendre sur cette échelle une longueur de 237 mètres, on place une des pointes du compas sur la perpendiculaire 200, en un point L, tel que la parallèle passant par ce point passe aussi au chiffre 7 des unités, et l'on avance l'autre pointe du compas sur cette parallèle jusqu'à la rencontre de la transversale 30 : on a ainsi la longueur demandée, car elle se compose de L7 + 7M + MN = 200 mètres + 7 mètres + 30 mètres = 237 mètres.

Pour connaître la longueur d'une droite tracée sur un plan, on prend une ouverture de compas égale à la longueur à mesurer, et on la porte sur l'échelle; si, par exemple, cette longueur est comprise entre 100 et 200 mètres, on fera glisser le compas sur les parallèles successives jusqu'à ce que l'une des pointes étant sur la perpendiculaire 100, l'autre rencontre l'intersection d'une parallèle et d'une transversale. Si celle-ci est numérotée 50 et la parallèle à AB, 6, on en conclut que la ligne du plan correspond à une ligne de 156 mètres sur le terrain.

Des échelles de réduction, telles que celle dont il vient d'être question, se trouvent tracées sur des règles en bois, en ivoire ou en cuivre.

18. Remarque. Il est bien utile qu'une échelle accompagne un plan; elle permet de trouver aisément les dimensions réelles du terrain. Si le plan que l'on possède est sans échelle, on remédie avec facilité à cet inconvénient, s'il est possible de mesurer une ligne du terrain; car il suffit alors de mesurer son homologue du plan, et de prendre le rapport de ces deux lignes. Ce rapport connu, il n'y a plus qu'à construire l'échelle comme nous l'avons indiqué.

§ II. — LEVÉ AU MÈTRE

19. — Il y a différentes méthodes de lever un plan au mètre : nous allons en indiquer deux.

1re Methode. — *Soit à lever le plan d'un polygone ABCDEF.*

On mesure une *base* MN et l'on rattache à cette base, comme la figure le montre, tous les sommets A,B,C... du polygone dont on veut lever le plan.

Par exemple, pour déterminer le sommet A, on mesure les longueurs AM, AN; on connaît alors les trois côtés du triangle AMN : la position du point A est donc déterminée. On peut de même déterminer tous les points importants du terrain, et l'on a, par suite, tous les éléments nécessaires à la construction du plan du terrain.

Construction du plan. On trace sur le papier une droite *mn* égale à MN *réduite,* comme on dit, à l'échelle adoptée; puis on rattache à

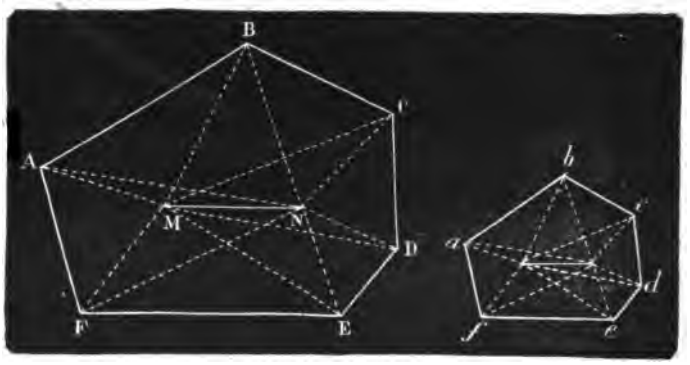


FIG. 20.

cette droite les points *a, b, c*... qui représentent les points A,B,C,... du terrain; enfin on tire les droites *ab, bc*... et l'on a ainsi le plan du terrain.

2e Méthode. — *Soit à lever le plan d'un polygone ABCDEF.*

On décompose le polygone en triangles. On mesure avec soin les

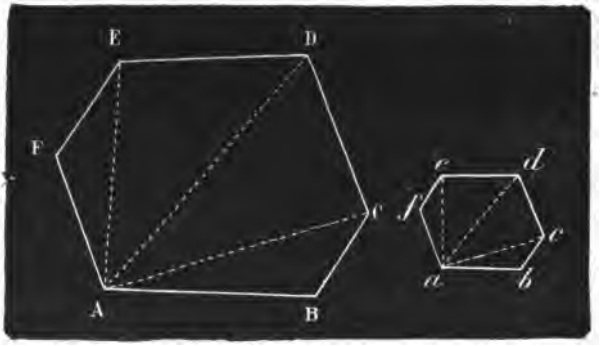


FIG. 21.

trois côtés de chacun d'eux, et on inscrit bien exactement sur le croquis les longueurs trouvées.

Construction du plan. On trace une droite *ab* égale à AB réduite à l'échelle adoptée, et sur cette droite on construit un polygone semblable à celui du terrain.

§ III. — LEVÉ A L'ÉQUERRE OU MÉTHODE DES PERPENDICULAIRES

20. — Le levé à l'équerre, qui n'exige que la chaîne d'arpenteur, l'équerre et des jalons, consiste à décomposer le terrain en trapèzes rectangles et en triangles rectangles.

On lève généralement à l'équerre le plan des terrains longs et étroits à contour irrégulier, les circuits d'un chemin, les bords d'une rivière, d'un étang, une propriété dans laquelle on ne peut pénétrer, etc. Nous allons donner deux exemples de cette méthode.

1° *Lever à l'équerre le terrain représenté par le polygone* ABCD...

On mène une diagonale AG, appelée *directrice*, qui sert de *base* à l'opération; puis des différents sommets N, B, M, C... du polygone on

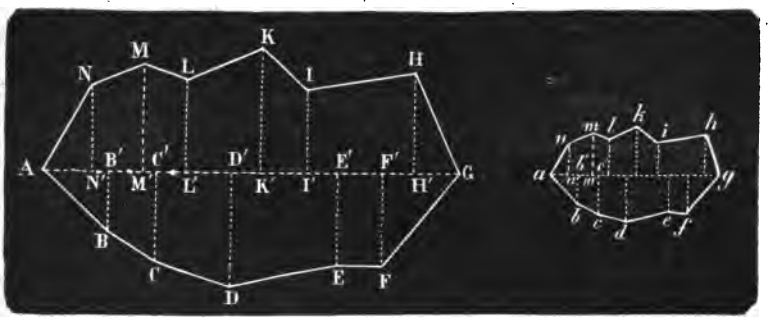


FIG. 22.

abaisse sur la directrice des perpendiculaires NN', BB', MM'... qu'on mesure ainsi que les distances AN', AB', AM'... On inscrit à mesure les longueurs trouvées sur les lignes correspondantes du croquis.

Construction du plan. On trace une droite *ag* égale à AG réduite à l'échelle adoptée, et sur cette ligne on porte les longueurs *an'*, *ab'*, *am'*... qui sont les longueurs réduites des distances homologues du terrain. Aux points *n'*, *b'*, *m'*... on élève des perpendiculaires *n'n*, *b'b*, *m'm*... qui sont les perpendiculaires réduites du terrain. Enfin on joint les points *a* et *n*, *n* et *m*, etc., et on a le plan du terrain.

Il est bien évident qu'il est indispensable de placer des jalons à tous les sommets A, B, C, D... du polygone. Cette opération se fait soit à l'avance, soit au fur et à mesure qu'on lève le plan.

2° *Lever à l'équerre le terrain représenté par le polygone* ABCDEF...

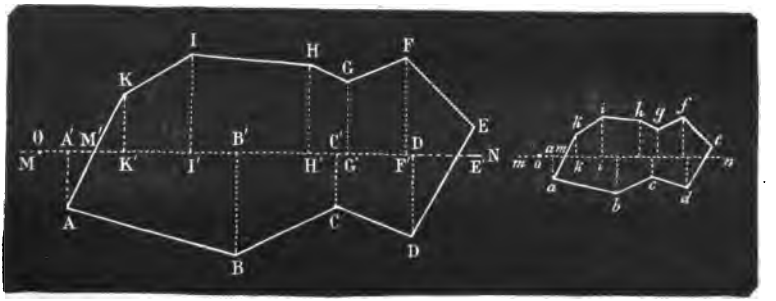


FIG. 23.

Au lieu de procéder comme dans l'exemple précédent, on choisit plus généralement une *base* ou directrice MN, de manière à pouvoir

mesurer cette droite et les perpendiculaires abaissées des points A, K, I, B... sur cette droite. On plante le premier jalon en un point O tel que les pieds des perpendiculaires abaissées des différents sommets A, K, I, B... sur MN soient d'un même côté de ce point. On mesure les distances OA', OK', OI', OB'... et les perpendiculaires AA', KK', II', BB'..., on inscrit à mesure les longueurs trouvées sur les lignes correspondantes du croquis.

Construction du plan. On trace une droite indéfinie *mn* sur laquelle on prend un point *o* : à partir de ce point, on porte sur cette droite les longueurs *oa'*, *ok'*, *oi'*, *ob'*... qui sont les longueurs réduites des distances homologues du terrain ; puis aux points *a'*, *k'*, *i'*, *b'*... on élève des perpendiculaires *a'a*, *k'k*... ; enfin on tire *ab*, *bc*...

§ IV. — POLYGONES TOPOGRAPHIQUES

21. — Les méthodes que nous avons indiquées jusqu'ici ne conviennent guère que pour le levé de plans de terrains de peu d'étendue ; mais lorsqu'une surface a quelque importance ou qu'elle renferme de nombreux points à relever, on forme tantôt avec des points remarquables du sol, tantôt avec des points pris arbitrairement, un polygone nommé *polygone topographique.*

C'est aux côtés de ce polygone inscrit ou circonscrit au terrain que viennent se rattacher tous les points, tous les détails qui doivent figurer sur le plan. Le plus souvent, au lieu d'un seul polygone, ce sont plusieurs *polygones topographiques* reliés les uns aux autres, et dont les côtés suivent les contours ou embrassent les détails qu'il s'agit de relever.

22. — Le levé du polygone ou des polygones topographiques doit s'effectuer avec le plus grand soin, car l'exactitude de tous les détails dépend de celle des polygones topographiques.

Les sommets doivent être choisis de manière que tous les côtés puissent aisément être mesurés ; il faut, par conséquent, qu'on puisse voir de chaque sommet le sommet qui précède et celui qui suit. Si l'opération doit se faire en plusieurs séances, les sommets des polygones se marquent non seulement avec des jalons, mais encore avec des piquets qui restent dans le sol jusqu'à ce que l'opération soit complètement terminée. Comme d'ailleurs ces piquets peuvent eux-mêmes être enlevés ou perdus dans les herbes ou les pierres, on aurait peine à retrouver leurs positions, si l'on n'avait la précaution de *repérer* les sommets, c'est-à-dire de rattacher chacun d'eux à des points fixes du sol.

Avant de commencer le levé des détails, il est bon de s'assurer de l'exactitude du levé du réseau topographique.

23. — Le levé du réseau topographique achevé et vérifié, on se sert de ses côtés comme autant de bases auxquelles on rattache tous les points importants, tous les détails à relever. Lorsqu'on veut se rapprocher de certains points ou de certains détails qui doivent figurer sur le plan, on emploie des bases auxiliaires nommées *traverses*. Ces lignes joignent des points connus du réseau ou des points faciles à connaître. Des traverses bien choisies abrègent beaucoup le travail.

§ V. — LEVÉ AU GRAPHOMÈTRE

24. — Dans le levé des plans au mètre et à l'équerre, on a beaucoup de lignes à mesurer; par suite, ces procédés sont longs et pénibles. Pour obvier à ce double inconvénient, on emploie un instrument qui sert à mesurer les angles.

25. Graphomètre. — L'instrument dont on fait généralement usage sur le terrain pour mesurer l'angle de deux droites horizontales, ou l'angle fermé par les projections de deux droites quelconques se nomme *graphomètre.*

FIG. 24.

Cet instrument est un demi-cercle de cuivre évidé, dont le limbe, divisé en degrés et demi-degrés, porte une graduation identique à celle du rapporteur, et deux règles ou *alidades* munies de *pinnules* ayant même disposition que dans l'équerre d'arpenteur. L'une des alidades, AA', qui est fixe et dirigée suivant le diamètre du limbe fait corps avec lui, l'autre, BB', est mobile autour du centre, sur le plan du limbe. Inférieurement, celui-ci est fixé à une tige terminée par une petite sphère embrassée par deux coquilles C, C' qui peuvent, à l'aide d'une vis V, s'écarter ou se rapprocher à volonté, de manière à

permettre ou à empêcher tout mouvement de la sphère. Ce mode d'articulation, qu'on appelle *genou à coquilles*, donne la possibilité de faire prendre au limbe une position quelconque. Les coquilles sont le prolongement d'une douille D ou cylindre creux destiné à recevoir l'axe d'un trépied. Les branches du trépied, terminées par des pointes de fer, sont fixées à leur axe à l'aide de vis de pression. Ces branches étant mobiles autour de leur origine commune, le graphomètre peut être placé dans la position qu'on désire lui donner.

26. Mesure des angles avec le graphomètre. — *Mesurer un angle sur un terrain horizontal.* — Soit l'angle MON à mesurer. On

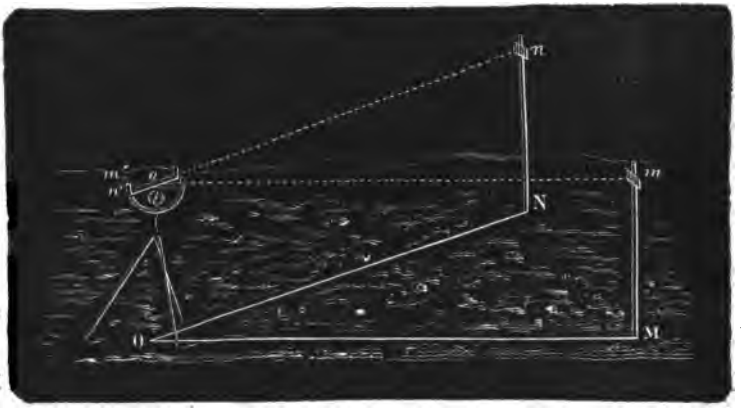


FIG. 25.

plante deux jalons M, N sur les côtés de l'angle et l'on place l'instrument de manière que son centre réponde exactement au sommet O, ce dont on s'assure au moyen du fil à plomb. Ensuite on dispose le limbe horizontalement à l'aide du niveau à bulle d'air. Maintenant toujours le graphomètre dans cette position, on dirige la *ligne de foi*, ou *ligne de visée* de l'alidade fixe, sur le point M et l'alidade mobile vers le point N. Si l'on a bien visé les jalons M et N comme il a été indiqué, il suffit de lire la mesure de l'angle sur le limbe de la même manière que sur le rapporteur [1].

27. Remarque. — Si l'on dispose l'instrument comme l'indique la figure (*fig.* 25) l'arc *m'n'* mesure, non pas directement l'angle *mon* = MON, mais son opposé par le sommet *m'on'*; il suffit donc de lire cet arc pour avoir la valeur de l'angle MON. Les praticiens donnent toujours cette disposition au graphomètre, parce qu'elle permet de lire immédiatement la valeur de l'angle sans se déranger, et par conséquent sans risquer de déranger le graphomètre.

1. Le rapporteur ne permettant guère de construire les angles qu'à un quart de degré, il suffit d'arriver à cette approximation dans la mesure d'un angle avec le graphomètre. C'est pour ce motif que nous n'avons pas à parler du *vernier* dont l'emploi permet d'arriver à mesurer, avec le graphomètre, un angle à une minute près.

28. ***Mesurer un angle dont le plan n'est pas horizontal.*** — Soit l'angle MON dans cette condition (*fig.* 25). De même qu'on mesure les projections des lignes d'un terrain qui n'est pas horizontal, de même on mesure aussi, pour le même motif, non pas l'angle des droites OM, ON, mais l'angle de leurs projections sur un plan horizontal. L'angle MON ainsi mesuré sera ce qu'on appelle *réduit à l'horizon*. Supposons que l'on opère avec le graphomètre. On place l'instrument, comme il a été indiqué, au sommet O et l'on dispose le limbe horizontalement, puis on vise le jalon M avec l'alidade fixe et ensuite le jalon N avec l'alidade mobile. Les lignes des deux alidades seront alors les projections sur le plan du limbe des droites OM, ON, et l'angle réduit à l'horizon se lira sur le limbe.

29. Vérification du graphomètre. — Pour vérifier cet instrument on emploie le plus souvent l'un des deux procédés suivants :

1° On mesure les trois angles d'un triangle que l'on imagine sur le terrain, si la somme de ces trois angles est à très peu de chose près 180°, le graphomètre est exact.

2° On fait faire un *tour d'horizon* à l'instrument en observant quatre ou cinq angles, si la somme de ces angles est 360°, avec une différence de 2 à 3′ en plus ou en moins, c'est qu'on peut se servir de l'instrument.

30. — Le levé d'un plan au graphomètre se fait dans toutes les opérations un peu importantes. On emploie généralement trois méthodes avec cet instrument : 1° *la méthode par rayonnement* (une station) ; 2° *la méthode des intersections* (deux stations) ; 3° *la méthode par cheminement* (autant de stations que de sommets dans le polygone dont on lève le plan).

31. — *Lever le plan d'un terrain* ABCD... *par rayonnement.* — On installe le graphomètre en un point M de la propriété d'où l'on puisse apercevoir tous les points à relever. On mesure tous les angles AMB, BMC... et toutes les lignes MA, MB, MC... On est alors dans la possibilité de construire le plan, puisque, pour déterminer les points A, B... on connaît MA, MB... et les angles compris AMB, BMC...

Vérification. — On fait en M un *tour d'horizon*, la somme des angles doit égaler quatre droits.

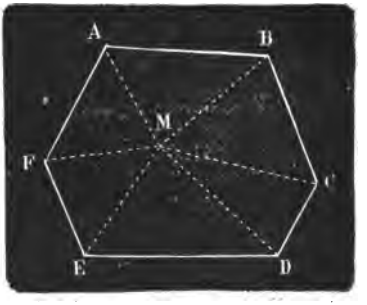


FIG. 26.

32. — *Lever le plan d'un terrain* ABC... (fig. 27) *par la méthode des intersections.* — On choisit une base MN telle qu'on aperçoive de ses extrémités les points à relever, on la mesure avec le plus grand soin. Cela fait, on installe le graphomètre au point M de manière que l'alidade fixe ait la direction MN. On dirige alors l'alidade mobile successivement vers les points A, B, C, D... et l'on détermine ainsi la valeur des angles AMN, BMN... qu'on inscrit sur le croquis. Transportant le graphomètre au point N, on l'y met en station, l'alidade fixe dans la direction NM, puis on dirige de nouveau l'alidade mobile vers les points A, B, C... on

inscrit encore la valeur des angles ANM, BNM... On possède alors tous les éléments nécessaires à la construction du plan, qui, d'ailleurs, ne présente aucune difficulté.

33. Remarque I. — Nous avons supposé que des extrémités de la base MN, il était possible d'apercevoir tous les points à relever; or,

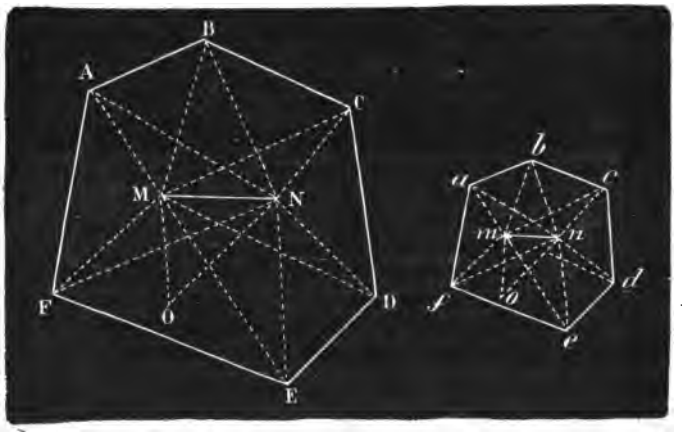


FIG. 27.

si le terrain a une grande étendue, ou si des obstacles, tels que maisons, bosquets, etc., empêchent de viser certains points qui doivent figurer sur le plan, une seule base ne suffit pas. On prend alors pour base une nouvelle ligne déterminée dans la première opération, puis une autre, si cela est nécessaire, et ainsi de suite. En procédant de la sorte, on peut lever une grande étendue de terrain.

34. Remarque II. — Tout le travail d'un plan levé de cette manière s'appuyant sur la première base, il importe que cette ligne ait une certaine étendue et qu'elle soit mesurée très exactement.

35. — *Lever par cheminement le plan d'un polygone* ABCD...

On mesure chaque angle et chaque côté. Cela fait, on est dans la possibilité de construire le plan, puisque l'on connaît dans le polygone ABCD... tous ses angles et tous ses côtés.

§ VI. — LEVÉ A LA PLANCHETTE

36. — Le levé à la planchette est expéditif. Aussi se sert-on très souvent de cet instrument pour lever les détails d'un plan, ou pour lever des plans de peu d'étendue, et pour lesquels une grande exactitude n'est pas nécessaire. D'ailleurs on peut, avec la planchette, lever et rapporter un plan en même temps.

La planchette est une tablette rectangulaire en bois, portée comme le graphomètre par un genou à coquilles et un pied à trois branches. Sur cette tablette est attachée ou collée la feuille destinée à recevoir le

plan. Au lieu d'attacher ou de coller la feuille, on préfère en général la tendre à l'aide de deux petits cylindres mobiles sur leur axe et fixés sur les bords de l'instrument.

La planchette n'est pas toujours supportée par un genou à coquilles; on lui donne aussi une disposition qui permet de la rendre facilement horizontale et, à volonté, fixe ou mobile autour d'un axe vertical.

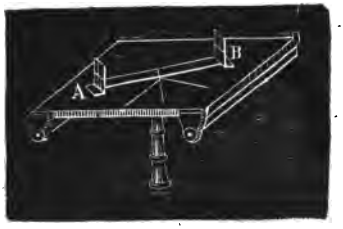


FIG. 28.

Quel que soit le système que l'on adopte pour supporter la planchette, celle-ci est toujours accompagnée d'une *alidade mobile* AB à pinnules ou à lunettes. Cette alidade est faite de manière que, si l'on trace le long de son bord inférieur une ligne sur la planchette, cette ligne est la projection de la ligne de visée. Le bord inférieur de l'alidade est appelé *ligne de foi*.

La planchette doit être bien horizontale, lorsqu'on veut en faire usage. On constate son horizontalité à l'aide du niveau à bulle d'air.

37. Levé d'un angle. Mise en station de la planchette. — Supposons qu'il s'agisse de lever avec la planchette l'angle MON de deux droites OM, ON du terrain. On trace sur le papier une droite *om* destinée à représenter le côté OM de l'angle; puis on fixe au point *o* une aiguille très fine, et l'on dispose la planchette bien horizontalement, de manière que le point *o* soit verticalement au-dessus du point O, ce dont on peut s'assurer à l'aide du fil à plomb, et que la ligne *om* ait à peu près la direction OM. On place ensuite l'alidade sur la planchette, de manière que la ligne de foi touche l'aiguille et coïncide en même temps avec *om*. Maintenant l'alidade dans cette position et la planchette bien horizontalement, on fait tourner celle-ci, s'il est nécessaire, jusqu'à ce que la ligne de visée rencontre un jalon planté verticalement sur OM. A ce moment, la *planchette est en station;* sans la déranger, on fait tourner l'alidade autour de l'aiguille jusqu'à ce que la ligne de visée rencontre un jalon vertical placé sur ON. On mène alors le long de la ligne de foi une ligne *on*, et l'angle MON représenté par *mon* est levé et réduit à l'horizon.

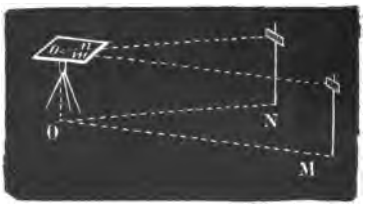


FIG. 29.

38. — Les trois méthodes employées avec le graphomètre pour lever un plan le sont aussi avec la planchette.

39. Première méthode. — *Lever le plan d'un contour polygonal* ABCDE.

On choisit un point *o* d'où l'on puisse apercevoir tous les points A, B, C... à relever. On mesure les distances *o*A, *o*B, *o*C... Cela fait, on met la planchette en station au point *o* et l'on vise successivement les

points A, B, C... On prend ensuite sur la direction *o*A une longueur *oa* = *o*A réduite à l'échelle, sur *o*B une longueur *ob* = *o*B réduite à l'échelle, et ainsi de suite. Enfin, on unit les points *a*, *b*, *c* de la même manière que les points A, B, C... le sont sur le terrain.

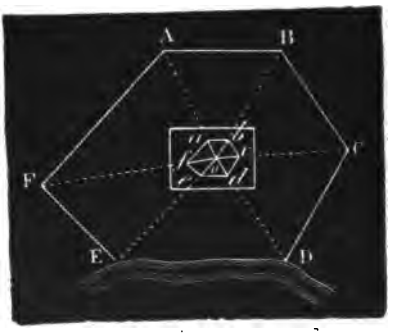


FIG. 30.

Vérification du plan. On mesure sur le terrain un ou deux côtés AB, BC du polygone; si le plan est exact, leurs longueurs réduites à l'échelle doivent égaler leurs côtés homologues *ab*, *bc* du plan.

40. Deuxième méthode. — *Lever le plan d'un terrain polygonal* ABCDEF.

On choisit une base MN (les points M et N ne sont pas visibles à cause de la planchette) telle qu'on aperçoive, de ses extrémités, les points à relever; on la mesure avec le plus grand soin. Ensuite on trace, sur le papier, une ligne *mn* représentant MN réduite à l'échelle, de manière à pouvoir disposer de chaque côté de *mn* les points à relever qui sont sur le terrain de chaque côté de MN. Cela fait, on met la

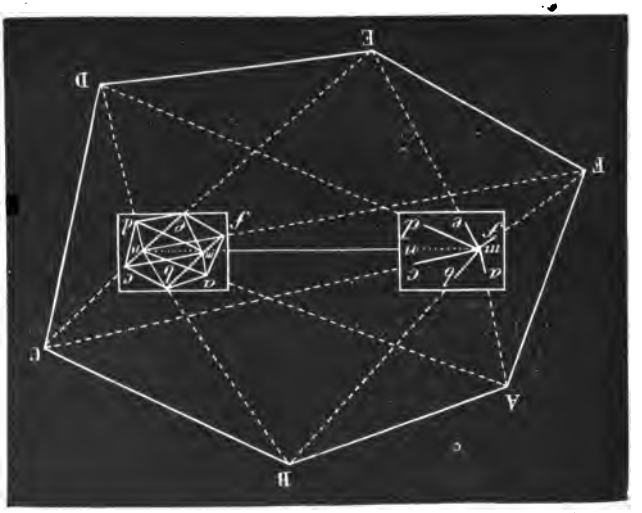


FIG. 31.

planchette en station au point M : le point *m* doit être verticalement au-dessus de M et *mn* sur la direction MN. L'instrument étant ainsi disposé, on vise successivement de *m* les points A, B, C, D.. à relever, et on trace les droites *ma*, *mb*... Cette opération terminée, on trans-

porte la planchette au point N, où on la met en station, le point *u* au-dessus du point N et *nm* sur la direction NM. On vise alors successivement les points A, B, C... déjà visés de *m*; puis on mène les lignes *na*, *nb*, *nc*... qui vont couper les premières aux points *a*, *b*... Si l'on unit ces points sur le papier de la même manière que leurs homologues le sont sur le terrain, il est évident qu'on aura sur la planchette le plan *abcdef* du polygone ABCDEF réduit à l'échelle adoptée.

Vérification du plan. On mesure sur le terrain un ou deux côtés AB, BC du polygone; si le plan est exact, leurs longueurs réduites à l'échelle doivent égaler leurs côtés homologues *ab*, *bc* du plan.

41. Troisième méthode. — *Lever le plan du polygone* ABCDEF. On lève les angles et on mesure les côtés.

Si, par exemple, on veut commencer au sommet A, on mesure AB; ensuite on place la planchette en station au point A, et l'on trace *ae* et *ab* dans les directions AE et AB. On prend *ae* = AE et *ab* = AB réduites à l'échelle. Se transportant au point B, on mesure BC et l'on met la planchette en station au point B, de manière que *ba* ait la direction BA, et que le point *b* corresponde au point B; on trace alors *bc* dans la direction BC et l'on fait *bc* = BC réduite à l'échelle. On procède de même aux sommets C et D. Si le plan est bien levé, la ligne *de* doit passer au point *e* et les lignes *de* et *ae* doivent égaler DE et AE réduites à l'échelle.

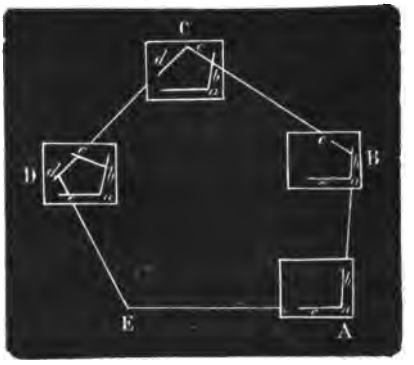


FIG. 32.

42. Remarque. — Le lecteur qui désire avoir plus de développement sur l'arpentage et le levé des plans peut consulter notre *Nouveau Cours de Géométrie*. Nous ajouterons, d'autre part, que les géomètres de profession font usage maintenant d'instruments très perfectionnés; mais ceux que nous avons mentionnés sont encore de beaucoup les plus répandus et suffisent dans la généralité des cas.

EXERCICES DE RÉCAPITULATION

LIVRE I

809. — Si, dans un triangle ABC, rectangle en A, l'hypoténuse BC est le double du côté AB, l'angle C $= \frac{1}{3}$ d'angle droit; et réciproquement, si C $= \frac{1}{3}$ d'angle droit, BC est le double de AB.

810. — Trouver, sur l'un des côtés d'un angle ABC, un point O également distant du second côté et d'un point E donné sur le premier.

811. — Dans un triangle quelconque, la somme des médianes est comprise entre le périmètre du triangle et les $\frac{3}{4}$ de ce périmètre.

812. — Dans un triangle quelconque, une bissectrice intérieure quelconque ne surpasse pas la médiane correspondante.

813. — Dans un triangle quelconque, la somme des bissectrices est plus petite que le périmètre et plus grande que le demi-périmètre du triangle.

814. — De tous les triangles formés avec un angle donné A, compris entre deux côtés dont la somme est constante, le triangle isocèle ABC est celui dont le périmètre est un minimum.

815. — Sur une droite donnée AB, trouver un point M tel que la différence de ses distances à deux points donnés C, D, situés de part et d'autre de AB, soit un maximum.

816. — Sur le côté AB d'un triangle, trouver un point tel que la somme de ses distances aux deux autres côtés soit un minimum.

817. — Dans le plan d'un triangle, trouver un point tel que la somme de ses distances aux trois côtés du triangle soit un minimum.

818. — Le point I étant le milieu de la base AB d'un triangle isocèle ABC, et M un point pris à volonté sur le côté AC, démontrer que la différence des longueurs AB et AM est plus grande que celle des longueurs IB et IM.

819. — Si l'on mène les bissectrices des angles extérieurs d'un triangle ABC, les trois triangles partiels et le triangle total qu'elles déterminent autour du triangle ABC sont équiangles. Chaque angle du triangle ABC a pour supplément le double de l'angle qui lui est opposé dans le triangle total.

1. La plupart de ces exercices ont été donnés aux examens.

820. — On prolonge les côtés d'un quadrilatère quelconque ABCD; on mène les bissectrices des deux angles nouveaux ainsi formés. On se propose de démontrer que l'angle FGE des bissectrices est égal à la demi-somme des angles opposés DAB, BCD.

821. — Soient D, E, F, les milieux respectifs des côtés BC, AC, AB d'un triangle ABC, et la parallèle DG à la médiane CF menée jusqu'à la rencontre de EF prolongée : démontrer que les trois côtés du triangle ADG sont respectivement égaux aux trois médianes du triangle ABC.

822. — Étant données deux parallèles et deux points A et B, situés hors de ces parallèles et de côtés différents, trouver le plus court chemin de A en B par une ligne brisée ADCB telle que la portion CD comprise entre les parallèles ait une direction donnée xy.

823. — On a trois carrés égaux M, N, P; on mène une diagonale dans chacun des deux premiers, on applique ensuite les hypoténuses des quatre triangles rectangles ainsi obtenus sur le côté du troisième carré. Démontrer que les droites qui joignent deux à deux les sommets des angles droits des quatre triangles forment un quadrilatère égal à la somme des trois carrés donnés, et que ce quadrilatère est lui-même un carré.

LIVRE II

824. — Étant donné un triangle ABC, on mène les bissectrices des suppléments des angles A et B, lesquelles se coupent au point O : prouver que la droite qui joint ce point au centre du cercle inscrit au triangle passe par le troisième sommet C.

825. — Construire un triangle connaissant un angle A adjacent à la base, la hauteur h et le périmètre $2p$.

826. — Construire un triangle connaissant un côté et deux médianes.

827. — Construire un triangle connaissant deux cercles ex-inscrits.

828. — Lorsque dans un triangle deux bissectrices sont égales, le triangle est isocèle.

829. — Prouver que quand plusieurs cordes d'un cercle suffisamment prolongées concourent en un même point, leurs milieux sont situés sur la circonférence d'un autre cercle.

830. — Les trois côtés AB, AC, BC d'un triangle ABC sont respectivement : $41^m\,20$, $51^m\,40$, $50^m\,60$: trouver les valeurs des 6 segments AD, BD, BE, EC, CF, AF déterminés sur ces côtés par le cercle inscrit au triangle.

831. — Construire un cercle passant par un point donné et tangent à un cercle en un point donné.

832. — Étant donnés de position une droite xy et un point O, décrire de ce point comme centre une circonférence qui coupe la droite xy en deux points A et B, de manière qu'en joignant un point quelconque du segment AMB aux points A et B, tous les angles ainsi formés soient égaux à un angle donné.

833. — Étant données deux circonférences O et O′ qui se coupent en A et B, on joint un point quelconque C de la circonférence O aux points A et B, et on prolonge les droites jusqu'à leur rencontre avec la circonférence O′ en D et en F. On tire les droites BD et AF : démontrer que l'angle AGB est constant, quelle que soit la position du point C sur la circonférence O.

834. — Lorsque deux circonférences se coupent, la droite qui joint les extrémités de deux diamètres partant de l'un des points d'intersection : 1° est perpendiculaire à la corde qui joint ces points ; 2° passe par l'autre point d'intersection ; 3° cette droite est la plus grande ligne qu'on puisse mener par cet autre point d'intersection entre les circonférences.

835. — A un cercle O, inscrit dans un angle A, on mène des tangentes intérieures ou extérieures. Démontrer : 1° que les tangentes intérieures BC (BC est une quelconque de ces tangentes) déterminent des triangles qui ont même périmètre ; 2° que les tangentes extérieures ID (ID est une quelconque de ces tangentes) déterminent des triangles dont l'excès du demi-périmètre sur le côté ID est constant ; 3° que si l'on joint le centre aux extrémités des tangentes intérieures ou extérieures, on obtient des angles constants pour chaque espèce de tangente ; 4° que les angles au centre pour la tangente extérieure et pour la tangente intérieure sont supplémentaires.

836. — Deux circonférences qui se coupent étant données, mener, par l'un des points d'intersection, une sécante commune d'une longueur donnée l.

837. — Trouver le lieu des points d'où l'on voit une droite AB sous un angle donné.

838. — Circonscrire à un triangle ABC un autre triangle DEF égal à un triangle donné D′E′F′.

839. — Par un point A, situé hors d'une circonférence, mener une sécante qui soit divisée par la circonférence en deux parties égales.

840. — Trouver le lieu géométrique des milieux des cordes d'un cercle issues : 1° d'un point hors du cercle ; 2° d'un point pris sur la circonférence ; 3° d'un point pris dans l'intérieur du cercle.

841. — Décrire, avec un rayon donné, une circonférence passant par un point donné, et tangente à une circonférence donnée.

842. — Décrire, avec un rayon donné, une circonférence tangente à deux circonférences données.

843. — Construire un triangle équilatéral ayant ses sommets sur trois parallèles données.

LIVRE III

844. — Les deux segments d'une droite donnent un produit maximum lorsque la droite est divisée en deux parties égales.

845. — Dans un triangle ABC, rectangle en A, on abaisse la perpendiculaire AH sur l'hypoténuse BC ; on représente par c et b les

côtés AB, AC : on propose de trouver, au moyen de ces données, les deux segments de l'hypoténuse ainsi que la hauteur

846. — Le rayon de la surface des mers supposée sphérique est de 6,366,198^m. A quelle distance peut s'étendre en pleine mer la vue d'un observateur placé au sommet d'une tour à 50^m au-dessus du niveau de l'eau ?

847. — Deux cordes AB, CD se coupent en un point O; les deux parties OA, OB de la première corde sont respectivement égales à 1^m,20 et 2^m,10; la différence entre les parties OC et OD de la deuxième corde est 1^m,84 : on demande la longueur de cette corde.

848. — Construire un triangle connaissant les trois hauteurs.

849. — Calculer le côté et l'apothème du dodécagone régulier inscrit en fonction du rayon du cercle. Application des deux formules dans le cas où R = 3^m.

850. — Si l'on fait rouler un cercle dans un autre cercle de rayon double, de manière qu'ils soient toujours tangents, un point de la circonférence du cercle mobile décrira un diamètre du cercle fixe.

851. — On donne un cercle dont le rayon a 26^m; on y inscrit une corde CD de 24^m; cette corde divise en deux parties le diamètre AB qui lui est perpendiculaire : on demande les deux segments du diamètre.

852. — 1° Doubler une ligne donnée, n'ayant pas d'autre instrument que le compas; 2° faire un carré avec le compas seulement.

853. — Les triangles semblables ABC, *abc* ont leurs côtés parallèles, savoir AB parallèle à *ab*, BC parallèle à *bc*, AC parallèle à *ac*; prouver que les trois droites A*a*, B*b*, C*c* vont concourir en un même point.

854. — Sur le diamètre AB d'un cercle on prend deux points C et D à égale distance du centre : démontrer que si l'on joint les deux points C et D à un point quelconque M de la circonférence, la somme $\overline{CM}^2 + \overline{MD}^2$ sera toujours la même quel que soit le point M.

855. — Démontrer que la somme des côtés du carré et du triangle équilatéral inscrits dans un même cercle surpasse la moitié de la circonférence de ce cercle d'une quantité moindre que $\frac{1}{2}$ centième du rayon.

856. — On construit un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont égaux au diamètre d'une circonférence et à l'excès du triple du rayon sur le tiers du côté du triangle équilatéral inscrit : démontrer que l'hypoténuse de ce triangle rectangle représente, à 0,0001 du rayon, la moitié de cette circonférence.

857. — Étant données deux circonférences tangentes extérieurement, on mène une sécante commune passant par le point de contact. Démontrer que les cordes sont entre elles comme les rayons; trouver en outre le moyen de mener par le point de contact une sécante qui produise deux cordes dont la somme soit égale à une ligne donnée.

858. — Étant donnés deux cercles sécants, démontrer que si par un point quelconque C du prolongement de la corde commune on mène deux sécantes de même grandeur, une dans chaque cercle, les parties intérieures FD et GK sont égales : calculer la longueur commune des deux parties dans l'hypothèse où AB = 40^m, CB = 20^m, CD = 35^m.

859. — Étant donnés un cercle de rayon R et un triangle équilatéral ABC inscrit dans le cercle, on joint le point D, milieu de l'arc ADC, au point F, milieu de BC, on prolonge jusqu'en G : on demande de calculer DG et les deux segments DF et FG.

860. — AB et AC sont les côtés égaux d'un triangle isocèle ABC inscrit dans une circonférence. On prend sur BC un point quelconque D entre B et C, et on mène la droite AD qu'on prolonge jusqu'en F, où elle rencontre la circonférence : prouver que AB est moyenne proportionnelle entre AD et AF.

861. — D'un point O, pris dans le plan d'un triangle ABC, on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés; on détermine six segments tels que la somme des carrés de ceux qui n'ont pas d'extrémités communes est égale à la somme des carrés des autres.

862. — La somme des carrés de deux cordes perpendiculaires est égale à 8 fois le carré du rayon, moins 4 fois le carré de la distance du centre au point d'intersection des deux cordes.

863. — Dans tout triangle, la distance des centres de la circonférence inscrite et de la circonférence circonscrite est moyenne proportionnelle entre le rayon de celle-ci et l'excès de ce rayon sur le double du rayon de la première.

864. — Par deux points donnés sur une circonférence, mener deux cordes parallèles dont la somme l soit donnée.

865. — Trouver le lieu des points dont les distances à deux droites données AB, AC, sont dans un rapport constant $\frac{m}{n}$.

866. — Dans tout triangle, si l'on joint le sommet A à un point quelconque M de la base BC, on a la relation :

$$\overline{AB}^2.CM + \overline{AC}^2.BM = BC\,(\overline{AM}^2 + BM.CM).$$

867. — Si, par un point pris en dehors d'un cercle, on mène deux sécantes également distantes du centre, les diagonales du quadrilatère formé par les points d'intersection se coupent en un point constant.

868. — On donne deux points A et B, sur une parallèle à une ligne donnée xy, leur distance $AB = 2a$, la distance des deux parallèles est b : on demande à quelle distance de la droite AB se trouve le centre du cercle qui passe par les deux points A et B et est tangent à la droite xy.

869. — Étant donné un cercle, on demande de déterminer, sur sa tangente au point A, un point T tel que si, par ce point on mène une droite passant par le centre du cercle et rencontrant la circonférence en deux points M, M', la partie TM soit égale au diamètre MM'. Application : $R = OA = 3^m,015$.

LIVRE IV

870. — Dans un triangle quelconque ABC, les milieux a, b, c des côtés, les pieds l, m, n des hauteurs, les milieux p, q, r des distances qui séparent les sommets A, B, C du point de concours H des hauteurs, sont 9 points situés sur une même circonférence; le centre O' de cette

circonférence est le milieu de la droite qui unit le centre O du cercle circonscrit au triangle au point de concours H des hauteurs, et son rayon est égal à la moitié du rayon de ce cercle.

871. — On a mesuré une longueur de 360^{m},40. La chaîne, vérifiée seulement après le mesurage, se trouve n'avoir que 9^{m},94 : on demande sa longueur réelle.

872. — Former avec les diverses parties d'un carré décomposé : 1° 3 carrés égaux; 2° 8 carrés égaux.

873. — Étant donnés les côtés de deux triangles équilatéraux respectivement égaux à 43^{m},56 et à 18^{m},35, on demande de calculer à 0,01 près le côté d'un triangle équivalent aux $\frac{2}{3}$ du premier, plus aux $\frac{3}{5}$ du second.

874. — Les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle étant 1 et 2, calculer à 0,01 près la valeur du rayon du cercle inscrit.

875. — Trouver la surface d'un hexagone en fonction de son apothème.

876. — Partager un triangle ABC, dans un rapport donné, par une droite MN parallèle à une direction donnée.

877. — Déterminer la surface d'un trapèze en fonction de ses quatre côtés.

878. — La projection horizontale d'un rectangle incliné régulièrement a 400^{mq} de surface; la hauteur a 8^{m} de plus que la base, la différence de niveau entre les deux extrémités de la base est de 3^{m} : on demande la superficie réelle du rectangle.

879. — 1° Construire sept hexagones réguliers égaux de manière que six d'entre eux aient deux sommets situés sur une circonférence donnée et un côté commun avec le 7e qui doit avoir le même centre; 2° prouver que le polygone concave formé des sept hexagones est équivalent à l'hexagone régulier inscrit dans la circonférence donnée.

880. — Si sur les trois côtés d'un triangle rectangle on construit des demi-circonférences, les deux surfaces comprises respectivement entre la grande circonférence et les deux petites équivalent ensemble à l'aire du triangle.

881. — Étant donné un hexagone régulier ABCDEF, on joint les sommets de deux en deux par des diagonales : 1° démontrer que le polygone *a b c d e f* formé par les intersections des diagonales consécutives est régulier; 2° trouver le rapport de la surface de ce polygone à celle de l'hexagone donné.

882. — Calculer l'aire d'un cercle tel que la surface de l'hexagone régulier inscrit dans ce cercle soit 4^{mq}.

883. — Transformer un triangle quelconque en un triangle isocèle qui lui soit équivalent et qui ait avec lui un angle commun. Déterminer le nombre de solutions.

884. — 1° Trouver en fonction du côté c d'un carré le côté de l'octogone régulier inscrit dans ce carré; 2° trouver la surface dans le cas où $c = 4^{m}$.

885. — Un triangle ABC étant donné, on propose de mener, du sommet C, deux droites CM et CN qui partagent le triangle en trois autres dont les surfaces soient entre elles comme 1, 2, 3.

886. — Étant donné un point sur l'un des côtés d'un triangle, mener par ce point une ligne qui partage le triangle en deux parties équivalentes.

887. — Sur chacun des côtés d'un carré comme diamètres et dans l'intérieur de la figure, on décrit des demi-circonférences qui déterminent 4 feuilles dont on demande la surface. Application : rayon = 1 décimètre.

888. — Inscrire à un triangle un rectangle équivalent à un carré donné m^2.

889. — D'un point B pris sur le côté AB d'un angle droit FAB, on abaisse BC perpendiculaire sur la bissectrice AG, on prend CK = CG, et des points G et K on mène les perpendiculaires GF et KL sur AF, on tire KB et GB : on propose de démontrer que la surface du triangle KBG est équivalente à celle du trapèze LFGK.

890. — Si l'on prolonge les côtés d'un triangle équilatéral d'une quantité égale à eux-mêmes et qu'on joigne les extrémités de ces prolongements, il en résultera un hexagone irrégulier dont les trois grands côtés seront doubles des petits, la hauteur triple de celle du triangle et la surface vaudra treize fois celle du triangle.

891. — De tous les triangles formés avec deux côtés donnés, le maximum est celui dans lequel ces deux côtés sont perpendiculaires l'un à l'autre.

892. — Le cercle est plus grand que toute figure isopérimètre.

893. — Parmi toutes les figures équivalentes, le cercle a le périmètre minimum.

894. — De tous les triangles isopérimètres et de même base, le maximum est le triangle isocèle.

895. — Tout polygone de n côtés qui a une surface maximum dans un périmètre donné, est convexe.

896. — Tout polygone qui contient un angle rentrant peut être transformé en un polygone ayant une surface plus grande, le même périmètre et un côté de moins.

897. De tous les polygones isopérimètres et d'un même nombre de côtés, le polygone maximum est régulier.

898. — De tous les polygones équivalents et d'un même nombre de côtés, le polygone régulier a le périmètre minimum.

899. — De deux polygones réguliers isopérimètres, le maximum est celui qui a le plus grand nombre de côtés.

900. — De tous les rectangles isopérimètres, quel est le maximum?

901. — De tous les rectangles de même surface, lequel a le périmètre minimum?

902. — Quel est le rectangle maximum qu'on puisse inscrire dans un carré?

903. — Inscrire dans un carré dont le côté est a le carré minimum.

904. — Inscrire dans un cercle le rectangle maximum.

905. — Inscrire dans un triangle le rectangle maximum.

906. — Trouver parmi les triangles isopérimètres le triangle maximum.

907. — De tous les triangles rectangles de même hypoténuse quel est le maximum en surface?

908. — De tous les triangles isocèles inscrits dans un cercle, quel est le maximum en surface?

909. — Trouver le trapèze maximum inscrit dans un demi-cercle.

910. — Sur la ligne $AB = 1^m$, on prend un point O entre A et B, on construit le triangle équilatéral AOE sur la partie AO, et le carré OBCD sur la partie OB. Cela posé, la surface du pentagone ABCDE dépend de la position du point O sur AB, et l'on demande : 1° de déterminer la position du point O qui convient au maximum ou au minimum du pentagone ABCDE; 2° de calculer les surfaces maximum ou minimum à 0,01 près.

911. — Par un point A pris sur la circonférence d'un cercle, on mène des cordes qu'on prolonge de l'autre côté du point de quantités égales à elles-mêmes : on demande de prouver que les points ainsi déterminés sont sur une autre circonférence de cercle : on demande en outre le rapport des surfaces des deux cercles.

912. — Décrire une circonférence tangente intérieurement à un cercle donné, de manière que la surface de ce cercle soit divisée en deux parties proportionnelles à deux longueurs données.

913. — On suppose qu'un plan donné renferme, avec une circonférence de cercle, deux pentagones réguliers, l'un inscrit, l'autre circonscrit. On demande : 1° le rayon du cercle dans le cas où la différence entre les périmètres des deux pentagones est de 1^{dm}; 2° dans le cas où l'aire comprise entre ces deux périmètres est de 1^{dmq}.

914. — Partager un polygone ABCDE en 5 parties proportionnelles à des lignes données, par des droites partant du sommet A.

915. — Partager le même polygone en 5 parties équivalentes par des lignes partant d'un point intérieur O.

915 *bis*. — Inscrire à un cercle donné un trapèze ayant une hauteur donnée h et équivalent à un carré m^2.

LIVRE VI

916. — D'un sommet A d'un rectangle, on abaisse la perpendiculaire AO sur la diagonale BD, on mène OG, OF respectivement perpendiculaires aux côtés BC et DC. 1° Démontrer les égalités $\frac{\overline{AB}^3}{\overline{AD}^3} = \frac{OC}{OF}$, et $\overline{AO}^3 = BD \times OG \times OF$; 2° déduire de ce qui précède un moyen de construire une droite qui soit à une droite donnée dans le même rapport que deux

cubes donnés; 3° prouver que les lignes DF, BG sont deux moyennes proportionnelles entre OF et OG ou que $\frac{OF}{DF} = \frac{DF}{BC} = \frac{BG}{OC}$.

917. — De tous les parallélipipèdes rectangles isopérimètres, quel est celui dont le volume est maximum?

918. — De tous les parallélipipèdes rectangles ayant même surface, quel est celui qui a le volume maximum?

919. — Quel est le prisme maximum qu'on peut déduire d'une pyramide par une section parallèle à la base?

920. — On donne un prisme triangulaire droit qui a une hauteur de $3^m,80$; sur l'une des arêtes, à partir de la base, on prend une hauteur représentée par x, sur une autre arête on prend une hauteur de $1^m,20$ de plus, et sur la troisième une hauteur de $1^m,30$ de plus; par les extrémités de ces trois hauteurs, on mène un plan, qui divise le volume du prisme en deux parties : comment faut-il prendre la première hauteur pour que les deux parties soient équivalentes?

921. — La hauteur d'un prisme creux est $0^m,1$; chaque base est un rectangle dont l'un des côtés est double de l'autre et la surface totale égale 28^{cmq}. On demande : 1° l'aire de chaque base; 2° l'aire de chaque face latérale; 3° le poids à 0° du mercure contenu dans ce prisme. On prendra 13,6 pour la densité de ce liquide.

922. — Trouver le volume de l'octaèdre régulier en fonction de son arête a.

923. — Les longueurs des arêtes d'une pyramide triangulaire SABC sont :

$AB = 2^m,43$;	$SA = 4^m,18$;
$AC = 3^m,15$;	$SB = 4^m,45$;
$BC = 3^m,54$;	$SC = 4^m,78$.

Trouver le volume de cette pyramide et le rayon de la sphère équivalente.

LIVRE VII

924. — Lorsque la hauteur d'un tronc de cône est égale à 4 fois la différence des rayons de ses bases, son volume est la différence des volumes de deux sphères construites avec ces rayons.

925. — La surface totale d'un cône est S' et sa génératrice A. Trouver son volume : $S' = 4^{mq}$ et $A = 1^m$.

926. — AB est le diamètre d'une sphère; on veut mener un plan perpendiculaire à ce diamètre de telle sorte que la surface de la sphère soit partagée en deux parties qui aient entre elles le rapport de 2 à 3; par quel point du diamètre AB faut-il mener ce plan?

927. — Un verre à pied de forme conique a $0^m,08$ de diamètre au bord supérieur et $0^m,12$ de hauteur. Il est rempli par du mercure et de l'eau pure dans des proportions telles que le poids du mercure est triple du poids de l'eau. La densité du mercure est 13,598 : on demande l'épaisseur de chaque couche liquide.

928. — Le rayon de la base d'un cône égale 4^m, la hauteur de ce

cône égale 6^m. On fait à 2^m du sommet une section parallèle à la base : trouver la surface du tronc de cône ainsi obtenu.

929. — Le diamètre d'une sphère égale 4^m, une corde parallèle à ce diamètre égale 2^m : on demande la surface engendrée par cette corde tournant autour du diamètre.

930. — Trouver le volume d'une sphère, étant donnée une zone dont la hauteur est égale à $0^m,47$ et la surface 2^{mq}.

931. — Le rayon d'une sphère étant égal à 1, calculer à 0,001 près la hauteur d'un cône dont la base est un petit cercle, dont le sommet est au centre de la sphère et dont la surface latérale est égale au $\frac{1}{10}$ de celle de la sphère.

932. — Un tronc de cône a 2^m de hauteur : trouver le volume de ce tronc, sachant que la différence entre le carré de la somme des rayons des bases et le produit des mêmes rayons $= 1^m$.

933. — Une machine soufflante lance 14^{ks} d'air par minute. Cette machine se compose d'un cylindre dont le diamètre intérieur égale $0^m,75$; la course du piston est de $0^m,50$: combien dure chaque coup de piston, sachant que 1^{mc} d'air pèse 1,298 grammes?

934. — Un gramme de mercure occupe dans un tube capillaire une longueur de $0^m,007$: quel est le diamètre intérieur de ce tube, la densité du mercure étant 13,596.

935. — Une boule de verre pèse 1 kil. : quelle est sa surface, sachant que la densité du verre est 2,7?

936. — On plonge par le sommet, dans du mercure dont la densité est 13,596, un cône de fer ayant 22^{cm} de hauteur, le rayon de la base du cône est $0^{cm},5$ et la densité du fer 7,788. De combien le cône s'enfoncera-t-il dans le mercure?

937. — Un morceau de bois dont la densité est 0,739 a la forme d'un cône droit. On le fait flotter sur l'eau de manière que le cône soit vertical, en mettant d'abord le sommet en bas, puis le sommet en haut. On demande : 1° quelle fraction de la hauteur du cône s'enfoncera dans l'eau dans la première position; 2° quelle fraction de cette même hauteur s'enfoncera dans la seconde.

938. — Un creuset ayant la forme d'un tronc de cône a $0^m,04$ de diamètre au fond, $0^m,07$ de diamètre au bord supérieur et $0^m,10$ de hauteur. Ce creuset contient du métal en fusion dont la surface supérieure a $0^m,06$ de diamètre; on veut couler ce métal dans un moule sphérique : quel devrait être le rayon de ce moule pour que le métal le remplît entièrement?

939. — Un réservoir a la forme d'un tronc de cône. La base inférieure a $0^m,50$ de rayon, la surface supérieure de l'eau contenue dans ce réservoir a $0^m,80$ de rayon et la hauteur de l'eau est $1^m,50$. On laisse tomber dans le réservoir un cube de $0^m,40$ de côté. A quelle hauteur s'élèvera le niveau de l'eau?

940. — La surface totale d'un cylindre circonscrit à une sphère est moyenne proportionnelle entre la surface de la sphère et la surface

totale du cône équilatéral circonscrit. Il existe la même relation entre les volumes de ces trois corps.

941. — Le côté d'un hexagone régulier égale 1^m : on demande de calculer à 0,001 près le volume engendré par l'hexagone régulier tournant autour d'un de ses côtés.

942. — La surface de la sphère est moyenne proportionnelle entre les surfaces engendrées par deux polygones réguliers semblables, d'un nombre pair de côtés, inscrits et circonscrits au même grand cercle, et tournant autour du même diamètre.

943. — Inscrire dans une sphère un cylindre droit dont la somme de ses deux bases soit égale à sa surface latérale.

944. — Inscrire dans une sphère un cône dont la surface latérale soit équivalente à celle de la calotte sphérique se terminant au même cercle.

945. — Mener à une sphère deux sections parallèles et également éloignées du centre de cette sphère, de manière que la somme des surfaces des deux sections soit égale à la surface de la zone déterminée par ces sections.

946. — Inscrire dans une sphère un cône dont la base soit équivalente à la moitié de la surface latérale.

947. — Faire passer une sphère par quatre points non situés dans le même plan.

948. — Une sphère de bois s'enfonce des 5/3 de son rayon dans de l'eau pure : calculer la densité de ce bois.

949. — Inscrire dans une sphère un cône équivalent au segment sphérique adjacent.

950. — Inscrire dans une sphère un cylindre droit ayant un rapport donné m avec la somme des deux segments sphériques adjacents.

951. — Dans un cercle donne, mener à angle droit deux diamètres AB, CD; par le point A mener la tangente AE; on mènera aussi la corde CB que l'on prolongera jusqu'à son intersection E avec la tangente. Entre les droites AE, EC et l'arc AC, une certaine figure est comprise. On suppose que cette figure fait une révolution complète autour de AB : on demande le volume ainsi engendré par cette figure. Application : $R = 1^m,35$.

952. — Une sphère étant donnée, menez un rayon quelconque et un plan perpendiculaire au milieu de ce rayon; ce plan partagera la sphère en deux segments. Supprimez le petit segment et remplacez-le par un cône droit de même base que ce segment supprimé. On demande à quelle distance doit être placé le sommet du cône pour que le corps ainsi composé d'un cône et d'une partie sphérique ait la même surface que la sphère.

953. — Trouver en fonction de l'arête a d'un tétraèdre le rayon de la sphère inscrite et celui de la sphère circonscrite.

954. — Un aéronaute est à 10 kilomètres de la terre : quelle surface peut-il apercevoir, le rayon de la terre étant égal à 6 366 kilomètres?

955. — Inscrire dans une sphère le parallélipipède maximum.

956. — Inscrire dans une sphère le cône maximum.

957. — Inscrire dans un cône le cylindre maximum.

958. — Inscrire dans une sphère le cylindre maximum.

959. — Circonscrire à une sphère le cône minimum.

LIVRE VIII

960. — Le carré de la distance du foyer F de l'ellipse à une tangente et le carré de la moitié du petit axe sont dans le même rapport que les rayons vecteurs FM, F'M du point de contact M de la tangente.

961. — 1° Les deux tangentes OT, OT' à l'ellipse partant d'un point extérieur O font des angles égaux FOT, F'OT' avec les droites qui joignent le point O aux foyers; 2° la droite OF est bissectrice de l'angle TFT' des rayons vecteurs menés d'un même foyer aux deux points de contact.

962. — Lorsqu'un angle est circonscrit à une ellipse, la portion d'une tangente mobile comprise entre les côtés de cet angle est vue de chaque foyer sous un angle constant.

963. — Le produit des segments interceptés par le grand axe d'une ellipse et une tangente mobile sur les deux tangentes menées aux extrémités du grand axe est égal à b^2.

TABLEAU

DES FORMULES LES PLUS IMPORTANTES DÉMONTRÉES DANS CET OUVRAGE

Géométrie plane.

Nota. — *On désigne généralement les angles d'un triangle quelconque par* A, B, C, *et les côtés opposés à ces angles par* a, b, c.

		Nos
Côté quelconque a d'un triangle	$a < b + c$; $a > b - c$.	55
Somme des angles d'un triangle	$A + B + C = 2$ dr.	108
Somme des angles intérieurs d'un polygone convexe de n côtés	$(2n - 4) = 2(n - 2)$ dr.	115
Somme des angles intérieurs d'un quadrilatère ABCD	$A + B + C + D = 4$ dr	116
Somme des angles extérieurs d'un polygone convexe ABC	$A + B + C + \ldots = 4$ dr.	117
Segments additifs déterminés par la bissectrice AD de l'angle A du triangle ABC	$DB = \frac{ac}{c+b}$, $DC = \frac{ab}{c+b}$.	278
Segments soustractifs déterminés par la bissectrice AD'	$D'B = \frac{ac}{c-b}$, $D'C = \frac{ab}{c-b}$.	278
Polygones semblables, rapport des périmètres	$\frac{P}{P'} = \frac{a}{a'}$.	319
Triangle rectangle en A dont la hauteur h divise l'hypoténuse en deux segments m et n	$b^2 = an$.	330
	$c^2 = am$.	»
	$h^2 = mn$.	»
	$\frac{b^2}{c^2} = \frac{n}{m}$.	332
	$a^2 = b^2 + c^2$.	336
Rapport de la diagonale d d'un carré à son côté a	$\frac{d}{a} = \sqrt{2}$.	338
Triangle quelconque	$a^2 = b^2 + c^2 \mp 2bn$.	340
Hauteur h abaissée du sommet A	$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	343
Triangle dont la médiane m correspond au côté a	$b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}$.	344
Triangle dont la médiane m a x pour projection sur le côté a	$b^2 - c^2 = 2ax$.	344
Médiane correspondante au côté a	$m = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2}$.	345
Cordes se coupant dans un même cercle (segments m, n ; m', n')	$mn = m'n'$	353

Sécantes s, s' issues d'un même point et dont les parties extérieures sont e et e' . . . . . $se = s'e'$. 356

Tangente t et sécante issues d'un même point. . . . . $t^2 = se$. 357

Rayon du cercle circonscrit. . . . . $R = \frac{abc}{4\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}$ 363

Segments additifs d'une droite divisée en moyenne et extrême raison. . . . . $\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1), \frac{a}{2}(3-\sqrt{5})$. 381

Segments soustractifs de la même droite. . . . . $\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1), \frac{a}{2}(3+\sqrt{5})$. 381

Côté du carré inscrit dans le cercle . . . . . $C_4^1 = R\sqrt{2}$. 397

Côté de l'octogone régulier convexe . . . . . $C_8^1 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$. 397

Côté de l'octogone régulier étoilé . . . . . $C_8^3 = R\sqrt{2+\sqrt{2}}$. 397

Côté de l'hexagone régulier. . . . . $C_6^1 = R$. 399

Côté du triangle équilatéral. . . . . $C_3^1 = R\sqrt{3}$. 399

Côté du dodécagone régulier convexe. . . . . $C_{12}^1 = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$. 399

Côté du dodécagone régulier étoilé. . . . . $C_{12}^5 = R\sqrt{2+\sqrt{3}}$. 399

Côté du décagone régulier convexe. . . . . $C_{10}^1 = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$. 402

Côté du décagone régulier étoilé . . . . . $C_{10}^3 = \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)$. 402

Côté du pentagone régulier convexe . . . . . $C_5^1 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. 402

Côté du pentagone régulier étoilé. . . . . $C_5^2 = \frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. 402

Circonférence C. . . . . $C = 2\pi R = \pi D$. 411

Longueur d'un arc de n degrés . . . . . $l = \frac{\pi Rn}{180}$. 413

Aire du rectangle. . . . . $S = bh$. 445

Aire du carré. . . . . $S = a^2$. 446

Aire du parallélogramme. . . . . $S = bh$. 447

Aire du triangle . . . . . $S = \frac{1}{2}bh$. 450

Aire du triangle équilatéral. . . . . $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. 454

Aire du triangle en fonction de ses côtés. $S = \sqrt{p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$. 454

Aire du losange. . . . . $S = \frac{Dd}{2}$. 456

Aire du trapèze . . . . . $S = \frac{h\,(B+b)}{2}$. 458

Polygones semblables, rapport des aires. . . . . $\frac{S}{S'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$. 467

Aire du polygone régulier. . . . . $S = P \times \frac{a}{2}$. 479

Aire du cercle . . . . . $S = \pi R^2$. 482

Aire du secteur AOB . . . . . $S = arc\,AB \times \frac{R}{2}$. 484

Aire du secteur dont l'angle au centre est α. . . . . $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$. 485

Géométrie dans l'espace.

Faces a, b, c d'un trièdre	$a < b + c$, $a > b - c$.	582
Somme des faces d'un angle polyèdre convexe.	$a + b + c + d + \ldots < 4$ dr.	585
Somme des angles dièdres d'un trièdre	2 dr $< A + B + C < 6$ dr.	590
Volume du parallélipipède rectangle	$V = abc$.	620
Cube	$V = a^3$.	622
Prisme droit	$V = BH$.	624
Parallélipipède quelconque	$V = BH$.	630
Prisme quelconque	$V = BH$.	632
Pyramide quelconque	$V = \frac{1}{3} PH$.	640
Tétraèdre	$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.	645
Octaèdre	$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.	645
Tronc de pyramide à bases parallèles	$V = \frac{1}{3} h (B + b + \sqrt{Bb})$.	647
ou	$V = \frac{1}{3} hB\left(1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2}\right)$.	649
Tronc de prisme triangulaire dont la section droite est S et les arêtes a, a', a''	$V = S\frac{a + a' + a''}{3}$.	652
Auge de maçon, tombereau, etc.	$V = \frac{1}{6} h [b(2a + a') + b'(a + 2a')]$.	653
Polyèdres semblables, rapport des volumes	$\frac{P}{P'} = \frac{A^2}{a^2}$.	699
Aire latérale du cylindre de révolution	$S = 2\pi rh$.	719
Aire totale	$S' = 2\pi r(h + r')$.	719
Volume	$V = \pi r^2 h$.	722
Aire latérale du cône de révolution	$S = \pi ra$.	732
Aire totale	$S' = \pi r(a + r)$.	732
Aire latérale du tronc de cône droit à bases parallèles	$S = \pi(r + r')a$.	734
Aire totale	$S' = \pi[(r + r')a + r^2 + r'^2]$.	734
Volume du cône de révolution	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.	739
Volume du tronc de cône droit à bases parallèles	$V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + r'^2 + rr')$.	741
Surface zone ou calotte sphérique	$S = 2\pi Rh$.	782
Surface de la sphère	$S = 4\pi R^2$ ou πD^2.	785
Volume secteur sphérique	$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$.	797
Volume de la sphère	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ou $\frac{1}{6}\pi D^3$.	798
Volume de l'anneau sphérique (la corde du segment est c et sa projection h)	$V = \frac{1}{6}\pi c^2 h$.	8
Volume du segment sphérique dont la hauteur est h et les rayons des bases r et r'	$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi r^2 h + \frac{1}{2}\pi r'^2 h$.	80
Segment sphérique à une base	$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi r^2 h$.	801

Aire de l'ellipse	$S = \pi ab.$	864
Équation de l'ellipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$	866
Équation du cercle	$x^2 + y^2 = a^2.$	867
Équation de l'hyperbole	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$	895
Équation de la parabole	$y^2 = 2px.$	918

Nombres usuels.

$\sqrt{2} = 1{,}41421$	Log. $2 = 0{,}30103.$
$\sqrt{3} = 1{,}73205$	Log. $3 = 0{,}47712.$
$\sqrt{5} = 2{,}23606$	Log. $5 = 0{,}69897.$
$\sqrt[3]{2} = 1{,}25992$	Log. $\pi = 0{,}49715.$
$\sqrt[3]{2} = 1{,}44221$	Log. $\frac{1}{\pi} = \bar{1}{,}50285.$

TABLE DES MATIÈRES

Géométrie plane.

PRÉFACE 4
PROGRAMME OFFICIEL 4
NOTIONS PRÉLIMINAIRES 7

LIVRE I

LA LIGNE DROITE

CHAPITRE PREMIER.

Ligne droite et plan 10
Angles 11

CHAPITRE II.

Triangles 16
Triangle isocèle 17
Cas d'égalité des triangles 18

CHAPITRE III.

Perpendiculaires et obliques 23
Cas d'égalité des triangles rectangles 27

CHAPITRE IV.

Lieu géométrique des points équidistants de deux points ou de deux droites 28
Applications 30

CHAPITRE V.

Droites parallèles 32

CHAPITRE VI.

Des polygones 37
Somme des angles d'un triangle et d'un polygone 38

CHAPITRE VII.

Quadrilatère 40
Applications 45

CHAPITRE VIII.

Figures symétriques par rapport à un point ou à une droite 48
Deux figures planes symétriques sont égales 48
Centre de symétrie d'une figure . . . 49
Axe de symétrie d'une figure 50

CHAPITRE IX.

Translation d'une figure plane de forme invariable 51
Composition de plusieurs translations 53

CHAPITRE X.

Usage de la règle et de l'équerre . 54
Exercices sur le livre premier . . . 56

LIVRE II

LE CERCLE

CHAPITRE PREMIER.

Intersection d'une droite et d'un cercle 60
Tangente au cercle ; les deux définitions de la tangente 62
Arcs et cordes 64

CHAPITRE II.

Positions relatives de deux circonférences 70

CHAPITRE III.

Mesure des angles 74

CHAPITRE IV.

Mouvement de rotation autour d'un point et déplacement d'une figure plane de forme invariable. 81

CHAPITRE V.

Usage de la règle et du compas . . 84
Rapporteur 85
Problèmes élémentaires et lieux géométriques 86
Exercices sur le livre II 98

LIVRE III

LONGUEURS PROPORTIONNELLES

CHAPITRE PREMIER.

Rapport et proportion..... 104
Parallèle à l'un des côtés d'un triangle..... 109

CHAPITRE II.

Propriétés des bissectrices d'un triangle..... 112
Lieu des points dont le rapport des distances à deux points fixes est constant..... 114*a*

CHAPITRE III.

Triangles semblables. — Cas de similitude..... 115
Analogie entre l'égalité et la similitude..... 119

CHAPITRE IV.

Figures homothétiques..... 120
Centres d'homothétie ou de similitude de deux cercles..... 126
Polygones semblables..... 129
Propriétés des sécantes issues d'un même point..... 133

CHAPITRE V.

Relations métriques dans un triangle rectangle et dans un triangle quelconque..... 135

CHAPITRE VI.

Lignes proportionnelles dans le cercle..... 148
Puissance d'un point par rapport à un cercle..... 153
Axe radical..... 154
Centre radical..... 156

CHAPITRE VII.

Problèmes sur les droites proportionnelles..... 157
Problèmes relatifs aux cercles tangents à des droites ou tangents entre eux..... 164
Construction de formules algébriques..... 168

CHAPITRE VIII.

Polygones réguliers..... 174
Inscription des polygones réguliers dans le cercle..... 176
Longueur d'un arc de cercle..... 184
Rapport de la circonférence au diamètre..... 187
Calcul du rapport de la circonférence au diamètre..... 188

Supplément au livre III.

CHAPITRE PREMIER

Usage des signes en géométrie... 192
Théorème de Stewart..... 193
Division harmonique..... 195
Faisceaux harmoniques..... 197

CHAPITRE II.

Fonctions circulaires..... 199
Relations entre les lignes trigonométriques d'un même angle... 202
Relations entre les côtés et les angles d'un triangle..... 203*a*

LIVRE IV

MESURE DES AIRES

CHAPITRE PREMIER.

Aires des polygones..... 210

CHAPITRE II.

Relations entre les carrés construits sur les côtés d'un triangle. 222

CHAPITRE III.

Rapport des aires de deux polygones semblables..... 225
Problèmes de construction sur les aires..... 227

CHAPITRE IV.

Aire d'un polygone régulier convexe..... 232
Aire du cercle.....
Aire d'un secteur circulaire..... 2
Aire d'un segment de cercle..... 2
Aire d'une couronne circulaire... 2
Applications numériques.. 2
Exercices sur le livre IV..... 2
Problèmes du Baccalauréat..... 2

Géométrie dans l'espace.

LIVRE V

PLAN ET LIGNE DROITE

CHAPITRE PREMIER.

Détermination d'un plan..... 257
Droite et plan perpendiculaires.. 259
Propriétés de la perpendiculaire et des obliques menées d'un même point à un plan..... 264

CHAPITRE II.

Parallélisme des droites et des plans..... 266

CHAPITRE III.

Angle dièdre. — Dièdre droit.... 272
Angle plan correspondant à un angle dièdre..... 275
Rapport de deux angles dièdres.. 277

CHAPITRE IV.

Plans perpendiculaires entre eux. 278
Angle d'une droite et d'un plan.. 280

CHAPITRE V.

Angles trièdres et angles polyèdres. 284
Limites de la somme des faces d'un trièdre..... 285
Somme des faces d'un angle polyèdre convexe..... 286
Trièdres supplémentaires..... 286
Théorèmes sur les trièdres..... 288

CHAPITRE VI.

Angles trièdres symétriques, disposition de leurs éléments.. 289
Théorèmes sur les trièdres..... 290
Cas d'égalité des trièdres..... 293
Exercices sur le livre V..... 295

LIVRE VI

POLYÈDRES

CHAPITRE PREMIER.

Polyèdres, prismes..... 297
Parallélipipèdes. — Polyèdres réguliers..... 298
Propriétés des parallélipipèdes... 299
Volume du parallélipipède..... 302
Volume du prisme droit..... 304
Volume d'un prisme quelconque.. 306

CHAPITRE II.

ramide..... 308
lume d'un pyramide quelconque..... 310
ume d'un tronc de pyramide à ases parallèles..... 314
olume d'un tronc de prisme triangulaire..... 317

CHAPITRE III.

Figures symétriques dans l'espace. 319

CHAPITRE IV.

Homothétie et polyèdres homothétiques..... 324
Polyèdres semblables..... 327
Rapport des volumes de deux polyèdres semblables..... 331

CHAPITRE V.

Translation d'une figure de forme invariable dans l'espace..... 334
Composition de plusieurs translations..... 336
Rotation autour d'un axe..... 336
Exercices sur le livre VI..... 338

LIVRE VII

LES CORPS RONDS

CHAPITRE PREMIER.

Surface cylindrique et surface conique. — Plan tangent..... 344
Surfaces de révolution simples. — Cylindre. — Cône..... 346
Surface latérale du cylindre de révolution..... 348
Volume du cylindre de révolution..... 350

CHAPITRE II.

Cône droit à base circulaire, section parallèles à la base..... 351
Surface lalérale du cône de révolution..... 351*b*
Surface latérale du tronc de cône à bases parallèles..... 352
Volume du cône..... 354
Volume du tronc de cône..... 356

CHAPITRE III.

Sphère..... 358
Sections planes, grands cercles, petits cercles..... 358
Pôles d'un cercle..... 359
Étant donnée une sphère, trouver son rayon par une construction plane..... 361
Problèmes sur la sphère..... 362
Plan tangent..... 364

CHAPITRE IV.

Positions relatives de deux sphères. 367
Centres et axes de similitude des sphères..... 369

CHAPITRE V.

Mesure de la surface engendrée par une ligne brisée régulière tournant autour d'un de ses diamètres..... 370
Aire de la zone et de la sphère.. 372

CHAPITRE VI.

Mesure du volume engendré par un triangle tournant..... 374
Volume du secteur sphérique, de la sphère et du changement sphérique..... 377
Volume approché d'un solide limité par une surface quelconque. 382
Applications..... 382

CHAPITRE VII.

Puissance d'un point par rapport à une sphère..... 385
Plan radical..... 385
Axe radical. — Centre radical.... 386

CHAPITRE VIII.

Pôle et polaire par rapport à un angle et à un cercle..... 387
Pôle et plan polaire par rapport à la sphère..... 390*a*

LIVRE VIII

SECTIONS CONIQUES ET HÉLICE

CHAPITRE PREMIER.

Définition de l'ellipse par la propriété des foyers..... 399
Tracé de l'ellipse par points..... 399
Tracé d'un mouvement continu.. 401
Axe de l'ellipse..... 401
Sommets..... 402
Cercles directeurs..... 403
Intersection d'une droite et d'une ellipse..... 404

CHAPITRE II.

Tangente à une courbe. — Normale. 406
Construction de la tangente à l'ellipse..... 409
Propriétés des tangentes..... 411

CHAPITRE III.

Projection de l'ellipse..... 412
Coordonnées d'un point..... 413
Aire de l'ellipse..... 414
Équation de l'ellipse..... 415

CHAPITRE IV.

Définition de l'hyperbole par la propriété des foyers..... 416
Tracé de l'hyperbole par points.. 417
Tracé d'un mouvement continu.. 418
Axes. — Sommets..... 419
Cercles directeurs..... 420
Intersection d'une droite et d'une hyperbole..... 422

CHAPITRE V.

Tangente à l'hyperbole..... 423
Normale..... 424
Asymptotes..... 425
Construction de la tangente à l'hyperbole..... 427
Propriétés des tangentes à l'hyperbole..... 428

CHAPITRE VI.

Parabole. — Tracé de cette courbe par points..... 429*b*
Tracé d'un mouvement continu.. 431
Intersection d'une droite et d'une parabole..... 433

CHAPITRE VII.

Tangente à la parabole..... 434
Normale..... 435
Construction de la tangente..... 436
Propriétés des tangentes..... 437
Sous-normale..... 438

CHAPITRE VIII.

Relation entre le carré d'une corde perpendiculaire à l'axe et sa distance au sommet..... 439

CHAPITRE IX.

Définition commune des coniques au moyen d'un foyer et d'une directrice..... 441

CHAPITRE X.

Sections planes d'un cylindre de révolution..... 445
Sections planes d'un cône de révolution..... 447

CHAPITRE XI.

Notions sur l'hélice..... 453
Propriété de la tangente..... 456
Exercices sur le livre VIII..... 458

INVERSION

CHAPITRE PREMIER.

Définition; figures inverses..... 460

CHAPITRE II.

Applications..... 467
Appareil de Peaucellier..... 470
Projection *stéréographique*..... 471

VECTEURS

CHAPITRE PREMIER.

Composition des vecteurs..... 473
Décomposition d'un vecteur..... 475
Relations analytiques entre le vecteur résultant et les vecteurs composants..... 476

CHAPITRE II.

Projection d'un vecteur sur un axe 477
Énoncé géométrique du théorème des projections..... 478
Énoncé algébrique du théorème des projections..... 479
Représentation analytique des vecteurs..... 480

CHAPITRE III.

Moment linéaire par rapport à un point..... 481
Moments linéaires par rapport à un axe..... 485
Expression analytique des moments..... 486

CHAPITRE IV.

Moment résultant d'un système de vecteurs..... 487
Couple de vecteurs..... 488
Relations entre les moments résultants d'un système quelconque de vecteurs par rapport à deux points O et O'..... 490
Moment relatif de deux vecteurs. 491